Факультативно. Разделение переменных в сферической системе координат при решении уравнения Гельмгольца.

Вернемся к вопросу о разделении переменных при решении уравнения Гельмгольца.

Если разделять переменные в цилиндрической системе координат, то получатся решения волнового уравнения в виде цилиндрических волн.

Если разделять переменные в сферической системе координат, то получаться сферические волны; если в трехмерной эллиптической системе — гауссовы пучки, похожие на лазерные пучки лучей, которые мы кратко рассмотрим позднее.

Рассмотрим некоторые приемы разделения переменных на примере разделения переменных в сферической системе координат.

Ищем решение уравнения Гельмгольца $\Delta R + k^2 R = 0$ для пространственной части решения волнового уравнения в виде произведения трех функций $R(\vec{r}) = P(r) \cdot Q(\theta) \cdot F(\varphi)$, где r, θ, φ — координаты в сферической системе координат.

Подставим в уравнение Гельмгольца $\Delta R + k^2 R = 0$ выражение оператора Лапласа Δ в сферической системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cdot ctg(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$$

и получим:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cdot ctg(\theta) \cdot \frac{\partial R}{\partial \theta} + k^2 R = 0.$$

Подставим сюда $R = PQF$, разделим уравнение на произведение PQF, и получим

$$\frac{P''}{P} + \frac{2}{r} \cdot \frac{P'}{P} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\theta)} \cdot \frac{F''}{F} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Q''}{Q} + \frac{1}{r^2} \cdot ctg(\theta) \cdot \frac{Q'}{Q} = -k^2$$

Рассмотрим в этом равенстве зависимость только от угла φ, когда $\begin{cases} r = const \\ \theta = const \end{cases}$ и получим

$\frac{F''}{F} = const$, где константа может зависеть от r и θ. Обозначим эту константу, как $\left(-n^2\right)$ и получим:

$$\frac{F''}{F} = -n^2 \quad => \quad F'' + n^2 F = 0 \quad => \quad F = F_0 e^{in\varphi},$$

где, как указано ранее, n может быть функцией от r и θ.

Изменение угла φ на 2π ничего не изменяет, тогда

$F(\varphi+2\pi)=F(\varphi)$ => $F_0 e^{in(\varphi+2\pi)}=F_0 e^{in\varphi}$ => $e^{in2\pi}=1$.

Следовательно, n — целое число, $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ Тогда n не может быть функцией непрерывных величин r и θ, и может быть только константой.

Подставим $\frac{F''}{F}=-n^2$ в уравнение Гельмгольца для функции $R(\vec{r})$ и получим

$$\frac{P''}{P}+\frac{2}{r}\cdot\frac{P'}{P}-\frac{n^2}{r^2\cdot\sin(\theta)}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{Q''}{Q}+\frac{1}{r^2}\cdot ctg(\theta)\cdot\frac{Q'}{Q}=-k^2.$$

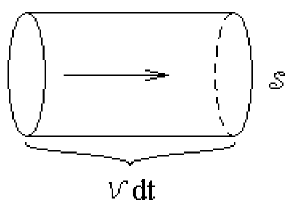
Умножим это равенство на r^2, тогда

$$r^2\frac{P''}{P}+2r\frac{P'}{P}+k^2r^2=\frac{n^2}{\sin(\theta)}-\frac{Q''}{Q}-ctg(\theta)\cdot\frac{Q'}{Q}.$$

Здесь левая часть равенства зависит только от координаты r, а правая — только от координаты θ, что возможно только в том случае, если обе части равенства равны одной и той же константе. В результате получаются два дифференциальных уравнения с разделенными переменными. Решая эти уравнения, можно получить множество решений волнового уравнения, среди которых будут решения в виде сферически симметричных (сферических) волн.

Экзамен. Связь интенсивности света и объемной плотности энергии световой волны.

Рассмотрим свет, идущий слева направо и в начальный моменты времени находящийся в объеме цилиндра с площадью основания $\mathcal{S}$ и высотой $\mathcal{V}\,dt$.



За время dt весь свет из объема цилиндра пройдет через неподвижную площадку $\mathcal{S}$.

Пусть w — объемная плотность энергии; I — интенсивность света, она же плотность потока энергии. Приравняем друг другу два выражения для энергии этого света:

$w\mathcal{S}\mathcal{V}\,dt=I\mathcal{S}\,dt$.

Здесь слева — произведение объемной плотности энергии на объем цилиндра, а справа — интенсивность, которая равна энергии, протекающей в единицу времени через единицу площади, умноженная на $\mathcal{S}\,dt$.

После сокращения получаем:

$I=w\mathcal{V}$.

Обсудим, какая это скорость $\mathcal{V}$.

Величины объемной плотности энергии w и интенсивности I мы можем найти независимо от этого равенства. Давайте найдем их и подставим в равенство $I = w\mathcal{V}$.

$$w = \frac{(\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{E}})}{8\pi} + \frac{(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}})}{8\pi} = \frac{\varepsilon \mathcal{E}^2}{8\pi} + \frac{\mu \mathcal{H}^2}{8\pi}$$

В правой части равенства два слагаемых равны друг другу, так как в бегущей световой волне энергия электрического поля и энергия магнитного поля. Тогда

$$w = \frac{\varepsilon \mathcal{E}^2}{4\pi}$$

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu} \left\langle \mathcal{E}^2 \right\rangle_t$$

Тогда из равенства $I = w\mathcal{V}$ следует $\mathcal{V} = \dfrac{I}{w} = \dfrac{\dfrac{cn}{4\pi\mu}\left\langle \mathcal{E}^2 \right\rangle_t}{\left\langle \dfrac{\varepsilon \mathcal{E}^2}{4\pi} \right\rangle_t} = \dfrac{cn}{\varepsilon\mu} = \dfrac{c}{n}$, где

правая часть равенства получена с учетом $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Выражение в правой части равенства совпадает с выражением для фазовой скорости света $V_ф = \dfrac{c}{n}$.

Любопытно, что в равенстве $I = w\mathcal{V}$ в качестве скорости $\mathcal{V}$ оказалась фазовая $V_ф$, а не групповая $V_{гр}$ скорость, хотя, казалось бы, энергия не может двигаться отдельно от огибающей светового импульса и обязана двигаться с групповой скоростью. Поэтому можно было ожидать, что скорость в выражении $I = w\mathcal{V}$ должна быть именно групповой скоростью, скоростью движения огибающей.

Тем не менее

$I = wV_ф \qquad <=>$

$$I = w\frac{c}{n}$$

<u>Факультатив. Почему фазовая, а не групповая скорость.</u>

Дело в том, что в выражении $w = \dfrac{(\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{E}})}{8\pi} + \dfrac{(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}})}{8\pi}$ мы учитываем не всю энергию.

Применяя такое выражение для энергии, мы получили фазовую скорость в выражении $\mathcal{V} = \dfrac{I}{w}$. Если на самом деле энергия больше при той же величине интенсивности, то скорость окажется меньше фазовой. Скорость в точности окажется групповой. Мы не будем этого доказывать. Напомним, что $V_{гр} < V_ф$.

Что же это за энергия, которую не учитывает формула $w = \frac{(\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{E}})}{8\pi} + \frac{(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}})}{8\pi}$?

Если свет, падающий на среду, мгновенно выключить, то окажется, что среда еще будет излучать какое-то короткое время ($\tau \approx \left(10^{-6} - 10^{-9}\right)$ секунд для газовой среды, но это $10^5 - 10^9$ оптических колебаний).

Дело в том, что световое поле $\vec{\mathcal{E}}$ раскачивает в среде диполи атомов. Диполи атомов, как добротные осцилляторы продолжают колебания и после выключения света. Энергия колебаний диполя спадает в e раз примерно за $10^5 - 10^9$ колебаний. Эта же энергия колебаний одновременно является и энергией возбужденных атомов и молекул. Дело в том, что с квантовой точки зрения осциллирующий дипольный момент у атома есть только в том случае, когда атом одновременно находится на двух уровнях энергии, связанных оптическим переходом.

Эту энергию, запасенную в среде, и не учитывает формула $w = \frac{(\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{E}})}{8\pi} + \frac{(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}})}{8\pi}$, по которой при выключении светового поля энергия пропадает мгновенно.

Экзамен. Эффект Зеемана. σ^+, σ^-, π компоненты света.

Эффект Зеемана — расщепление спектральных линий в постоянном магнитном поле.

Согласно теореме Лармора в постоянном магнитном поле электронная оболочка атома, как целое, приобретает вращение с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$, где e — модуль заряда электрона, m_e — масса электрона, $\vec{B}$ — магнитная индукция (в системе СИ: $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e}\vec{B}$).

Доказательство теоремы Лармора основано на том, что во вращающейся с частотой $\vec{\Omega}$ системе отсчета сила Лоренца со стороны магнитного поля компенсируется кориолисовой силой инерции:

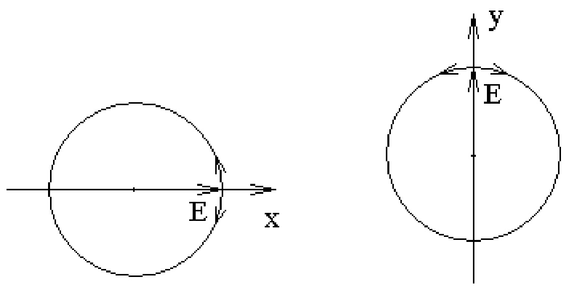
$$\frac{-e}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right] - 2m_e\left[\vec{\Omega}, \vec{V}\right] \approx 0.$$

Здесь первое слагаемое — сила Лоренца, второе — сила Кориолиса. Силами, пропорциональными B^2 или Ω^2 или более высоким степеням B можно пренебречь в слабых магнитных полях. В частности можно пренебречь центробежной силой инерции.

Взаимная компенсация сил Лоренца и Кориолиса означает, что во вращающейся системе отсчета электрон движется по тем же законам, что и в неподвижной системе без магнитного поля. Это и означает вращение электронной оболочки, как целого, с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$.

Рассмотрим излучение диполя, который гармонически осциллирует с частотой ω_0. Это движение диполя можно разложить на сумму трех колебаний вдоль осей x, y, z. Движение в плоскости перпендикулярной оси z можно разложить не только на два колебания вдоль осей x и y, но и на два вращения во встречных направлениях с разными амплитудами и начальными фазами.

Возможность разложения на два вращения во встречных направлениях следует из возможности разложения на два ортогональных колебания и из того, что каждое из этих колебаний можно представить, как два вращения с начальным направлением обоих вращающихся векторов вдоль оси колебания.



Выберем ось z в направлении постоянного магнитного поля.

В магнитном поле к движению электрона добавляется вращение с частотой ларморовской прецессии $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$.

Если диполь колеблется вдоль магнитного поля, то прецессия Лармора не изменяет частоту ω_0 его колебаний. Свет, излучаемый диполем, который совершает колебания вдоль магнитного поля, назовем π компонентой света.

Вращения же диполя в плоскости перпендикулярной магнитному полю будут иметь частоты $(\omega_0 - \Omega)$ и $(\omega_0 + \Omega)$, так как к этим вращениям с частотой ω_0 добавилось вращение с частотой Лармора Ω. Свет, излучаемый этими вращающимися диполями, называют соответственно σ^- и σ^+ компонентами света.

Названия компонент связаны с тем, что значок π напоминает значок параллельности $\|$ и соответствует свету колебания диполя параллельно магнитному полю. Значок σ напоминает круг. Диполь, вращающийся в плоскости перпендикулярной магнитному полю, излучает круговую поляризацию света вдоль магнитного поля.

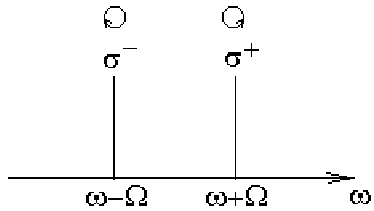
Из курса электричества мы знаем излучение диполя, колеблющегося вдоль оси z:

$$E_\theta = B_\varphi = \frac{\sin(\theta)}{cr} \cdot \frac{\partial^2 p_z\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}.$$

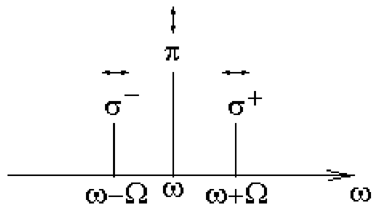
Вращение диполя можно представить, как два ортогональных колебания со сдвигом фаз $\frac{\pi}{2}$. Это позволяет найти излучение вращающегося диполя в любом направлении.

С учетом этих соображений спектр излучения произвольно осциллирующего диполя будет зависеть от направления излучения.

При наблюдении вдоль магнитного поля наблюдаются две компоненты σ^- и σ^+ с круговой поляризацией света с частотами $(\omega_0 - \Omega)$ и $(\omega_0 + \Omega)$. π - компонента в этом направлении не излучается.



При наблюдении перпендикулярно магнитному полю наблюдаются три компоненты линейно поляризованного света σ^-, π, σ^+ с частотами соответственно $(\omega_0 - \Omega)$, ω_0, $(\omega_0 + \Omega)$.



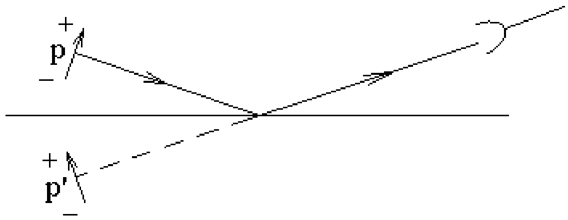
Если постоянного магнитного поля нет, то колебания диполя все равно можно разложить на σ^-, π и σ^+ компоненты относительно любой оси, так называемой оси квантования.

С учетом спина электрона возможен аномальный эффект Зеемана с расщеплением спектральной линии на большее число компонент.

Заметим, что исторически σ^+ компонентой называлась компонента света не с большей частотой, как в нашем рассмотрении, а с большей длиной волны.

Экзамен. Отражение радиоволн от поверхности проводника.

Рассмотрим радиоволну, излученную электрическим диполем. Если радиоволны падают на поверхность проводника, то отраженную от поверхности проводника радиоволну, можно найти, как излучение диполя изображения.



Электрический диполь $\vec{p}$ в простейшем случае представляет собой пару зарядов разных знаков. Каждый из пары зарядов изображается в поверхности проводника зарядом противоположного знака. Если реальный диполь $\vec{p}$ осциллирует, то осциллирует и диполь изображения $\vec{p}\,'$.

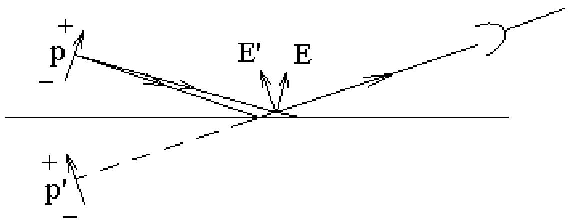
Таким образом, можно анализировать направление и фазу излучения радиоволн, отраженного от поверхности моря или озера, которые для радиоволн играют роль хорошего зеркала.

<u>Факультатив. Отражение радиоволн от поверхности проводника (часть 2).</u>

На приемнике радиоволн или в точке, расположенной сразу после отражения, мы можем сравнить фазу излучения диполя изображения с фазой, которая получается при отражении света с учетом потери полуволны при отражении от оптически более плотной среды.

Фазы почти всегда совпадают.

Исключением является случай скользящего падения излучения на зеркальную поверхность, когда плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения радиоволны. Направление вектора E отраженной волны в этом случае не противоположно направлению вектора E падающей волны для радиоволн, а для световых волн — противоположно.



Причина различия связана с тем, что угол Брюстера, при котором изменяет знак амплитудный коэффициент отражения, стремится к $\frac{\pi}{2}$ при отражении радиоволн от проводника. Так как $tg\left(\alpha_{Бр}\right)=n$, а показатель преломления для металлов $n\approx\sqrt{\varepsilon}$ стремится к бесконечности. Проводник можно рассматривать, как диэлектрик с бесконечной проницаемостью $\varepsilon=\infty$.

Факультатив. Условие равенства в неравенстве $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$.

Равенство достигается только для светового импульса гауссовой формы:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-\alpha t^2} \cos(\omega_0 t),$$

то есть когда огибающая импульса является гауссовой кривой $\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t^2}$.

Чтобы убедиться в равенстве $\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{1}{2}$ нужно вычислить $\Delta\omega$ и Δt, которые в свою очередь выражаются через $\langle \omega \rangle$, $\langle \omega^2 \rangle$, $\langle t \rangle$, $\langle t^2 \rangle$. А эти величины выражаются через спектральную плотность поверхностной плотности энергии G_ω и через зависимость интенсивности от времени $I(t)$.

Найдем Δt.

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, тогда:

$$I(t) = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle \mathcal{E}^2(t) \right\rangle = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle \left(\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \right)^2 \right\rangle = \frac{cn}{4\pi\mu}\left(\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t} \right)^2 \left\langle \cos^2(\omega_0 t) \right\rangle =$$

$$= \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t} \right)^2 = \frac{cn}{8\pi\mu} \mathcal{E}_0^2 e^{-2\alpha t^2} = I_0 e^{-2\alpha t^2}. \qquad =>$$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-2\alpha t^2}$$

Тогда

$$\langle t \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, I(t)\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, I_0 e^{-2\alpha t^2}\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_0 e^{-2\alpha t^2}\, dt} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, I_0 e^{-2\alpha t^2}\, dt}{I_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}} = 0.$$

Аналогично

$$\langle t^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 I(t)\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 I_0 e^{-2\alpha t^2}\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_0 e^{-2\alpha t^2}\, dt} = \frac{I_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot (2\alpha)^{\frac{3}{2}}}}{I_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}} = \frac{1}{4\alpha}.$$

Тогда

$$\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{4\alpha} - 0} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Найдем теперь ширину спектра светового импульса $\Delta\omega$.

$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t^2}\cos(\omega_0 t)=\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t^2}\dfrac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}$ — световой импульс. Тогда Фурье образ напряженности светового поля будет иметь вид:

$$E_0(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(t)\cdot e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}_0 e^{-\alpha t^2}\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{i\omega t}dt=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t^2+i(\omega+\omega_0)t}dt+\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t^2+i(\omega-\omega_0)t}dt=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(t^2-\frac{i}{\alpha}(\omega+\omega_0)t-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4\alpha^2}\right)}dt+$$

$$+\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(t^2-\frac{i}{\alpha}(\omega-\omega_0)t-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha^2}\right)}dt=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(t-\frac{i}{2\alpha}(\omega+\omega_0)\right)^2}dt+\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(t-\frac{i}{2\alpha}(\omega-\omega_0)\right)^2}dt=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}+\frac{\mathcal{E}_0}{2\pi}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=$$

$$=\frac{\mathcal{E}_0}{2\sqrt{\pi\alpha}}\left(e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4\alpha}}+e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}}\right).$$

Из этих двух слагаемых одно можно отбросить. Дело в том, что частоты ω и ω_0 положительные, и нас интересует случай, когда спектральная плотность интенсивности около нулевой частоты очень мала. Эти условия эквивалентны неравенству $\omega_0^2>>\alpha$. В таком случае второе слагаемое может иметь порядок единицы при условии $\omega\approx\omega_0$, а первое слагаемое всегда много меньше единицы, и его можно отбросить. Тогда

$E_0(\omega)=\dfrac{\mathcal{E}_0}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}}$ — Фурье образ светового импульса гауссовой формы, как функции времени, имеет гауссову форму, как функция частоты. Откуда можно найти спектр светового импульса:

$G_\omega=2\pi\dfrac{cn}{8\pi\mu}\cdot\left|E_0(\omega)\right|^2=\dfrac{cn\mathcal{E}_0^2}{16\pi\mu\alpha}\cdot e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}}$, который тоже имеет гауссову форму.

Средняя частота светового импульса, как следует из его симметрии, равна ω_0, и ее можно не вычислять. Тем не менее, вычислим ее:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \omega G_\omega d\omega}{\int_0^{+\infty} G_\omega d\omega} \approx \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega G_\omega d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_\omega d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{cn\mathcal{E}_0^2}{16\pi\mu\alpha} \cdot e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cn\mathcal{E}_0^2}{16\pi\mu\alpha} \cdot e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega} = \frac{\omega_0\sqrt{2\pi\alpha}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \omega_0 .$$

В данном случае ширину светового импульса в шкале часто проще вычислить по формуле $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle\left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2\right\rangle}$, а не по формуле $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle - \langle\omega\rangle^2}$. Тогда

$$\left\langle\left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2\right\rangle = \left\langle\left(\omega - \omega_0\right)^2\right\rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \left(\omega-\omega_0\right)^2 G_\omega d\omega}{\int_0^{+\infty} G_\omega d\omega} \approx \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega-\omega_0\right)^2 G_\omega d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_\omega d\omega} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega-\omega_0\right)^2 \frac{cn\mathcal{E}_0^2}{16\pi\mu\alpha} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cn\mathcal{E}_0^2}{16\pi\mu\alpha} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega-\omega_0\right)^2 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha}} d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}} d\omega} = \frac{(2\alpha)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \alpha .$$

Тогда

$$\Delta\omega = \sqrt{\left\langle\left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2\right\rangle} = \sqrt{\alpha} .$$

И, наконец $\Delta\omega\cdot\Delta t=\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}$. Равенство доказано.

Факультатив. Разложение светового поля по плоским монохроматическим волнам.

До этого момента мы раскладывали свет по частотам только в одной пространственной точке.

Аналогично в один момент времени световое поле можно разложить по пространственным циклическим частотам k_x,k_y,k_z, где $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число или длина волнового вектора.

Сначала, как обычно, разложим вещественное световое поле в каждой точке $\vec{r}$ по частотам ω обоих знаков:

$$\vec{\mathcal{E}}(t,\vec{r})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_0(\omega,\vec{r})\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

Фурье амплитуду $\vec{E}_0(\omega,\vec{r})$ светового поля разложим по пространственным частотам:

$$\vec{E}_0(\omega,\vec{r})=\iiint\vec{E}_{00}(\omega,\vec{k})\cdot e^{i\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)}dk_x dk_y dk_z \qquad =>$$

$\vec{E}_0(\omega,\vec{r})=\iiint\vec{E}_{00}(\omega,\vec{k})\cdot e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}d\vec{k}$, где принято обозначение $d\vec{k}\equiv dk_x dk_y dk_z$.

Объединяя оба разложения, получим

$$\vec{\mathcal{E}}(t,\vec{r})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\iiint d\vec{k}\cdot\vec{E}_{00}(\omega,\vec{k})\cdot e^{i\left(\vec{k},\vec{r}-\omega t\right)}$$

Здесь $\vec{E}_{00}(\omega,\vec{k})\cdot e^{i\left(\vec{k},\vec{r}-\omega t\right)}$ — плоская монохроматическая волна.

Любую функцию $\vec{\mathcal{E}}(t,\vec{r})$ можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн, даже если эта функция не удовлетворяет волновому уравнению.

Разложение любой функции — это плоские волны с любыми фазовыми скоростями $V_\phi=\frac{\omega}{k}$.

Разложение решения волнового уравнения — плоские волны с одной и той же фазовой скоростью $V_\phi=\frac{\omega}{k}$, которая входит в волновое уравнение в виде коэффициента $\frac{1}{V_\phi^2}$. Это подробнее обсуждалось нами на первой лекции.

Для световых волн $V_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ => $\omega = \frac{kc}{n}$.

Следовательно, $\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) = 0$ при $\omega \neq \frac{kc}{n}$.

Тогда $\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) \sim \delta\left(\omega - \frac{kc}{n}\right)$, где $\delta(x)$ — дельта функция Дирака.

С учетом того, что мы рассматриваем разложение по частотам ω обоих знаков, $\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right)$ будет иметь следующий вид:

$\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) = \delta\left(\omega - \frac{kc}{n}\right) \cdot \vec{E}_1\left(\vec{k}\right) + \delta\left(\omega + \frac{kc}{n}\right) \cdot \vec{E}_2\left(\vec{k}\right)$, где $k > 0$ — волновое число.

Из вещественности светового поля $\vec{\mathcal{E}}\left(t,\vec{r}\right)$ следует

$\vec{E}_0\left(-\omega,\vec{r}\right) = \vec{E}_0^*\left(\omega,\vec{r}\right)$ => $\vec{E}_{00}\left(-\omega,-\vec{k}\right) = \vec{E}_{00}^*\left(\omega,\vec{k}\right)$ =>

$\vec{E}_2\left(\vec{k}\right) = \vec{E}_1^*\left(-\vec{k}\right)$, тогда

$$\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) = \delta\left(\omega - \frac{kc}{n}\right) \cdot \vec{E}_1\left(\vec{k}\right) + \delta\left(\omega + \frac{kc}{n}\right) \cdot \vec{E}_1^*\left(-\vec{k}\right).$$

Подставим это выражение в разложение

$$\vec{\mathcal{E}}\left(t,\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \iiint d\vec{k} \cdot \vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) \cdot e^{i\left(\vec{k},\vec{r}-\omega t\right)} = \mathrm{Re}\int\limits_{0}^{+\infty} d\omega \iiint d\vec{k} \cdot \vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) \cdot e^{i\left(\vec{k},\vec{r}-\omega t\right)}$$

и, беря интеграл по положительным частотам, получим

$\vec{\mathcal{E}}\left(t,\vec{r}\right) = \mathrm{Re}\iiint \vec{E}_1\left(\vec{k}\right) \cdot e^{i\left(\vec{k},\vec{r}-\omega t\right)} \cdot d\vec{k}$, где $\vec{E}_1\left(\vec{k}\right)$ следует искать из

$\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) = \delta\left(\omega - k\frac{c}{n}\right) \cdot \vec{E}_1\left(\vec{k}\right) + \delta\left(\omega + k\frac{c}{n}\right) \cdot \vec{E}_1^*\left(-\vec{k}\right)$, где $\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right)$ из

$$\vec{E}_{00}\left(\omega,\vec{k}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(2\pi\right)^3} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot \iiint d\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}\left(t,\vec{r}\right) \cdot e^{-i\left(\vec{k},\vec{r}-\omega t\right)}.$$