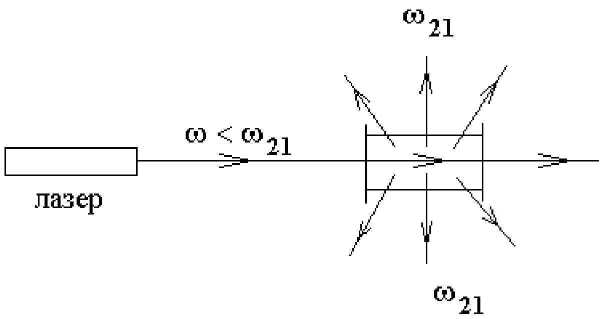
Факультатив. Лазерное охлаждение.

Оптическая схема опыта. В кювету с газом светят лазером, и газ охлаждается:



.

Излучение лазера с частотой ω пропускают через кювету с газом, который имеет линию поглощения несколько большей частоты ω_{21}, чем частота излучения лазера ω, так что разность частот не превышает доплеровской ширины спектральной линии $2kU$. Здесь $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $U = \sqrt{\dfrac{2k_Б T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость атомов газа.

Свет частично поглощается средой, переводя атомы среды в возбужденное состояние. Некоторые атомы возвращаются на нижний уровень энергии в результате спонтанного излучения, которое происходит равновероятно по всем направлениям.

Если после поглощения кванта света атомом газа безизлучательный переход на другие уровни энергии атома маловероятен, то газ охлаждается.

Рассмотрим два эквивалентных объяснения этого явления: объяснение через рассмотрение импульса и объяснение через рассмотрение энергии.

Рассмотрение через импульс.

Свет резонансно поглощается атомами, в системе отсчета которых частота света совпадает с частотой поглощающего перехода ω_{21}. С учетом продольного эффекта Доплера частота света в системе отсчета атома ω' отличается от частоты света ω в лабораторной системе отсчета:

$\omega' = \omega - kV_z$,

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, V_z — проекция скорости атома на направление лазерного луча.

Свет резонансно поглощается атомами, для которых

$\omega' = \omega_{21}$ => $\omega - kV_z = \omega_{21}$ =>

$V_z = \dfrac{\omega - \omega_{21}}{k} < 0$.

Проекция скорости атомов на луч отрицательная, так как $\omega < \omega_{21}$ по условию эксперимента. Отрицательная проекция скорости означает, что атомы поглощающие свет летят навстречу лучу.

Каждый поглощенный фотон имеет небольшой импульс

$$p = \frac{\hbar\omega}{c},$$

который переходит к поглощающему свет атому.

При поглощении импульса фотона проекция скорости V_z атома на луч уменьшается по модулю, так как атом летел навстречу поглощенному фотону. Следовательно, уменьшается модуль импульса атома.

При излучении атом тоже испытывает отдачу от излучаемого фотона, но спонтанное излучение изотропно, поэтому при излучении фотона импульс атома увеличивается и уменьшается равновероятно.

В среднем в результате каждого акта поглощения и спонтанного излучения импульс атома уменьшается. Кинетическая энергия связана с импульсом атома соотношением $E = \frac{p^2}{2m}$, а энергия связана с температурой $E = \frac{3}{2}kT$. Уменьшение импульса означает уменьшение энергии и охлаждение.

Рассмотрим теперь объяснение лазерного охлаждения через рассмотрение энергии.

По условию эксперимента частота падающего света ω меньше частоты поглощающего перехода ω_{21}, тогда $\hbar\omega < \hbar\omega_{21}$, и получаемая атомом энергия падающего фотона меньше энергии, которую атом теряет при спонтанном излучении фотона.

Атом получает меньше энергии при поглощении, чем отдает при излучении. Следовательно, среда теряет энергию и охлаждается.

Рассмотрим этот процесс чуть подробнее.

В своей собственной системе отсчета атом поглощает и излучает свет одной и той же частоты ω_{21}, но в лабораторной системе отсчета частоты оказываются разными.

Поглощают свет атомы, которые летят навстречу лучу. При переходе из лабораторной системы отсчета в систему отсчета атома частота поглощаемого света увеличивается от ω до ω_{21}. Спонтанное излучение света равновероятно по направлениям, поэтому доплеровский сдвиг излучаемого кванта при возвращении в лабораторную систему отсчета равновероятно увеличивает и уменьшает частоту света. В среднем при излучении доплеровского сдвига частоты не происходит.

Предел охлаждения определяется тем, что атом при поглощении кванта света может остановиться, испытав отдачу от фотона. Тогда при излучении атом снова испытает отдачу и вернется к прежнему значению скорости. В таком случае охлаждения уже не будет.

Приравняем импульс фотона к импульсу атома

$$\begin{cases} p = \dfrac{h\nu}{c} \\ \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{3}{2}k_Б T \end{cases} \qquad => \qquad T = \frac{h^2\nu^2}{3k_Б mc^2} \approx \frac{1}{40000 \cdot A} \text{ (K)}.$$

Здесь T — предел лазерного охлаждения в Кельвинах, A — вес атома в атомных единицах, в которых атомный вес атома водорода равен единице.

$U = \sqrt{\dfrac{2k_Б T}{m}} \approx \dfrac{0.6}{\sqrt{A}}$ (м/с) — наиболее вероятная скорость при предельном охлаждении, выраженная в метрах в секунду; A — это вес атома в атомных единицах.

Дальнейшее охлаждение возможно по принципу открытого стакана с водой. Открытый стакан с водой имеет температуру ниже комнатной температуры, так как только молекулы с наибольшими энергиями способны преодолеть притяжение других молекул воды и вылететь с поверхности воды. При этом для остающихся в стакане молекул средняя энергия уменьшается.

Роль стакана при лазерном охлаждении играет система потенциальных ям. Для создания системы потенциальных ям используются три пары лазеров, которые светят навстречу друг другу по трем осям координат. Каждая пара лазеров создает стоячую световую волну, в пучности которой втягиваются атомы. Излучение лазеров далеко отстоит по частоте от линий поглощения атомов.

Втягивание атомов в пучность светового поля определяется тем, что энергия диполя в электрическом поле $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$, где величина наведенного диполя $\vec{p} = \alpha\vec{E}$. Тогда энергия наведенного диполя $W = -\alpha E^2$, или $W = -\dfrac{1}{2}\alpha E^2$ с учетом энергии запасенной упругими силами диполя. Сила, действующая на диполь $\vec{F} = -\vec{\nabla}W = \dfrac{1}{2}\alpha\vec{\nabla}\left(E^2\right)$. Градиент направлен в сторону увеличения поля E, то есть наведенные диполи втягиваются в световое поле.

Три ортогональные стоячие волны образуют решетку из потенциальных ям. В этих ямах скапливаются охлажденные лазером атомы. В каждой потенциальной яме остается много атомов. Атомы сталкиваются друг с другом, и когда один из них случайно получает достаточно большую энергию, он вылетает из потенциальной ямы. Такие вылетевшие атомы откачиваются насосом. По мере испарения горячих атомов из потенциальных ям, оставшиеся атомы становятся все холоднее. Таким образом, удается практически остановить атомы в потенциальных ямах и довести их тепловые скорости до единиц миллиметров в секунду.

Факультатив. Дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига.

Пусть единственное окно в комнате закрыто узкополосным светофильтром, который пропускает свет только с частотой ω. Строго монохроматический свет обязан быть по времени от минус до плюс бесконечности. Это с одной стороны.

С другой стороны, если свет за окном в какой-то момент включить, то в комнате свет не может появиться раньше этого момента независимо от того, насколько узкополосный светофильтр закрывает окно.

Это условие накладывает связь на функции $\aleph(\omega)$ и $n'(\omega)$, которая должна выполняться независимо от природы светофильтра.

И действительно, пусть $\tilde{\tau}(\omega)$ — комплексный амплитудный коэффициент пропускания светофильтра. Тогда комплексные амплитуды света на входе и на выходе светофильтра связаны соотношением:

$$\tilde{E}_{0_{вых}}(\omega) = \tilde{\tau}(\omega) \cdot \tilde{E}_{0_{вх}}(\omega)$$

Рассмотрим бесконечно короткую вспышку света перед светофильтром в виде δ-функции Дирака:

$$E_{вх}(t) = \delta(t).$$

Ее Фурье-образ — комплексная амплитуда света на входе светофильтра:

$$\tilde{E}_{0_{вх}}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{вх}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\pi} \cdot e^{i\omega 0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{\pi}.$$

Комплексная амплитуда на выходе светофильтра:

$$\tilde{E}_{0_{вых}}(\omega) = \tilde{\tau}(\omega) \cdot \tilde{E}_{0_{вх}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \tilde{\tau}(\omega).$$

Тогда напряженность светового поля на выходе светофильтра, как функция времени имеет следующий вид:

$$E_{вых}(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{0_{вых}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty} \tilde{E}_{0_{вых}}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \tilde{\tau}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty} \tilde{\tau}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right).$$

До момента времени $t = 0$, в который произошла вспышка света перед фильтром, света после светофильтра быть не должно $E_{вых}(t) = 0$. Следовательно, при $t < 0$:

$$\mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty} \tilde{\tau}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) = 0.$$

Если светофильтр представляет собой однородную среду толщиной z_0, то амплитудный коэффициент пропускания такой среды имеет вид:

$$\tilde{\tau}(\omega)=e^{-\frac{\aleph(\omega)\cdot z_0}{2}}\cdot e^{i\frac{n'(\omega)\cdot\omega}{c}z_0}.$$

Тогда получим

$$\operatorname{Re}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{\aleph(\omega)\cdot z_0}{2}}\cdot e^{i\frac{n'(\omega)\cdot\omega}{c}z_0}\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)=0 \text{ при } t<0.$$

Этим интегральным соотношением связаны коэффициент поглощения любой среды $\aleph(\omega)$ и ее вещественный показатель преломления $n'(\omega)$.

В свою очередь, с величинами $n'(\omega)$ и $\aleph(\omega)=2\frac{\omega}{c}n''(\omega)$ связаны вещественная $\alpha'(\omega)$ и мнимая $\alpha''(\omega)$ части комплексной поляризуемости атома. Эта связь оказывается проще для малой концентрации атомов $\tilde{n}=1+2\pi N\tilde{\alpha}$ или $n'+in''=1+2\pi N\cdot(\alpha'+i\alpha'')$.

Из вещественности $P(t)$ и $E(t)$ можно доказать, что

$$\begin{cases}\alpha'(-\omega)=\alpha'(\omega)\\ \alpha''(-\omega)=-\alpha''(\omega)\end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int\frac{\alpha'(\omega)+i\alpha''(\omega)}{\omega-\omega_0}d\omega$, в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерсу и Кронигу, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega)\xrightarrow[\omega\to\infty]{}0$, удалось вычислить интеграл по вычетам. В результате, объединяя интегралы по положительным и отрицательным частотам, им удалось выразить из интегрального соотношения одну функцию $\alpha'(\omega)$ через другую $\alpha''(\omega)$ и наоборот:

$$\begin{cases}\alpha'(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\cdot\mathcal{P}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha''(\omega_0)\cdot\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot d\omega_0\\ \alpha''(\omega)=-\dfrac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha'(\omega_0)}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot d\omega_0\end{cases}$$ — соотношения Крамерса-Кронига.

Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения.