Экзамен. Рэлеевское рассеяние света в мутной среде.

Рэлеевское рассеяние света — это рассеяние, которое удовлетворяет двум условиям: во-первых, при рассеянии не изменяется частота света (упругое рассеяние), а во-вторых, рассеяние происходит на объектах, размеры которых меньше длины волны света. Неупругое рассеяние света — это комбинационное рассеяние (рассеяние Рамана), а рассеяние на больших частицах — это рассеяние Ми.

Упругое рассеяние света на частицах состоит в отражении, преломлении и дифракции света. Когда размер частицы меньше $\frac{\lambda}{2}$, разделить эти три вклада невозможно. Упругое рассеяние света большим телом — это рассеяние поверхностью твердого или жидкого тела. Другими словами — это отражение света от неровностей поверхности. Оба вида рассеяния велики только в том случае, если размер рассеивающих неровностей больше, чем $\frac{\lambda}{2}$.

Рэлеевское рассеяние в мутной среде вызвано тем, что частица под действием света приобретает осциллирующий дипольный момент, который излучает во все стороны, а не только в направлении падающей световой волны.

Примеры рассеяния света в мутной среде — это рассеяние света в тумане или в молоке.

Рассмотрим рассеяние света на водных каплях тумана в воздухе. Для простоты будем считать, что радиус капли r_0 мал по сравнению с длиной волны света λ. На самом деле свет хорошо рассеивается как раз при обратном неравенстве, но аналитическое решение задачи в этом случае гораздо сложнее.

Интенсивность рассеянного света можно найти в результате рассмотрения следующей логической цепочки: $\vec{E} \to \vec{E}' \to \vec{P} \to \vec{p} \to E_\theta \to I(\theta)$.

Здесь:

$\vec{E}$ — поле падающей световой волны,

$\vec{E}'$ — световое поле внутри капли воды,

$\vec{P}$ — наведенная светом поляризация внутри капли воды,

$\vec{p}$ — осциллирующий дипольный момент всей капли воды,

E_θ — поле излучения этого диполя,

$I(\theta)$ — интенсивность света излучения диполя в зависимости от угла рассеяния θ.

Во всех частях капли малого размера $r_0 \ll \lambda$ световое поле почти одинаково без фазового сдвига, связанного со временем распространения.

Поле внутри водяного шара $\vec{E}'$ отличается от внешнего поля $\vec{E}$ на поле поляризованного шара внутри самого шара $\left(-\frac{4}{3}\pi\vec{P}\right)$:

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Поле поляризованного шара рассматривается в курсе электричества.

Факультативная вставка.

Заметим, что выражение $\vec{E}'=\vec{E}-\frac{4}{3}\pi\vec{P}$ похоже на другое выражение $\vec{E}'=\vec{E}+\frac{4}{3}\pi\vec{P}$, где $\vec{E}'$ — поле, действующее на молекулу; $\vec{E}$ — среднее поле в среде неполярного диэлектрика; $\vec{P}$ — поляризация диэлектрика.

Выражения похожи по форме, но не связаны по содержанию.

Конец факультативной вставки.

Поляризация среды $\vec{P}$ определяется электрическим полем $\vec{E}'$ внутри среды:

$$\vec{P}=\chi\vec{E}' \qquad =>$$

$$\vec{E}'=\vec{E}-\frac{4}{3}\pi\chi\vec{E}' \qquad =>$$

$\vec{E}'=\dfrac{\vec{E}}{1+\frac{4}{3}\pi\chi}$ — световое поле внутри капли воды. Тогда

$\vec{P}=\chi\vec{E}'=\dfrac{\chi}{1+\frac{4}{3}\pi\chi}\vec{E}$ — поляризация среды в капле воды.

Подставим сюда выражение для диэлектрической восприимчивости среды χ через диэлектрическую проницаемость ε.

$$\varepsilon=1+4\pi\chi \qquad => \qquad \chi=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}$$

И получим

$$\vec{P}=\frac{\chi}{1+\frac{4}{3}\pi\chi}\vec{E}=\frac{\frac{\varepsilon-1}{4\pi}}{1+\frac{\varepsilon-1}{3}}\vec{E} \qquad =>$$

$\vec{P}=\dfrac{3}{4\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\vec{E}$ — наведенная светом поляризация внутри капли воды.

$\vec{p}=\vec{P}V=\dfrac{3}{4\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\vec{E}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r_0^3$ — осциллирующий дипольный момент всей капли воды. Откуда получаем

$$\vec{p}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot r_0^3\cdot\vec{E}.$$

Рассмотрим поле диполя осциллирующего вдоль оси z:

$E_{\theta'}(t,\vec{r})=B_{\varphi}(t,\vec{r})=\dfrac{\ddot{p}_z\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c^2r}\cdot\sin(\theta')$, где θ' и φ — углы сферической системы координат. Чуть позднее обозначение θ без штриха нам понадобится для другого угла.

Здесь векторы $E_{\theta'}$ и $\ddot{p}_z$ связаны формулой в разные моменты времени, но для нас в дальнейшем это будет несущественно.

Для монохроматического светового поля дипольный момент рассматриваемой капли воды гармонически осциллирует с частотой светового поля ω: $p = p_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. Тогда $\ddot{p} = -\omega^2 p$. Подставим это в выражение для $E_{\theta'}$ и получим:

$$E_{\theta'} = -\frac{\omega^2 p}{c^2 r} \cdot \sin(\theta').$$

Подставим сюда $\vec{p} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot \vec{E}$ и получим

$$E_{\theta'} = -\frac{\omega^2}{c^2 r} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot E \cdot \sin(\theta'),$$

где E — напряженность поля падающей волны, θ' — угол между направлением рассеяния света (направлением излучения диполя $\vec{p}$) и направлением самого диполя $\vec{p}$, которое совпадает с направлением вектора $\vec{E}$ падающей на каплю световой волны.

Пусть капля воды висит в воздухе, для которого показатель преломления близок к единице. Тогда связь интенсивности рассеянного света с его напряженностью имеет следующий вид:

$$I(\theta') = \frac{cn}{4\pi\mu} \left\langle E_{\theta'}^2 \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi} \left\langle E_{\theta'}^2 \right\rangle_t.$$

Подставим сюда $E_{\theta'} = -\dfrac{\omega^2}{c^2 r} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot E \cdot \sin(\theta')$ и получим

$$I(\theta') = \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot \sin(\theta') \right)^2 \cdot \frac{c}{4\pi} \left\langle E^2 \right\rangle_t.$$

Здесь $\dfrac{c}{4\pi} \left\langle E^2 \right\rangle_t = I_0$ — интенсивность падающей на каплю световой волны. Тогда

$$I(\theta') = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \sin^2(\theta') \cdot I_0.$$

Подставим сюда $\varepsilon = n^2$ и получим

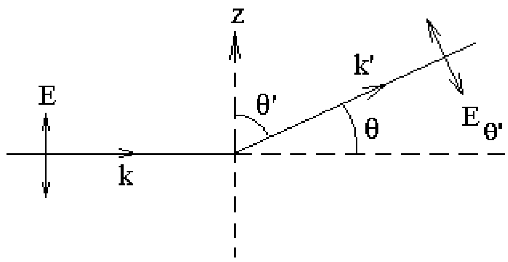
$$I(\theta') = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \sin^2(\theta') \cdot I_0.$$

Обычно рассматривают рассеяние естественного неполяризованного света. В таком случае нужно усреднить интенсивность рассеянного света по разным значениям угла θ' между направлением рассеяния и направлением колебания диполя. Дело в том, что в неполяризованном свете направление колебаний диполя изменяется случайным образом.

Получим теперь интенсивность рассеянного света, как функцию от другого угла — от угла рассеяния θ.

Рассмотрим рассеяние на угол θ раздельно для двух ортогональных поляризаций падающей световой волны. Для неполяризованного света падающей волны каждая поляризация будет иметь интенсивность $\frac{I_0}{2}$ равную половине интенсивности неполяризованной волны.

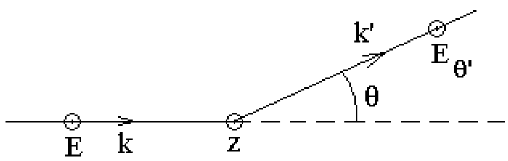
Сначала рассмотрим рассеяние света, поляризация которого лежит в плоскости волновых векторов падающей и рассеянной волн.



Из рисунка видно, что $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$ => $\sin^2(\theta') = \cos^2(\theta)$ =>

$$I_1(\theta) = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \sin^2(\theta') \cdot \frac{I_0}{2} = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \frac{I_0}{2}.$$

Рассмотрим теперь поляризацию падающей волны перпендикулярную плоскости рассеяния света.



В этом случае направление колебаний диполя перпендикулярно плоскости рисунка, и угол θ' между направлением диполя и направлением рассеяния равен $\frac{\pi}{2}$.

$\sin^2(\theta') = 1$ =>

$$I_2(\theta) = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \frac{I_0}{2}.$$

Интенсивность рассеянного света равна сумме интенсивностей рассеянных волн в двух поляризациях:

$I(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta)$.

Окончательно получаем интенсивность I рассеяния неполяризованного света в зависимости от угла рассеяния θ:

$$I(\theta)=\frac{\omega^4}{c^4 r^2}\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\cdot r_0^6\cdot\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}\cdot I_0.$$

Здесь r — расстояние от рассеивающей капли до точки наблюдения, n — показатель преломления капли, r_0 — радиус капли, I_0 — интенсивность падающей волны.

Проанализируем результирующую формулу.

1). $I(\theta)\sim\frac{\omega^4}{c^4}=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4$ =>

Короткие световые волны рассеиваются гораздо эффективнее, чем длинные. В результате этого при рассеянии белого света рассеивается голубой свет (голубое небо), а проходит красноватый свет (красное солнце на восходе и закате, когда свет проходит большую толщину воздушного слоя).

2). $I(\theta)\sim r_0^6$ =>

Частицы малого размера рассеивают свет гораздо меньше, чем частицы большего размера. Соответственно рассеяние света отдельными атомами очень мало.

3). Рассеянный свет частично поляризован, так как для одной поляризации $I(\theta)\sim\frac{\cos^2(\theta)}{2}I_0$, а для другой поляризации $I(\theta)\sim\frac{I_0}{2}$. Свет, рассеянный перпендикулярно падающему свету, полностью поляризован, так как в этом случае $\cos^2(\theta)=0$. Свет от неба частично поляризован, и если на небо смотреть через поляроид в направлении перпендикулярном направлению на солнце, то поворотом поляроида можно ослабить рассеянный свет.

Факультатив. Рэлеевское рассеяние света на флуктуациях плотности газа.

Рэлеевское рассеяние света — это рассеяние без изменения частоты света на объектах, размеры которых гораздо меньше длины волны. Рассмотренное в предыдущем вопросе рассеяние света в мутной среде — это тоже рэлеевское рассеяние света. Рассмотрим частный случай рэлеевского рассеяния — рассеяние света на флуктуациях плотности газа.

Голубое небо и красное солнце у горизонта — это результат рэлеевского рассеяния именно на флуктуациях плотности газа.

Рассмотрим любой малый объем газа. Плотность газа и показатель его преломления в рассматриваемом объеме случайно отличаются от средних значений этих величин. Рассеяние на этих неоднородностях мы и будем рассматривать.

Величина рассеяния зависит от того, насколько число молекул газа в рассматриваемом объеме случайно отличается от среднего значения. Чтобы оценить это отличие будем считать, что молекулы влетают в рассматриваемый объем и вылетают из него независимо друг от друга. Это справедливо, если длина свободного пробега молекул гораздо больше размеров рассматриваемого объема. На самом деле длина свободного пробега молекул воздуха при атмосферном давлении примерно 0.15 мкм, а линейные размеры рассматриваемого объема флуктуации меньше 0.25 мкм. То есть требуемое неравенство не выполнено, зато анализ будет гораздо проще.

Если молекулы влетают в объем независимо друг от друга, то число молекул в объеме подчиняется распределению Пуассона:

$p(K)=\frac{\langle K\rangle^K}{K!}\cdot e^{-\langle K\rangle}$, где $p(K)$ — вероятность того, что в объеме V окажется ровно K молекул.

Средний квадрат отклонения от среднего значения нужно вычислять по обычной формуле усреднения, как сумму произведений вероятности значения на само усредняемое значение:

$$\left\langle \left(K-\langle K\rangle\right)^2\right\rangle=\sum_{K=0}^{+\infty} p(K)\cdot\left(K-\langle K\rangle\right)^2 .$$

Подставляя сюда $p(K)=\frac{\langle K\rangle^K}{K!}\cdot e^{-\langle K\rangle}$, ряд удается просуммировать и оказывается, что средний квадрат отклонения от среднего значения для распределения Пуассона равен самому среднему значению:

$$\left\langle \left(K-\langle K\rangle\right)^2\right\rangle=\langle K\rangle .$$

Выразим интенсивность рассеяния света, полученную в предыдущем вопросе, через число молекул в объеме рассеивающей частицы.

В формуле рэлеевского рассеяния

$$I(\theta)=\frac{\omega^4}{c^4r^2}\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\cdot r_0^6\cdot\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}\cdot I_0$$

внесем изменение в соответствии с формулой Лоренц-Лорентца

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4}{3}\pi N\alpha$$

тогда

$$I(\theta)=\frac{\omega^4}{c^4r^2}\left(\frac{4}{3}\pi N\alpha\right)^2 r_0^6\,\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}I_0=\frac{\omega^4}{c^4r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3 N\right)^2\alpha^2\,\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}I_0$$

Подставим сюда объем шара $V=\frac{4}{3}\pi r_0^3$ и получим

$$I(\theta)=\frac{\omega^4\alpha^2}{c^4r^2}\cdot(NV)^2\cdot\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}\cdot I_0 .$$

Здесь N — концентрация молекул, NV — число молекул в рассматриваемом объеме.

До этого момента мы использовали формулу рассеяния света на частицах мутной среды, только преобразовали эту формулу к другому виду.

Оказывается, что для рассеяния света на флуктуациях плотности нужно в формуле рассеяния на частице мутной среды заменить

$$(NV)^2 \to NV.$$

Обозначим число молекул в рассматриваемом объеме, как

$$K \equiv NV.$$

Число молекул в рассматриваемом объеме — это величина случайная, флуктуирующая величина.

В нашем случае рассеяния света на флуктуациях рассеяние возникает только за счет отличия K от среднего значения $\langle K \rangle$. Поэтому в формуле для рассеянного света нужно заменить K^2 на $\left\langle \left(K - \langle K \rangle\right)^2 \right\rangle$.

Тогда

$$(NV)^2 = K^2 \to \left\langle \left(K - \langle K \rangle\right)^2 \right\rangle = \langle K \rangle = NV.$$

Следовательно, в формуле для интенсивности рассеянного света

$$I(\theta) = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \cdot (NV)^2 \cdot \frac{1+\cos^2(\theta)}{2} \cdot I_0$$

нужно заменить

$$(NV)^2 \to NV.$$

В результате получим

$$I(\theta) = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \cdot NV \cdot \frac{1+\cos^2(\theta)}{2} \cdot I_0.$$

Окончательную формулу запишем в следующем виде:

$$\left\langle \frac{I(\theta)}{NV} \right\rangle = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \cdot \frac{1+\cos^2(\theta)}{2} \cdot I_0.$$

Здесь $\left\langle \frac{I(\theta)}{NV} \right\rangle$ — средняя интенсивность света рассеянного одной флуктуацией, отнесенная к числу молекул в объеме флуктуации. Это интенсивность рассеянного света, приведенная к одной молекуле. Рассматривается интенсивность, рассеянная в направлении образующем угол θ с первоначальным направлением света.

Из полученной формулы видно, что интенсивность света, рассеянного как бы каждой молекулой, не зависит от размера рассеивающей свет флуктуации. То есть эту величину не нужно усреднять по всем возможным размерам флуктуаций.

Факультатив. Интерферометр Фабри-Перо.

В интерферометре Фабри-Перо наблюдается многолучевая интерференция.

Интерферометр Фабри-Перо — это лазер без усиливающей свет среды, когда остаются только два зеркала.

Зеркала в общем случае сферические, но мы рассмотрим только простейший интерферометр Фабри-Перо с двумя плоскими зеркалами и рассмотрим его очень коротко.

Пусть снаружи на интерферометр нормально падает плоская монохроматическая волна света. Каждое из зеркал имеет высокий амплитудный коэффициент отражения r_1 и r_2 и небольшой амплитудный коэффициент пропускания τ_1 и τ_2. Расстояние L между зеркалами заполнено средой с показателем преломления n.

Рассмотрим амплитуду световой волны, проходящей через интерферометр. Световая волна будет многократно проходить пространство между зеркалами, каждый раз отражаясь от одного из двух зеркал. Каждый раз волна, падающая на зеркало, будет частично проходить сквозь него. Амплитуда волны на выходе из интерферометра $\tilde{E}_{0_{вых}}$ представляет собой бесконечный ряд амплитуд вышедших сквозь только второе зеркало световых волн:

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = \tilde{E}_{0_{вх}} \tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} \tau_2 + \tilde{E}_{0_{вх}} \tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_2 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} \tau_2 +$$

$$+ \tilde{E}_{0_{вх}} \tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_2 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_2 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} \tau_2 + \ldots$$

здесь $\tilde{E}_{0_{вх}}$ — амплитуда падающей на интерферометр волны; $\tilde{E}_{0_{вх}} \tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} \tau_2$ — амплитуда волны, прошедшей интерферометр без отражений; $\Delta = nL$ — оптическая длина пути между зеркалами.

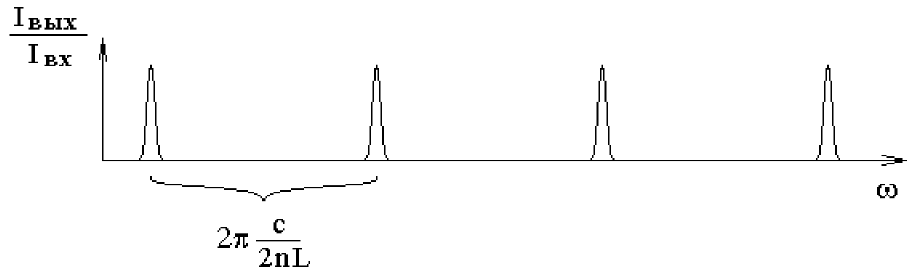
Ряд представляет собой геометрическую прогрессию и легко суммируется:

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = \frac{\tilde{E}_{0_{вх}} \tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} \tau_2}{1 - r_1 r_2 e^{4\pi i\frac{\Delta}{\lambda}}}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды:

$$I_{вых} = I_{вх} \left| \frac{\tau_1 \tau_2}{1 - r_1 r_2 e^{4\pi i\frac{\Delta}{\lambda}}} \right|^2.$$

График этой зависимости имеет следующий вид:



Чем выше коэффициенты отражения зеркал, тем уже частотные пики пропускания света. В лазере потери зеркал на пропускание компенсируются усилением лазерной среды, и пики становятся бесконечно узкими — это продольные моды излучения лазера.

Заметим, что, если угол α падения света на интерферометр отличен от нуля, то оптическая разность хода волны, которая не отражается от зеркал, и волны, которая отражается от каждого из зеркал по одному разу, равна $2\Delta = 2nL \cdot \cos(\alpha)$, как и при отражении света от плоскопараллельной пластинки, а не $\frac{2nL}{\cos(\alpha)}$, как могло бы показаться.

Основными характеристиками интерферометра Фабри-Перо являются интервал свободной дисперсии и резкость.

Интервал свободной дисперсии — это частотное расстояние между пиками пропускания или какой участок спектра можно рассмотреть без наложения пиков пропускания разных порядков: $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$. Если n — показатель преломления среды между зеркалами, то $\Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{2nL}$, где λ_0 — длина волны света снаружи от интерферометра. Соответственно $\Delta\nu = \frac{c}{2nL}$.

Резкость интерферометра Фабри-Перо R — это отношение интервала свободной дисперсии $\Delta\lambda$ к ширине на полувысоте пика пропускания $\delta\lambda$. $R \equiv \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}$, где r_1 и r_2 — амплитудные коэффициенты отражения зеркал интерферометра.