Факультатив. Частные решения волнового уравнения (продолжение).

Разделим это равенство на произведение TR и получим:

$$\frac{\Delta R}{R}-\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\ddot{T}}{T}=0.$$

Здесь первое слагаемое зависит только от радиус-вектора $\vec{r}$, а второе — только от времени t. Это возможно только в том случае, если оба слагаемых равны одной и той же константе.

Обозначим эту константу, как $\left(-k^2\right)$, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta R}{R}=-k^2\\ \dfrac{1}{V^2}\cdot\dfrac{\ddot{T}}{T}=-k^2\end{cases} \quad => \quad \begin{cases}\Delta R+k^2R=0\\ \ddot{T}+\left(kV\right)^2T=0\end{cases}.$$

В случае, если константа $\left(-k^2\right)$ окажется положительной, будем считать, что k — чисто мнимое число. Так при рассмотрении вопроса о полном внутреннем отражении, одна из проекций вектора $\vec{k}$ действительно окажется мнимой.

Для пространственной части решения волнового уравнения получим

$\Delta R+k^2R=0$ — уравнение Гельмгольца.

А для временной части получим

$\ddot{T}+\omega^2T=0$ — уравнение гармонических колебаний, где для краткости введено обозначение $\omega\equiv kV$.

Комплексные решения этих уравнений выглядят проще, чем вещественные решения. Поэтому обычно ищут комплексные решения, а затем рассматривают вещественную часть комплексного решения. Для линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть общего комплексного решения является общим вещественным решением.

Будем комплексные величины обозначать волной над соответствующей величиной, тогда $\tilde{T}$ в наших обозначениях — комплексная величина, а T — вещественная величина.

Общее комплексное решение уравнения гармонических колебаний имеет следующий вид:

$\tilde{T}=\tilde{T}_{01}e^{i\omega t}+\tilde{T}_{02}e^{-i\omega t}$, где $\tilde{T}_{01}$ и $\tilde{T}_{02}$ — комплексные произвольные константы интегрирования.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{T}=\tilde{T}_0e^{-i\omega t}$, где ω принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками.

Знак минус в показателе мнимой экспоненты — это вопрос соглашения. $\tilde{T}_0$ — произвольная комплексная константа интегрирования, различная для положительного и отрицательного значений ω.

Вернемся теперь к рассмотрению пространственной части решения волнового уравнения — к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta R(\vec{r}) + k^2 R(\vec{r}) = 0.$$

Продолжим поиск частных решений волнового уравнения методом разделения переменных. Будем теперь искать решение уравнения Гельмгольца методом разделение переменных в декартовых координатах. Ищем решение уравнения Гельмгольца для пространственной части решения волнового уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной координаты:

$$R(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Подставим $R = XYZ$ в уравнение Гельмгольца и получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(XYZ) + k^2 XYZ = 0.$$

Вынесем за знак производной по x-координате функции Y и Z, величины которых не зависят от переменной x. Аналогично поступим с производными по y и z. Тогда получим:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2 XYZ = 0,$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная в каждом случае по своей переменной величине.

Разделим это равенство на произведение функций XYZ и получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2,$$

где первое слагаемое зависит только от x-координаты, второе — только от y, третье — только от z. Это возможно только в том случае, если каждое из этих слагаемых — константа. Обозначим эти константы, как $\left(-k_x{}^2\right)$, $\left(-k_y{}^2\right)$, $\left(-k_z{}^2\right)$. Тогда

$$k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2 = k^2,$$

и величины k_x, k_y, k_z можно рассматривать, как проекции некоторого вектора $\vec{k}$.

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -k_x{}^2 \\ \dfrac{Y''}{Y} = -k_y{}^2 \\ \dfrac{Z''}{Z} = -k_z{}^2 \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее первое из трех уравнений.

$\frac{X''}{X} = -k_x^2$ => $X'' + k_x^2 X = 0$ — это уравнение гармонических колебаний только не от времени, а от пространственной координаты x.

$\tilde{X} = \tilde{X}_{01} e^{ik_x x} + \tilde{X}_{02} e^{-ik_x x}$ — общее комплексное решение этого уравнения.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{X} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x}$, где k_x принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками. То, что выбрано слагаемое без минуса в экспоненте — это вопрос соглашения.

Аналогично:

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} \end{cases}.$$

Подставим $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ в $\tilde{R}$ и получим:

$$\tilde{R} = \tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x} \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} =$$

$$= \tilde{X}_0 \tilde{Y}_0 \tilde{Z}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} = \tilde{R}_0 e^{i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)} = \tilde{R}_0 e^{i\left(\vec{k}, \vec{r}\right)}$$

— это частное решение уравнения Гельмгольца.

Вернемся к решению волнового уравнения $\Delta A - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$:

$$\tilde{A}\left(t, \vec{r}\right) = \tilde{R}\tilde{T} = \tilde{R}_0 e^{i\left(\vec{k}, \vec{r}\right)} \cdot \tilde{T}_0 e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t\right)},$$

где $\tilde{A}_0$ — произвольная комплексная константа интегрирования.

$\tilde{A} = \tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t\right)}$ — частное комплексное решение волнового уравнения в виде плоских монохроматических волн.

То, что эта волна плоская, будет видно из анализа решения в последующих вопросах. Монохроматическая волна — это волна, в каждой пространственной точке которой колебания происходят только на одной частоте ω. Напомним, что величины k и ω не являются независимыми, так как произведение kV было нами обозначено, как $\omega = kV$, где $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — параметр волнового уравнения $\Delta A - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$.

Есть причина, по которой решение в виде плоских монохроматических волн играет большую роль в оптике.

Дело в том, что с помощью преобразования Фурье по времени и координатам можно любую функцию этих переменных разложить по плоским монохроматическим волнам, если только функция достаточно быстро спадает на временных и пространственных бесконечностях.

Любое явление, такое как отражение, преломление, рассеяние, поглощение света, можно сначала рассмотреть для плоской монохроматической волны, а затем для любого света, как суперпозиции плоских волн.

Есть еще одна причина, по которой плоские монохроматические волны играют большую роль в оптике.

Взаимодействие любой световой волны с веществом с хорошей точностью такое же, как и взаимодействие плоской световой волны. Это справедливо в том случае, если радиусы кривизны поверхности равных фаз световой волны достаточно велики. Велики по сравнению с чем? Есть два параметра с размерностью длины — это длина волны и размер атома. Характерный размер атома составляет десятые доли нанометра, что в тысячу раз меньше длины волны света, а саму длину волны света в оптике обычно рассматривают, как малый параметр по сравнению с геометрическими размерами предметов.

Другими словами, если рассмотреть маленький объем, линейные размеры которого гораздо меньше радиусов кривизны поверхности равных фаз, то в этом объеме волну можно считать почти плоской.

Это позволяет рассматривать отражение, преломление, поглощение и рассеяние света на примере плоской световой волны, так как всегда можно будет выбрать достаточно малый объем, в котором световую волну можно будет считать почти плоской и рассматривать отражение, преломление, поглощение или рассеяние света в этом малом объеме.

Плоская симметрия решений связана с тем, что в уравнении Гельмгольца мы разделяли переменные в декартовой системе координат.

Если при решении уравнения Гельмгольца разделять переменные в цилиндрической системе координат, то получатся решения волнового уравнения в виде цилиндрических волн. Интересно, что среди этих волн есть волны, которые бегут вдоль оси и одновременно вокруг нее. В связи с этим у фотона образуется так называемый орбитальный угловой момент:

http://igorivanov.blogspot.ru/2011/04/oam.html

Заметим, что фотон с орбитальным угловым моментом может иметь одну частоту, то есть соответствовать монохроматическому свету. В таком случае через промежуток времени равный периоду волны поверхность равных фаз перейдет сама в себя. Ясно, что далеко от выделенной оси поверхность равных фаз сместится на длину волны, тогда и во всем пространстве она сместится на длину волны вдоль выделенной оси. Около выделенной оси направление движения волны перпендикулярное поверхности равных фаз составляет заметный угол с осью. В результате окажется, что даже в вакууме скорость световой волны отличается от константы c и равна константе c, умноженной на косинус угла между выделенной осью и направлением движения волны.

Если разделять переменные в сферической системе координат, то получаться сферические волны; если в трехмерной эллиптической системе —

гауссовы пучки, похожие на лазерные пучки лучей, которые мы кратко рассмотрим позднее.

Экзамен. Параметры плоской монохроматической волны.

$\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ — плоская монохроматическая волна в комплексной форме.

Если эту плоскую монохроматическую волну подставить в волновое уравнение $\Delta\tilde{A} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = 0$, то оно превращается в тождество при условии $\omega = kV$. Результат подстановки является доказательством того, что рассматриваемая плоская монохроматическая волна является решением волнового уравнения.

Можно доказать, что для любого линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Тогда $\mathrm{Re}\left(\tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right)$ — плоская монохроматическая волна в вещественной форме, она является решением волнового уравнения при условии $\omega = kV$.

Величину $\tilde{A}_0$ называют комплексной амплитудой волны,

Если представить величину комплексной амплитуды $\tilde{A}_0$, как комплексное число в экспоненциальной форме $\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}$, то

A_0 — вещественная амплитуда волны.

φ_0 — начальная фаза волны.

$$\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = A_0 e^{i\varphi_0} e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = A_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)} =$$

$$= A_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)} e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)} e^{-i\omega t}$$

здесь $\tilde{A}_0 e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}$ — комплексная амплитуда колебаний в точке с радиус-вектором $\vec{r}$,

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$ — начальная фаза колебаний в точке с радиус-вектором $\vec{r}$,

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)$ — фаза волны,

ω — циклическая частота волны, которую для краткости обычно будем просто называть частотой волны.

$\omega = 2\pi\nu$, где ν — частота волны.

$\nu = \frac{1}{T}$, где T — период волны.

$\vec{k}$ — волновой вектор, как будет показано в следующем вопросе, он направлен перпендикулярно поверхности равных фаз.

$k \equiv \left|\vec{k}\right|$ — волновое число.

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ — пространственный период волны, который называют длиной волны.

$\dfrac{1}{\lambda}$ — пространственная частота волны.

Тогда $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — циклическая пространственная частота волны,

k_x, k_y, k_z — циклические пространственные частоты вдоль осей x, y, z.

<u>Экзамен. Фазовая скорость волны.</u>

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — единичные векторы вдоль декартовых осей координат.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну. Направим ось z вдоль вектора $\vec{k}$. Тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ => $k_x = k_y = 0$ => $k_z = \left|\vec{k}\right| = k$.

Тогда $\left(\vec{k}, \vec{r}\right) = k_x x + k_y y + k_z z = kz$ =>

$\left(\left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0\right) = kz - \omega t + \varphi_0$ — фаза волны.

Зафиксируем момент времени t и приравняем фазу к константе. Получающееся при этом уравнение относительно пространственных координат оказывается уравнением поверхности равных фаз или уравнением поверхности постоянной фазы:

$\left.\begin{array}{l} k\,z - \omega t + \varphi_0 = const \\ t = const \end{array}\right\}$ => $z = const$ — уравнение поверхности равных фаз или фазовой поверхности. Поверхность равных фаз называют еще фронтом волны.

Поверхность равных фаз $z = const$ — это плоскость, следовательно, волна $\tilde{A}\left(t, \vec{r}\right) = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t\right)}$ действительно плоская. Поверхность $z = const$ перпендикулярна единичному вектору $\vec{e}_z$, направленному вдоль оси z. Вектор $\vec{e}_z$ совпадает по направлению с вектором $\vec{k}$ (направление оси z так было выбрано). Следовательно, для плоской волны фронт волны всегда перпендикулярен волновому вектору $\vec{k}$.

Неплоскую волну в малом объеме можно считать почти плоской, если радиусы кривизны фронта гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Тогда направление, перпендикулярное поверхности равных фаз, можно считать направлением волнового вектора и для неплоской волны.

Найдем теперь фазовую скорость волн, под которой будем понимать скорость перемещения поверхности равной фазы, фазы равной некоторой постоянной величине.

Ось z опять направим вдоль вектора $\vec{k}$ и продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз $kz - \omega t + \varphi_0 = const$, в котором координату z будем считать функцией времени t.

$$kz - \omega t + \varphi_0 = const \qquad \Big| \qquad \frac{d\,\cdot}{dt} \quad =>$$

$$k\frac{dz}{dt} - \omega\frac{dt}{dt} = 0 \quad => \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$ — фазовая скорость, обозначим ее, как $V_ф$, тогда

$V_ф = \dfrac{\omega}{k}$, что справедливо для плоской волны любой природы, не только для световой волны.

Поверхность равных фаз движется вдоль оси z, следовательно, туда же направлена фазовая скорость и с учетом $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ получаем

$$\vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{k}.$$

Напомним, что при поиске решения волнового уравнения мы для краткости ввели обозначение $\omega \equiv kV$. Подставляя его в формулу для фазовой скорости $V_ф = \dfrac{\omega}{k}$, получим $V_ф = V$.

Как было показано в вопросе "Световые волны в прозрачной изотропной среде" $V = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Тогда фазовая скорость электромагнитных волн равна

$$V_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Из этого равенства можно найти величину показателя преломления n. По определению показателя преломления $V_ф = \dfrac{c}{n}$. Сравнивая это равенство с равенством $V_ф = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, получаем

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

В оптике $\mu \approx 1 \quad => \quad n \approx \sqrt{\varepsilon}$.

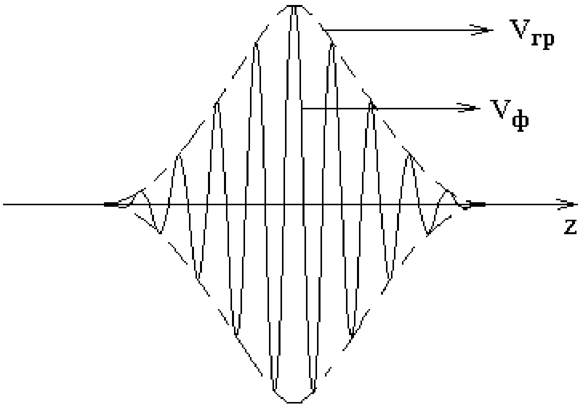
Обычно в оптике $n > 1$ и соответственно $V_ф < c$. Однако, возможно выполнение условий $0 < n < 1$ и $V_ф > c$. Наконец, в некоторых экзотических ситуациях фазовая скорость может оказаться даже отрицательной величиной. Подробнее смотрите работу:

Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ. // УФН. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517-526.

Такие вещества называются метаматериалами:
http://ru.wikipedia.org/wiki/Метаматериал

Экзамен. Групповая скорость волн.

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет огибающую — относительно медленную функцию координат и времени, и имеет заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды, которую еще называют несущей.



Групповая скорость $V_{гр}$ — это скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость $V_{ф}$ — это скорость движения заполнения светового импульса.

Групповая скорость отличается от фазовой скорости только в том случае, когда показатель преломления среды n зависит от частоты света ω, то есть при условии $n(\omega) \neq const$. Напомним, что по определению показатель преломления связан с фазовой скоростью $V_{ф} = \dfrac{c}{n}$.

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл.

Рассмотрим нестрогий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 распространяются в направлении оси z. Пусть разность частот мала: $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$. Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны A_0.

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$A(t,z) = A_0 \cos\left(k_1 z - \omega_1 t\right) + A_0 \cos\left(k_2 z - \omega_2 t\right) =$$

$$= 2A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right),$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases}\dfrac{k_1+k_2}{2}\equiv k\\ \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\equiv\omega\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}=-\dfrac{\delta\omega}{2}\\ \dfrac{k_1-k_2}{2}=-\dfrac{\delta k}{2}=-\dfrac{dk}{d\omega}\cdot\dfrac{\delta\omega}{2}\end{cases}.$$

Тогда

$$A(t,z)=2A_0\cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z-t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)\cdot\cos(kz-\omega t).$$

Здесь $2A_0\cos\left(\left(\dfrac{dk}{d\omega}z-t\right)\dfrac{\delta\omega}{2}\right)$ — огибающая, которая медленно изменяется при изменении t или z, так как $|\delta\omega|<<\omega$.

$\cos(kz-\omega t)$ — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей $2A_0\cos\left(\left(\dfrac{dk}{d\omega}z-t\right)\dfrac{\delta\omega}{2}\right)$ можно сказать, что $\left(\dfrac{dk}{d\omega}z-t\right)\dfrac{\delta\omega}{2}$ — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$\left(\dfrac{dk}{d\omega}z-t\right)\dfrac{\delta\omega}{2}=const$, считая координату z функцией времени, и получим

$$\left(\frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{dz}{dt}-\frac{dt}{dt}\right)\cdot\frac{\delta\omega}{2}=0 \qquad =>$$

$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{d\omega}{dk}$ — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн $V_{гр}$. Тогда

$V_{гр}=\dfrac{d\omega}{dk}$ — групповая скорость для волны любой природы, не только для световой волны. Выражение для групповой скорости $V_{гр}=\dfrac{d\omega}{dk}$ напоминает выражение для фазовой скорости $V_ф=\dfrac{\omega}{k}$.

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте $V_{гр}\le c$. Тем не менее, неравенство $\frac{d\omega}{dk} > c$ — возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

Факультатив. Обычно групповая скорость света меньше фазовой скорости.

Это следует из неравенства $\frac{dn}{d\omega} > 0$, которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее.

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$V_ф = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$ => $k = \frac{n\omega}{c}$, тогда

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)} = c\frac{d\omega}{d(n\omega)} = \frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}} < \frac{c}{n} = V_ф \quad =>$$

$V_{гр} < V_ф$ при условии нормальной дисперсии $\frac{dn}{d\omega} > 0$.

Экзамен. Поперечность световых волн.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = 0$.

Возьмем от него производную и получим $y'' = 0$.

Общее решение второго уравнения имеет вид: $y = ax + b$.

Не все решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Лишние решения появились в результате дифференцирования первого уравнения, так как при этом часть информации о решениях была утеряна.

Вернемся к рассмотрению волнового уравнения.

Волновое уравнение для вектора $\vec{E}$ было получено в результате дифференцирования, то есть применения операции $rot(\cdot)$, к одному из уравнений системы Максвелла. Следовательно, не все решения волнового уравнения являются решениями системы уравнений Максвелла.