

## Экзамен. Принцип Ферма (продолжение).

### Факультативная вставка.

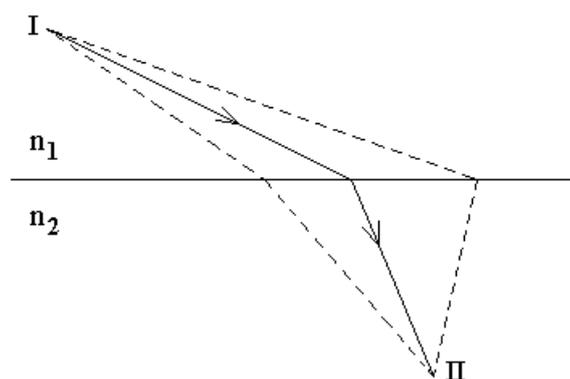
Принцип Ферма выполняется не строго. Так, например, в гауссовом пучке лучей даже в пустоте лучи распространяются не по кратчайшим прямым линиям, а по гиперболам с радиусом кривизны  $R$ , таким что  $\frac{R}{\lambda} \approx \left(\frac{D}{\lambda}\right)^3$ , где  $D$  — диаметр пучка лучей,  $\lambda$  — длина волны света. Сильнее всего лучи искривляются в шейке каустики, где пучок лучей имеет наименьший диаметр.

Где же допущена нестрогость в выводе принципа Ферма? Дело в том, что равенство  $V_\phi = \frac{c}{n}$  строго выполняется только для однородной плоской волны, поэтому  $dt = \frac{dl}{V_\phi} \neq \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} \cdot n \cdot dl$ . Например, раньше мы рассматривали гауссов пучок лучей в пустоте, и фазовая скорость в этом пучке  $V_\phi > c$ .

Совсем уж факультативно напомним, что, если свет идет из точечного источника до некоторой конечной точки, то принцип Ферма выполняется строго. Это связано с тем, что при вариации траектории луча фаза в конечной точке имеет экстремум. Если вслед за Фейнманом считать, что свет распространяется всеми возможными путями, то путей с экстремальной фазой окажется много, поэтому фаза в конечной точке будет именно экстремальной, поэтому свет пойдет по пути, который дает именно эту фазу в конечной точке.

### Конец факультативной вставки.

## Факультатив. Из принципа Ферма можно получить закон преломления.



Закон Снеллиуса можно вывести из того, что оптическая длина пути от точки I до точки II для реального луча должна быть меньше, чем для любого другого, изображенного пунктиром.

То есть  $\frac{n_1 h_1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{n_2 h_2}{\cos(\alpha_2)} = \min$  при условии  $h_1 \operatorname{tg}(\alpha_1) + h_2 \operatorname{tg}(\alpha_2) = \text{const}$ .

Подставим в первое равенство  $\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}$  и получим

$$n_1 h_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_1)} + n_2 h_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_2)} = \min$$

Возьмем от этого равенства производную  $\frac{d}{d(\operatorname{tg}(\alpha_1))}$  и получим

$$n_1 h_1 \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_1)}} + n_2 h_2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_2)}} \cdot \frac{d(\operatorname{tg}(\alpha_2))}{d(\operatorname{tg}(\alpha_1))} = 0$$

Подставим  $\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_1)}} = \sin(\alpha_1)$ , аналогично  $\frac{\operatorname{tg}(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_2)}} = \sin(\alpha_2)$ ,

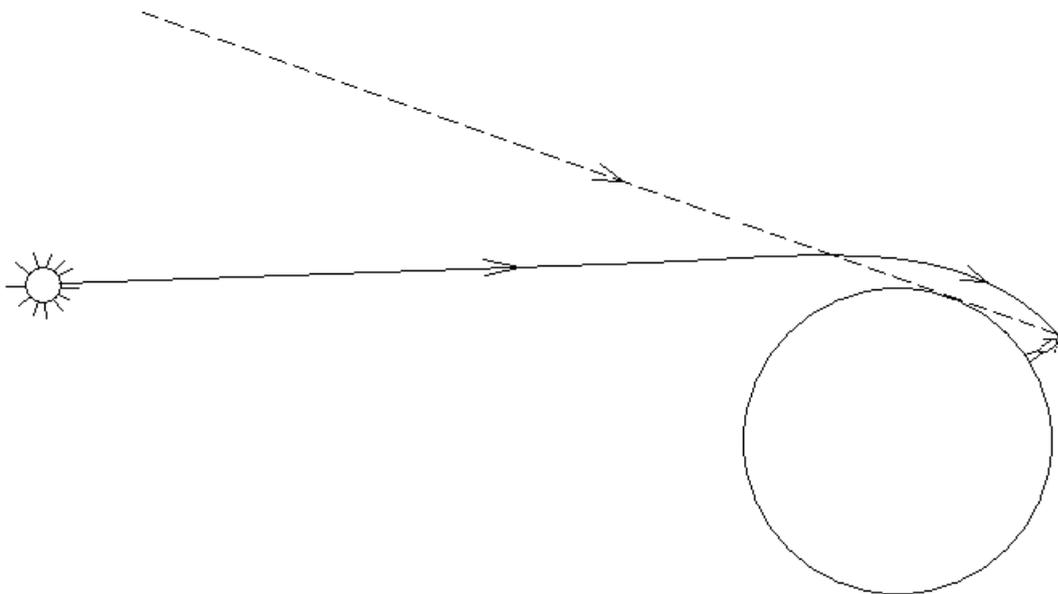
кроме того  $\frac{d(\operatorname{tg}(\alpha_2))}{d(\operatorname{tg}(\alpha_1))} = -\frac{h_1}{h_2}$  из условия  $h_1 \operatorname{tg}(\alpha_1) + h_2 \operatorname{tg}(\alpha_2) = \text{const}$  и получим

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

### Экзамен. Рефракция.

Понятие рефракции имеет три смысла.

- 1). В первом смысле рефракция — любое преломление света. Рефрактометр — прибор для измерения показателя преломления среды.
- 2). Во втором смысле рефракция (в атмосфере) — наблюдение Солнца из-под линии горизонта Земли.



Причина поворота солнечных лучей — уменьшение плотности атмосферы Земли с увеличением высоты над Землей. Дело в том, что с уменьшением плотности и соответственно концентрации молекул воздуха  $N$  уменьшается показатель преломления  $n$ , так как в разреженной среде  $(n-1) \sim N$ .

В неоднородной среде с изменяющимся от точки к точке показателем преломления свет поворачивает в оптически более плотную среду. В нашем случае свет поворачивает в сторону Земли.

3). В двух первых смыслах рефракция — это явление. В третьем смысле рефракция — это физическая величина.

$$R \equiv \frac{V}{\nu} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad \text{— рефракция, молярная или молекулярная рефракция.}$$

Здесь  $V$  — объем вещества,  $\nu$  — число молей,  $\frac{V}{\nu}$  — объем одного моля,  $n$  — показатель преломления среды.

Часто вместо молярной рефракции рассматривают удельную рефракцию  $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ , где  $\rho$  — плотность среды. Здесь по сравнению с молярной

рефракцией объем одного моля  $\frac{V}{\nu}$  заменен объемом единицы массы  $\frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$ .

Молярная рефракция представляет интерес для анализа формулы Лоренц — Лорентца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha,$$

где  $N$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость одной молекулы или коэффициент пропорциональности между наведенным дипольным моментом молекулы  $\vec{p}$  и напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E},$$

$n$  — показатель преломления среды.

Формула Лоренц — Лорентца для оптических полей доказывается аналогично формуле Клаузиуса — Моссотти в электростатике:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha.$$

Дело в том, что размер атома в тысячу раз меньше длины волны света, поэтому световое поле можно считать медленным полем для атома.

$$\text{В оптике } n = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx n^2.$$

Из определения рефракции следует  $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = R \frac{\nu}{V}$ . Тогда с учетом формулы Лоренц — Лорентца получаем:

$$R \frac{\nu}{V} = \frac{4}{3} \pi N \alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{4}{3} \pi \frac{NV}{\nu} \alpha,$$

где  $\frac{NV}{\nu} = N_A$  — число Авогадро или число молекул в одном моле. Тогда

$$R = \frac{4}{3} \pi N_A \alpha.$$

То есть молярная рефракция должна сохраняться независимо от концентрации вещества.

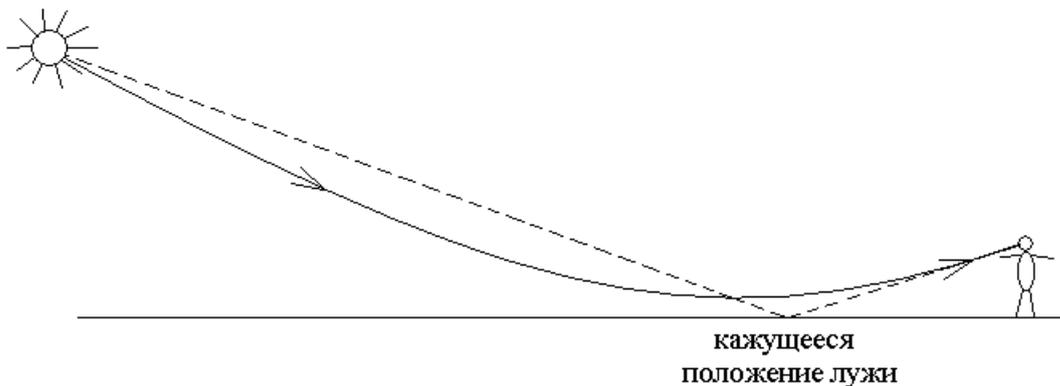
### Экзамен. Миражи.

Если смотреть летом вдоль раскаленного шоссе, то где-то далеко асфальт кажется мокрым, покрытым лужами.

Причина этой иллюзии в том, что у разогретого асфальта выше температура воздуха  $T$ , а давление воздуха  $p$  одинаковое:  $p = NkT$ , следовательно, у разогретого асфальта меньше концентрация молекул воздуха  $N$ .

Меньшая концентрация молекул означает, меньшее значение показателя преломления, так как при небольшой плотности из формулы Лоренц-Лорентца следует  $(n - 1) \sim N$ .

Свет поворачивает в оптически более плотную среду:



При скользящем падении света свет поворачивает у поверхности асфальта, как бы отражаясь от лужи. В этой луже, которой на самом деле нет, видны отражения неба, солнца, деревьев или фар автомобиля.

В раскаленной пустыне свет поворачивает не только у раскаленного песка, но и в высоких разреженных слоях атмосферы. Эти отражения порождают миражи. Отражения позволяют видеть предметы из-под линии горизонта и видеть водные поверхности, которых на самом деле нет.

### Спектр света.

Спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Спектр — это зависимость интенсивности света от координаты в этой плоскости. Спектр света пропорционален квадрату модуля Фурье образа электрического поля.

### Экзамен. Диапазоны электромагнитных волн и источники излучения.

Для волны любой природы произведение длины волны на частоту равно фазовой скорости волны:  $\lambda \nu = c$ . С 1983 года значение скорости света в вакууме постулируется:  $c \equiv 299792458$  м/с, что позволяет иметь единый эталон для длины и времени.

Электромагнитные волны делятся на диапазоны в зависимости от длины волны  $\lambda$  или от частоты  $\nu$ .

Разделение на диапазоны приблизительно определяется типами источников излучения. Для любых источников электромагнитное излучение возникает только при ускоренном движении заряженных частиц.

Рассмотрим диапазоны, начиная с самых больших длин волн.

Низкие или промышленные частоты.

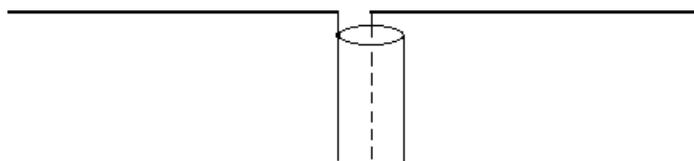
$$\lambda > 3 \text{ км} \quad \nu < 100 \text{ кГц}$$

Источники — паразитное излучение промышленных электроустановок: электродвигатели, электрогенераторы.

Радиоволны.

$$1 \text{ м} < \lambda < 3 \text{ км} \quad 100 \text{ кГц} < \nu < 300 \text{ МГц}$$

Источники — штыревые антенны.



Простейшая антенна — два штыря и коаксиальный кабель, по которому сигнал подводится к передающей антенне.

Микроволновой или СВЧ диапазон.

СВЧ — сверхвысокие частоты.

$$1 \text{ мм} < \lambda < 1 \text{ м} \quad 300 \text{ МГц} < \nu < 300 \text{ ГГц}$$

Источники — магнетроны и клистроны (объемные полые металлические резонаторы).

Передача от резонатора к антенне производится по полному волноводу. Антенна со сферическим отражателем — спутниковая тарелка. Телевещание, радиолокация.

Инфракрасный свет.

ИК излучение.

$$0.7 \text{ мкм} < \lambda < 1 \text{ мм}.$$

Частоту в этом диапазоне часто измеряют в обратных сантиметрах:  $1 \text{ см}^{-1} \approx 30 \text{ ГГц}$ . Частота  $1 \text{ см}^{-1}$  по определению соответствует излучению с длиной волны 1 см.

$$10 \text{ см}^{-1} = 300 \text{ ГГц} < \nu < 14000 \text{ см}^{-1} \approx 430 \text{ ТГц}.$$

Источники — излучение молекул при возбуждении колебания или вращения молекулы — вращательные и колебательные спектры молекул. Излучение нагретых тел.

Видимый свет.

$$0.4 \text{ мкм} < \lambda < 0.7 \text{ мкм}.$$

Коротковолновая граница — фиолетовый свет, длинноволновая граница — красный свет.

Вместо частот обычно говорят об энергии кванта света  $E = h\nu$ . Энергию обычно выражают в электрон-вольтах — это энергия, которую приобретает электрон, пролетая напряжение в 1 Вольт. Энергия кванта света  $1 \text{ эВ} =$

$1.6 \cdot 10^{-19}$  Дж соответствует частоте света  $\nu = 242$  ТГц и длине волны  $\lambda = 1.24$  мкм.

$$1.8 \text{ эВ} < h\nu < 3.1 \text{ эВ}$$

Источники — излучение атомов и молекул при возбуждении их электронных оболочек.

Ультрафиолетовый свет.

$$10 \text{ нм} < \lambda < 400 \text{ нм}$$

$$3.1 \text{ эВ} < h\nu < 125 \text{ эВ}$$

Источники — излучение атомов и ионов при возбуждении их электронных оболочек, рекомбинация положительных ионов и электронов.

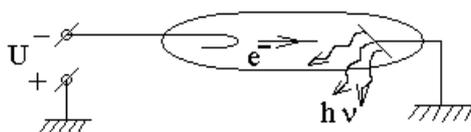
Рентген.

$$0.01 \text{ нм} < \lambda < 10 \text{ нм}$$

$$125 \text{ эВ} < h\nu < 125 \text{ кэВ}$$

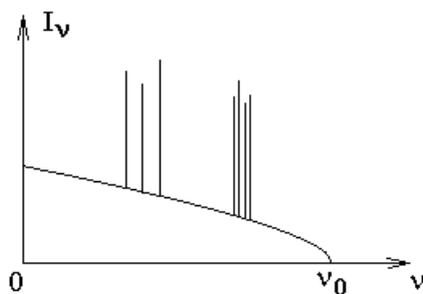
Источники — излучение атома после выбивания электрона внутренних электронных оболочек и тормозное излучение в металле электронов, ускоренных электрическим напряжением — рентгеновская трубка.

Рентгеновская трубка — это откачанная стеклянная трубка с двумя металлическими электродами, между которыми приложено напряжение в десятки киловольт.



Электроны ускоряются электрическим полем от катода к аноду. При ударе об анод электроны теряют энергию, часть которой переходит в энергию рентгеновского фотона.

Спектр образующегося излучения имеет следующий вид.

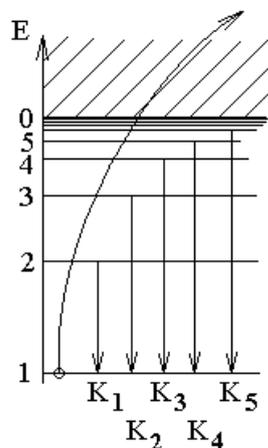


Спектр имеет сплошную и линейчатую составляющие.

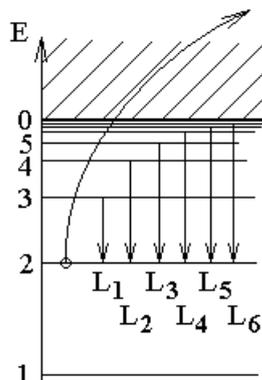
Сплошной спектр — это тормозное излучение электронов, останавливающихся внутри материала анода, так как ускоренное движение зарядов всегда сопровождается излучением. Максимальная энергия рентгеновского фотона равна энергии налетающего электрона  $h\nu_0 = eU$ .

Линейчатый спектр определяется уровнями энергии электронов. Налетающий электрон имеет большую энергию и может выбить не только внешний электрон атома, но и один из электронов внутренних электронных оболочек атома. Если выбит электрон с одной из внутренних оболочек атома, то электрон с любого из вышележащих уровней энергии может перейти на освободившейся уровень. Это сопровождается излучением рентгеновского кванта  $\Delta E = h\nu$ .

Если выбит электрон с уровня энергии самой нижней электронной оболочки (на ней 2 электрона), то возможные переходы электронов с вышележащих уровней энергии на освободившейся уровень образуют так называемую *K*-серию рентгеновских спектральных линий линейчатого спектра  $K_1, K_2, K_3, \dots$ :



Если электрон выбит с уровня энергии второй оболочки (на второй заполненной оболочке находится 8 электронов), то возможные переходы электронов с вышележащих уровней энергии образуют *L*-серию рентгеновских линий:



Аналогично, если электрон выбит с третьей оболочки, то в спектре появятся линии *M*-серии, т. д.

Гамма излучение.

$$\lambda < 0.01 \text{ нм}$$

$$h\nu > 125 \text{ кэВ}$$

Источники — излучение возбужденных атомных ядер, тормозное излучение в ускорителях элементарных частиц при взаимодействии ускоренной частицы с мишенью, излучение при взаимных превращениях элементарных частиц, космическое излучение.

Для сравнения энергия покоя электрона: 511 кэВ. Так при аннигиляции электрона и позитрона происходит излучение двух  $\gamma$  квантов с соответствующей энергией.

**Экзамен. Разложение светового поля по частотам.**

Рассмотрим вещественную напряженность светового поля  $\vec{E}(t)$  в одной пространственной точке.

Преобразование Фурье позволяет представлять световое поле  $\vec{E}(t)$  в одной точке пространства, как суперпозицию гармонических колебаний разных частот.

Рассмотрим прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \end{array} \right. , \text{ здесь коэффициент } \frac{1}{2\pi} \text{ может быть}$$

разделен на два сомножителя в интегралах произвольным образом.

Вещественность зависимости  $\vec{E}(t)$  накладывает некоторые ограничения на вид ее Фурье образа  $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ . Рассмотрим  $\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$ :

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}(t) e^{i\omega t} dt)^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}(t))^* (e^{i\omega t})^* (dt)^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{-i\omega t} dt = \tilde{\vec{E}}_0(-\omega)$$

Откуда:

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) = \tilde{\vec{E}}_0(-\omega).$$

То есть, Фурье образ поля  $\vec{E}(t)$  на отрицательных частотах может быть выражен, как комплексно сопряженная величина к Фурье образу на положительных частотах. Тогда Фурье интеграл по всем частотам можно выразить через Фурье интеграл только по положительным частотам

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

для этого в первом интеграле заменим  $\omega$  на  $(-\omega)$  и воспользуемся равенством  $\tilde{\vec{E}}_0(-\omega) = \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$ , тогда получим

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega.$$

Заметим, что первое слагаемое является комплексно сопряженным ко второму, тогда

$$\vec{E}(t) = \left( \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right)^* + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \text{Re} \left( \int_0^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right),$$

так как при сложении комплексно сопряженных величин вещественная часть удваивается, а мнимая сокращается. Тогда

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} \tilde{E}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \right) \quad \text{— разложение светового поля по}$$

положительным частотам.

В результате получаем разложение вещественного светового поля, как по всем частотам, так и по положительным частотам

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \tilde{E}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ \tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} dt \end{cases} .$$

Будем называть комплексным световым полем  $\tilde{E}(t)$  выражение:

$$\tilde{E}(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{E}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega,$$

Тогда Фурье образ  $\tilde{E}_0(\omega)$  показывает, сколько в поле  $\tilde{E}(t)$  содержится сигнала с частотой  $\omega$ .

$\vec{E}(t) = \operatorname{Re}(\tilde{E}(t))$  — связь вещественного  $\vec{E}(t)$  и комплексного  $\tilde{E}(t)$  световых полей.