Экзамен. Ряды Фурье для светового поля.

Обычно мы не знаем величину электрического поля на бесконечном интервале времени.

Допустим, нам известно поле $\vec{E}(t)$ на промежутке времени T.

В таком случае за пределами известного интервала времени T либо считают поле $\vec{E}(t)$ равным нулю, либо считают, что поле периодически повторяется с периодом T. Пусть поле $\vec{E}(t)$ — периодическая функция времени. Периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье по кратным частотам.

$$\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}\text{, где } \omega_m=m\frac{2\pi}{T}, \qquad m=0,\pm1,\pm2,...$$

Здесь амплитуды ряда Фурье находятся по формулам:

$$\tilde{\vec{E}}_m=\frac{2}{T}\int_0^T\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt.$$

Аналогично интегралу Фурье из вещественности поля $\vec{E}(t)$ следует, что амплитуды разложения по отрицательным частотам должны быть комплексно сопряженными амплитудам на положительных частотах

$$\tilde{\vec{E}}_m^*=\tilde{\vec{E}}_{-m}.$$

Объединяя парами комплексно сопряженные слагаемые Фурье разложения поля $\vec{E}(t)$, можно из разложения поля по частотам обоих знаков получить разложение по положительным частотам:

$$\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}=\frac{\vec{E}_0}{2}+\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}.$$

Окончательно для периодической функции $\vec{E}(t)$ получаем представление в виде ряда Фурье:

$$\begin{cases}\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}=\frac{\vec{E}_0}{2}+\mathrm{Re}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}\\ \tilde{\vec{E}}_m=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_0^T\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt\end{cases}.$$

Экзамен. Спектр света. Разные определения спектра света. Спектр экспоненциально затухающего светового цуга.

Математики часто под спектром понимают Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ временнóй зависимости $\vec{E}(t)$. В физике исторически спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Эти изображения представляют собой спектр света, падающего на входную щель спектрометра. Вопрос состоит в том, как количественно описать спектр света. Есть несколько подходов к этому вопросу.

В любом случае в физике спектр связан с зависимостью от частоты либо энергии света, либо интенсивности. Энергия пропорциональна интенсивности, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Фурье образ светового поля как раз и играет роль комплексной амплитуды света на определенной частоте света, поэтому спектр света в физике пропорционален квадрату модуля Фурье образа светового поля. Коэффициент пропорциональности в разных случаях вводится по-разному, и обычно вообще не обсуждается, как величина несущественная. Световое поле вещественно, следовательно, квадрат модуля Фурье образа на отрицательных частотах равен квадрату модуля на соответствующих положительных частотах. Поэтому в физике под спектром понимают зависимость квадрата модуля Фурье образа только от положительных частот.

В соответствии с этим мы будем называть спектром света величину пропорциональную квадрату модуля Фурье образа светового поля, как функцию положительной частоты света.

При рассмотрении Фурье образа есть два варианта — интеграл Фурье и ряд Фурье.

Если рассматривается спектр короткого светового импульса G_ω, то берут интеграл Фурье. В качестве примера рассмотрим спектр светового цуга, излучаемого одним атомом при переходе атома из возбужденного в невозбужденное состояние. Амплитуда излучения атома экспоненциально затухает во времени, поэтому световое поле атома в фиксированной точке наблюдения имеет вид:

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) \text{ при } t > 0$$

и световое поле отсутствует при $t < 0$.

Вычислим Фурье образ этого светового поля:

$$\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} E_0 e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} E_0 e^{-\Gamma t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\left(\Gamma - i(\omega+\omega_0)\right)t} + e^{-\left(\Gamma - i(\omega-\omega_0)\right)t} \right) dt =$$

$$= \frac{E_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\Gamma - i(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{\Gamma - i(\omega-\omega_0)} \right).$$

Если $\omega \approx \omega_0$, то с учетом $\omega_0 \gg \Gamma$, второе слагаемое оказывается гораздо больше первого

$$\left| \frac{1}{\Gamma - i(\omega+\omega_0)} \right| \ll \left| \frac{1}{\Gamma - i(\omega-\omega_0)} \right|,$$

так как знаменатель второго слагаемого — величина порядка Γ, а знаменатель первого слагаемого — величина порядка $2\omega_0$. Фурье образ представляет интерес, когда он достаточно велик. Тогда интерес представляет область частот $\omega \approx \omega_0$, и Фурье образ примерно равен

$$\tilde{E}_0(\omega) \approx \frac{E_0}{2\pi\left(\Gamma - i\left(\omega - \omega_0\right)\right)}.$$

Спектр света G_ω пропорционален квадрату модуля Фурье образа:

$$\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2 + \left(\omega - \omega_0\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right),$$

где $G_\omega \sim \mathscr{L}(x) \equiv \dfrac{1}{1 + x^2}$ — так называемый лоренцевский контур спектральной линии излучения одиночного атома, где $x \equiv \dfrac{\omega - \omega_0}{\Gamma}$ — безразмерная отстройка частоты ω от центра линии излучения ω_0, Γ — полуширина на полувысоте спектрального контура.

Факультативная вставка.

Если все-таки вводить определенный коэффициент пропорциональности между спектром G_ω и квадратом модуля Фурье образа $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, то это можно сделать следующим образом. Пусть $G = \dfrac{dW}{dS}$ — энергия электромагнитного поля, которая падает на единичную площадку перпендикулярную свету. Тогда

$$G = \int_0^{+\infty} G_\omega \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $G_\omega \equiv \dfrac{dG}{d\omega}$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку в единичном интервале частот; $I(t)$ — интенсивность света или энергия, которая падает на единичную площадку в единицу времени.

Интенсивность света связана с его амплитудой $I(t) = \dfrac{cn}{8\pi\mu} E_0^2(t)$. Если теперь для светового цуга взять $E_0(t) = E_0 e^{-\Gamma t}$ при $t > 0$, в равенство (1) подставить $G_\omega = \alpha\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ с неизвестным коэффициентом α и подставить $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \dfrac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\Gamma}\right)$, то можно найти величину коэффициента α. В результате окажется, что

$$G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2.$$

Конец факультативной вставки.

Если вместо светового импульса рассматривается изменение спектра со временем, то берут ряд Фурье. Для вычисления Фурье образа напряженности нужно рассматривать не один момент времени, а некоторый промежуток. Этот промежуток времени T усреднения спектра выбирают произвольно. Спектр будет существенно зависеть от этого выбора.

Сначала рассматривают первый промежуток времени T и на этом промежутке определяют спектр. С этой целью реальную зависимость светового поля от времени заменяют периодической зависимостью с периодом T. На этом периоде световое поле полагается равным реальному световому полю на первом промежутке времени T. Для полученного таким образом периодического светового поля находят разложение в ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов этого разложения представляют собой гистограмму спектра света на первом промежутке времени T. Затем рассматривают второй промежуток времени T с реальной зависимостью светового поля от времени. Чтобы найти спектр для этого второго промежутка времени T, реальную зависимость светового поля от времени опять заменяют на периодическую зависимость с периодом T. Только теперь на этом периоде световое поле совпадает с реальным световым полем на втором промежутке времени T. Опять вычисляют ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов ряда Фурье — гистограмма спектра на втором промежутке времени T. И так далее. Получается возможность рассмотрения зависимости спектра от времени.

Если квадрат модуля Фурье амплитуды умножить на некоторый коэффициент:

$$I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2,$$

то I_m окажется интенсивностью света на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$. Можно доказать, что общая интенсивность света $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$. Набор интенсивностей I_m удобно называть и называют спектром света. В этом определении спектр света — это некоторая гистограмма.

Если промежуток времени T выбрать слишком коротким, то спектр будет слишком бедным (мало палок в гистограмме спектра), в нем будет слишком мало подробностей. Если же промежуток времени T выбрать слишком длинным, то спектр будет определен через большие интервалы времени (не достаточно часто).

Факультативная вставка.

Покажем, что $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Выразим интенсивность света через среднее значение квадрата напряженности, а напряженность подставим в виде ряда Фурье.

$$I=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\vec{E}(t),\vec{E}(t)\right)\right\rangle_t=$$

$$=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m e^{-i\omega_m t},\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_k e^{-i\omega_k t}\right)\right\rangle_t$$

Вынесем комплексные экспоненты за знак скалярного произведения и получим

$$I=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{-i\omega_m t}\cdot\left(e^{-i\omega_k t}\right)^*\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right)=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right)$$

Если частоты ω_k и ω_m не совпадают, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t=0$, так как $e^{i(\omega_k-\omega_m)t}$ — комплексное число единичной длины, которое вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью $\omega_k-\omega_m$. Если же частоты совпадают $\omega_k=\omega_m$, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t=1$. Тогда

$\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t=\delta_{km}$ — дельта символ Кронекера. Тогда

$$I=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_m\right)=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|^2.$$

Учтем, что $\left|\tilde{\vec{E}}_{-m}\right|=\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|$, так как $\tilde{\vec{E}}_{-m}=\tilde{\vec{E}}_m^*$ и получим

$$I=\frac{cn}{16\pi\mu}E_0^2+\frac{cn}{8\pi\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2.$$

Сравним это выражение с выражением интенсивности через вещественную амплитуду светового поля E_0:

$$I=\frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2.$$

Вещественная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды, тогда

$I_m=\frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m=m\frac{2\pi}{T}$.

Введем для интенсивности на нулевой частоте определение: $I_0\equiv\frac{cn}{16\pi\mu}E_0{}^2$, тогда интенсивность света $I=\frac{cn}{16\pi\mu}E_0^2+\frac{cn}{8\pi\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ можно выразить, как сумму интенсивностей по положительным частотам:

$$I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m .$$

Особняком при рассмотрении спектра стоит излучение абсолютно черного тела (формула Планка). Здесь тоже есть два варианта. Под спектром понимают либо спектральную плотность объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

либо энергию, которую излучает поверхность нагретого абсолютно черного тела. В этом случае под спектром понимают спектральную плотность энергии излучаемой единицей площади поверхности абсолютно черного тела в единицу времени:

$$\frac{c \cdot w_\nu(T)}{4} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Кроме того $w_\omega = \frac{1}{2\pi} w_\nu$, что дает еще две формулы для спектра излучения абсолютно черного тела.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>**Факультатив. Теорема Парсеваля.**</u>

Если рассмотреть два выражения для поверхностной плотности энергии светового поля:

$$G = \int_0^{+\infty} G_\omega \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) \, dt,$$

где G_ω — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку перпендикулярную направлению света в единичном интервале циклических частот, $I(t)$ — зависимость интенсивности света от времени. То из этого равенства можно получить теорему Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{E}_0(\nu)\right|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) \, dt,$$

где $\tilde{\vec{E}}_0(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i2\pi\nu t} \cdot dt$.

Или, если вместо нашего определения $\tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$ положить, что $\tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$, то получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\,dt.$$

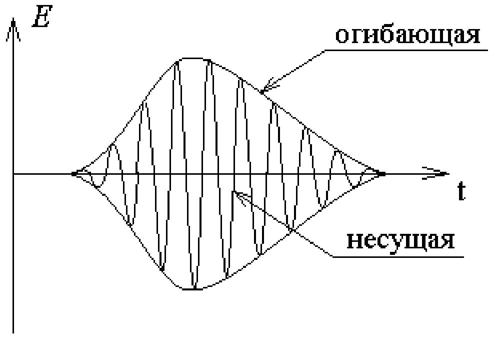
Это та же теорема Парсеваля.

Заметим, что в математике теорема Парсеваля доказана не для преобразования Фурье, а для более общего случая унитарного преобразования.

<u>Экзамен. Спектр огибающей светового импульса и спектр самого импульса.</u>

Рассмотрим световое поле в одной пространственной точке. Пусть для простоты свет линейно поляризован. Тогда можно не следить за направлением светового поля $\vec{E}(t)$, а рассматривать только его величину.

Рассмотрим световой импульс.



Огибающая светового импульса — медленно меняющаяся амплитуда поля.

Несущая — синусоида с частотой заполнения огибающей. Косинусоида — это та же синусоида только со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$, поэтому косинусоиды для благозвучия тоже будем называть синусоидами.

Световой импульс — произведение двух функций: медленной огибающей и синусоиды несущей частоты.

Огибающую можно представить, как сумму нескольких синусоид, то есть в виде Фурье разложения.

Рассмотрим простейший вариант огибающей, которая состоит из одной синусоиды с частотой Ω_0:

$A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$.

Пусть несущая имеет оптическую частоту ω_0:

$\cos(\omega_0 t)$, где $\Omega_0 << \omega_0$.

Тогда

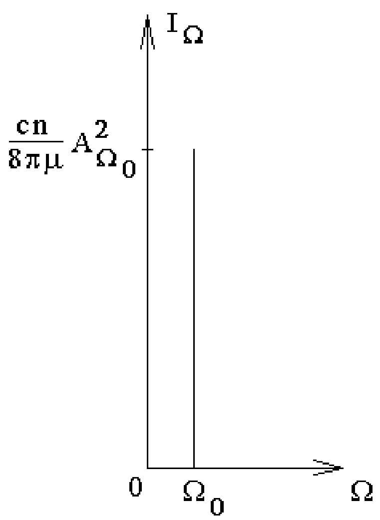
$$E(t)=A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t)=\frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0+\Omega_0)t)+\frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0-\Omega_0)t).$$

Оказалось, что свет состоит из синусоид двух частот: $(\omega_0+\Omega_0)$ и $(\omega_0-\Omega_0)$. Амплитуда каждой из них $\frac{A_{\Omega_0}}{2}$ вдвое меньше амплитуды A_{Ω_0} огибающей $A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$, а интенсивность вчетверо меньше, как квадрат амплитуды: $I=\frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2$.

Рассмотрим три спектра. Для простоты будем считать, что частоты Ω_0 и ω_0 кратны одной и той же малой частоте ω_1. Тогда световое поле является периодической функцией с периодом $T=\frac{2\pi}{\omega_1}$. Периодическое световое поле можно разложить в ряд Фурье. Будем под спектром света понимать совокупность интенсивностей Фурье компонент I_m. Для светового поля отличными от нуля окажутся интенсивности только двух компонент ряда Фурье с положительными частотами $\omega_0-\Omega_0$ и $\omega_0+\Omega_0$. В спектре огибающей окажется отличной от нуля интенсивность только одной компоненты с положительной частотой Ω_0. Амплитуды Фурье компонент будут совпадать с амплитудами соответствующих синусоид, а интенсивности компонент будут связаны с амплитудами обычными соотношениями вида $I=\frac{cn}{8\pi\mu}A^2$.

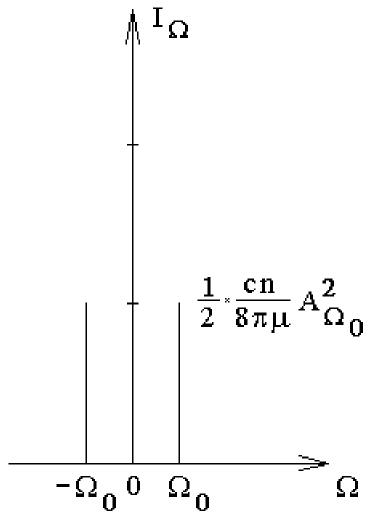
Рассмотрим гистограммы трех спектров.

1).



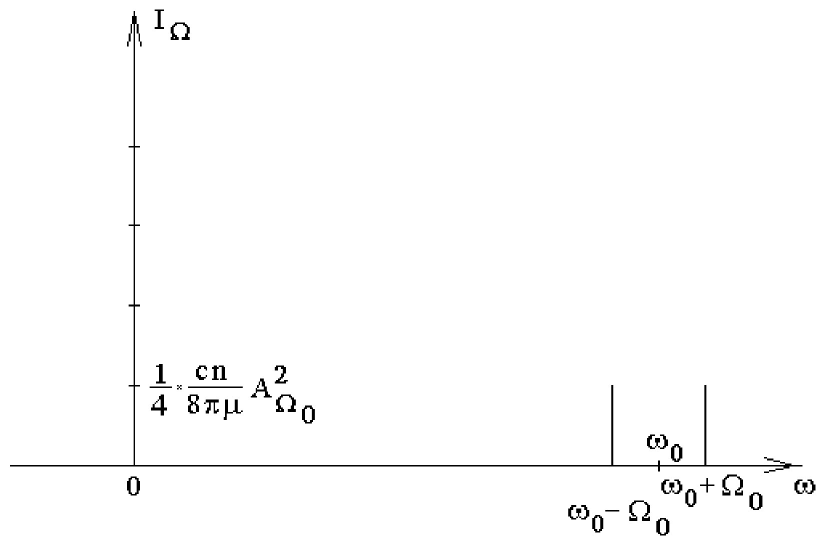
Спектр огибающей, который в рассматриваемом случае состоит из одной спектральной линии.

2).



Спектр огибающей в частотах обоих знаков. При этом чтобы суммарная интенсивность осталась без изменения, и интенсивность была бы равна сумме интенсивностей, нужно считать, что на каждую из этих двух частот приходится половина всей интенсивности.

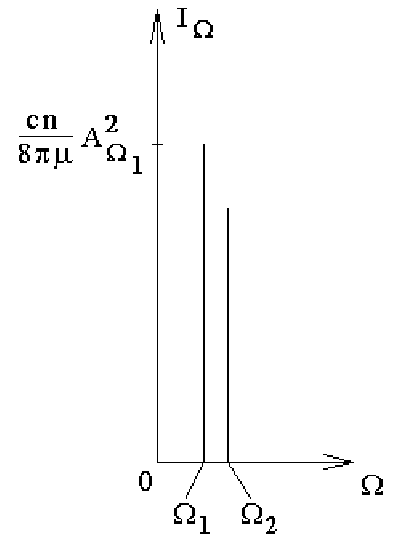
3).



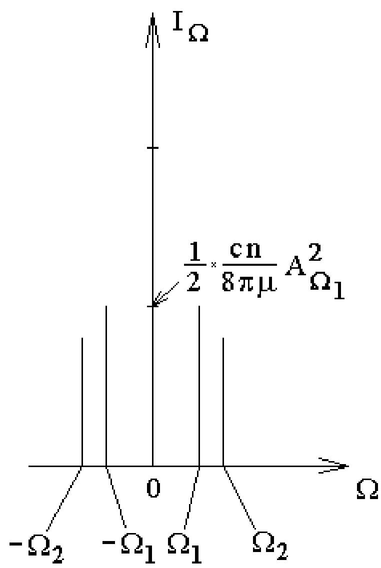
Спектр светового импульса представляет собой спектр огибающей обоих знаков, сдвинутый на частоту несущей ω_0. Интенсивности линий спектра становятся еще вдвое меньше.

Причина еще одного коэффициента $\frac{1}{2}$ вызвана тем, что световой импульс в сравнении с огибающей имеет сомножитель $\cos(\omega_0 t)$, а интенсивность при этом имеет сомножитель $\left\langle \cos^2(\omega_0 t) \right\rangle_t = \frac{1}{2}$.

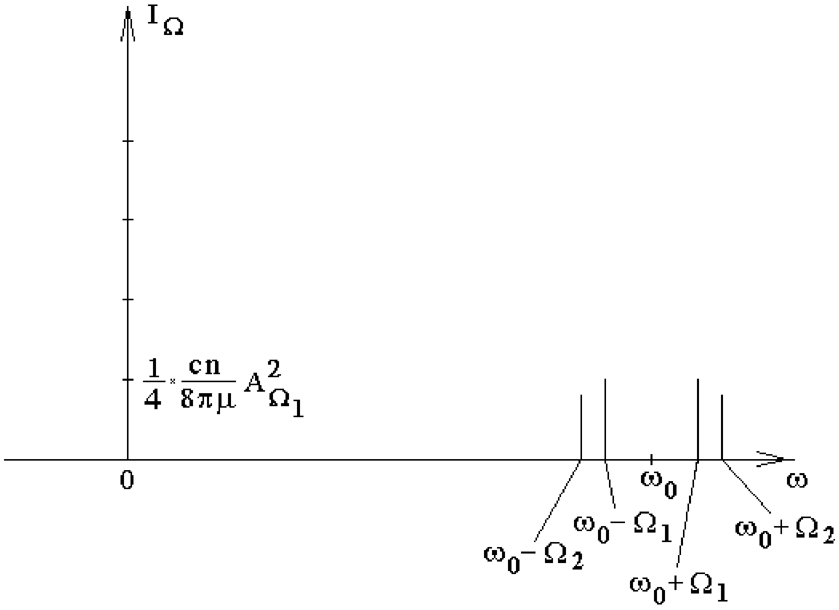
Обсудим теперь огибающую светового импульса, в спектре которой содержится несколько частот, например две:



Спектр огибающей в частотах обоих знаков будет иметь вдвое меньшие интенсивности:

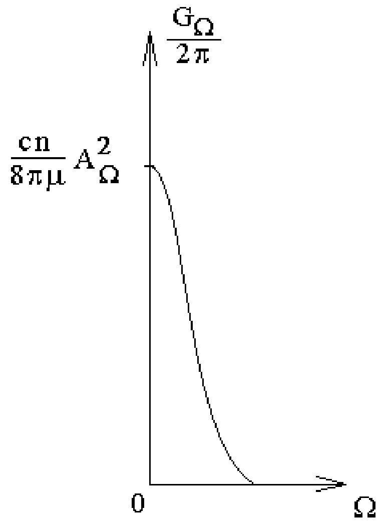


Спектр светового импульса будет подобен спектру огибающей, но еще вдвое ниже и сдвинут на частоту несущей:



.

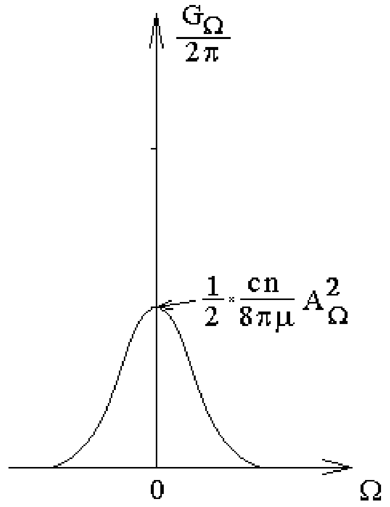
Обычно огибающую светового импульса можно разложить только в непрерывный спектр:



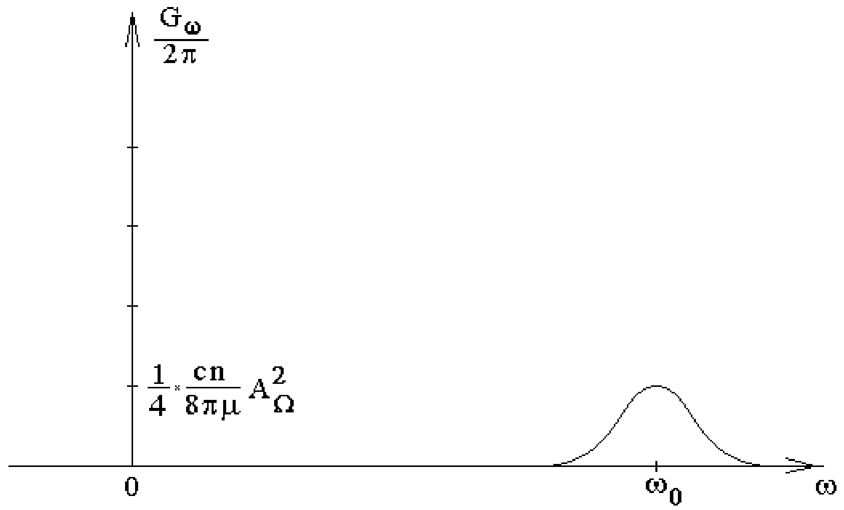
.

Здесь $G_\omega = 2\pi\dfrac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ — спектр света или спектральная плотность поверхностной плотности энергии, $\left|\tilde{E}_0(\Omega)\right| = A_\Omega$ — модуль Фурье образа огибающей.

Спектру положительных частот можно сопоставить уполовиненный по высоте спектр частот обоих знаков:



При этом спектр светового импульса по форме совпадает со спектром огибающей, но оказывается еще вдвое ниже и сдвинут по оси абсцисс на величину равную несущей частоте:



Для краткости говорят, что спектр светового импульса — это спектр огибающей импульса, сдвинутый на частоту несущей. То, что спектр огибающей рассматривается в частотах обоих знаков, и то, что сдвинутый спектр вдвое уменьшается по амплитуде, подразумевается, но не озвучивается.

Экзамен. Соотношение неопределенности частоты и времени (без доказательства).

Опираясь только на свойства преобразования Фурье можно доказать, что спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega$ и его длительность Δt связаны приблизительным соотношением:

$\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$.

Обычно под спектральной шириной импульса понимают ширину его спектрального контура G_ω на половине высоты (на половине максимального значения G_ω). Аналогично под длительностью импульса можно понимать ширину контура $I(t)$ на половине его высоты.

Это неравенство означает, что короткий световой импульс обязан иметь широкий спектр, а почти монохроматическое световое поле не может быть кратковременным.

Если короткий световой импульс пропустить через узкополосный светофильтр, спектральная ширина пропускания которого $\Delta\omega$ мала, то свет на выходе светофильтра длится долго (длительность импульса Δt — велика). Если свет с постоянной амплитудой пропустить через затвор, который открывается на короткий промежуток времени, то после затвора спектр света становится широким.

Факультативная вставка.

Приблизительное неравенство $\Delta\omega\cdot\Delta t>1$ можно заменить точным неравенством:

$$\Delta\omega\cdot\Delta t\geq\frac{1}{2}.$$

Для точного неравенства $\Delta\omega\cdot\Delta t\geq\frac{1}{2}$ нужно строго определить величины $\Delta\omega$ и Δt. Заметим, что для того чтобы величина $\frac{1}{2}$ была точной границей неравенства необходимо, чтобы у светового импульса была несущая частота. То есть спектр частот импульса должен быть сдвинут далеко от нулевой частоты.

Здесь $\Delta\omega=\sqrt{\left\langle\left(\omega-\langle\omega\rangle\right)^2\right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение частоты ω в распределении светового импульса по частотам от средней частоты $\langle\omega\rangle$ светового импульса.

Аналогично, $\Delta t=\sqrt{\left\langle\left(t-\langle t\rangle\right)^2\right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение времени t прохождения частей импульса через фиксированную точку пространства от среднего времени $\langle t\rangle$ или времени прохождения центра тяжести импульса.

$$\Delta\omega=\sqrt{\left\langle\left(\omega-\langle\omega\rangle\right)^2\right\rangle}=\sqrt{\left\langle\omega^2-2\omega\langle\omega\rangle+\langle\omega\rangle^2\right\rangle}=$$
$$=\sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle-2\langle\omega\rangle\langle\omega\rangle+\langle\omega\rangle^2}=\sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle-\langle\omega\rangle^2}$$

Аналогично:

$$\Delta t=\sqrt{\left\langle\left(t-\langle t\rangle\right)^2\right\rangle}=\sqrt{\left\langle t^2\right\rangle-\langle t\rangle^2}.$$

Средняя частота светового импульса — это частота, усредненная с весом пропорциональным спектральной плотности поверхностной плотности энергии светового импульса $G_\omega = 2\pi \dfrac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, где $\tilde{E}_0(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(t)\cdot e^{i\omega t}dt$ — Фурье образ светового поля $E(t)$. При таком усреднении величина $\dfrac{G_\omega d\omega}{G}$ играет роль вероятности того, что частота лежит в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Сумма этих вероятностей равна единице, так как $G = \int\limits_0^{+\infty} G_\omega d\omega$. Среднее значение любой величины равно сумме или интегралу по всем вариантам состояний от произведения усредняемой величины на вероятность состояния. Тогда

$$\langle\omega\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \omega \frac{G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty} G_\omega d\omega}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат частоты:

$$\left\langle\omega^2\right\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \omega^2 \frac{G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega^2 G_\omega d\omega}{G} = \frac{\int\limits_0^{+\infty} \omega^2 G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty} G_\omega d\omega}.$$

Через эти два средних значения и выражается спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle - \langle\omega\rangle^2}$.

При вычислении среднего времени прохода светового импульса через фиксированную точку пространства нужно время усреднить с весом пропорциональным мгновенному значению интенсивности света $I(t)$ внутри светового импульса. Роль вероятности того, что время (импульса) лежит в интервале от t до $t + dt$ играет величина $\dfrac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t')\,dt'}$.

Тогда

$$\langle t\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t')\,dt'} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\,dt}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат времени:

$$\left\langle t^2 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t')\,dt'} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\,dt}.$$

Через эти две средние величины выражается длительность светового импульса:

$$\Delta t = \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle - \left\langle t \right\rangle^2}.$$

Повторим, что среднеквадратичные отклонения $\Delta\omega$ и Δt связаны соотношением $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$. Равенство $\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{1}{2}$ достигается только в том случае, когда спектр импульса представляет собой гауссову функцию частоты $\sim e^{-2\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$, а огибающая импульса — гауссова функция времени $\sim e^{-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$ (интенсивность — гауссова функция вида $\sim e^{-2\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$).

В оптике часто оказывается, что среднеквадратичное отклонение частоты от средней частоты бесконечно: $\Delta\omega = \infty$. В таком случае неравенство в форме $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$ становится неинформативным. Но неравенство $\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$, где $\Delta\omega$ и Δt ширина половине высоты соответствующих контуров, по-прежнему имеет смысл.

<u>Конец факультативной вставки.</u>