## Факультатив. Соотношение неопределенности Гейзенберга.

Рассмотрим соотношение неопределенности частоты и времени в сочетании с выражением для энергии фотона:

$$\begin{cases} \Delta\omega \cdot \Delta t \ge \dfrac{1}{2} \\ E = h\nu = \hbar\omega \end{cases}.$$

Умножим первое равенство на $\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ и с учетом второго равенства получим:

$\Delta E \cdot \Delta t \ge \dfrac{\hbar}{2}$ — соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени, справедливое как для фотона, так и любой другой частицы.

Это соотношение означает, что нельзя одновременно и точно знать и время возможной регистрации фотона, и ожидаемую энергию фотона при его регистрации.

Чем точнее будет известно время регистрации фотона, тем больше неопределенность в энергии фотона. Это следует из того, что для точного определения момента необходимо, чтобы световой импульс был коротким. При этом спектр импульса автоматически, на основе свойств преобразования Фурье, оказывается широким. Энергия фотона пропорциональна частоте, поэтому и энергия регистрируемого фотона оказывается в состоянии с большой неопределенностью.

---------

Заметим, что аналогичное соотношение неопределенности можно написать для координаты и импульса. При этом нужно рассмотреть свет не в одной пространственной точке во все моменты времени, а во всем пространстве в один момент времени.

Любую ограниченную в пространстве и времени волну можно представить, как суперпозицию плоских монохроматических волн.

Рассмотрим выражение для фазы плоской монохроматической волны любой природы:

$$\varphi = \left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0 .$$

В это выражение произведение $-\omega t$ входит, точно также как произведение $k_x x$. Если свойства преобразования Фурье по временной координате $t$ приводят к соотношению

$\Delta\omega \cdot \Delta t \ge \dfrac{1}{2}$, то

свойства преобразования Фурье по пространственной координате $x$ обязаны приводить к соотношению

$$\Delta k_x \cdot \Delta x \ge \frac{1}{2}.$$

Умножим это соотношение на $\hbar$ и получим

$$\Delta\left(\hbar k_x\right)\cdot\Delta x \ge \frac{\hbar}{2}.$$

Рассмотрим импульс фотона

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar\frac{\omega}{c} = \hbar k \quad => \quad p = \hbar k \quad =>$$

$$p_x = \hbar k_x.$$

Тогда соотношение неопределенности для $x$ координаты примет вид:

$\Delta p_x \cdot \Delta x \ge \frac{\hbar}{2}$ — это тоже соотношение неопределенности Гейзенберга только для координаты и проекции импульса.

Эти соотношения неопределенности $\begin{cases} \Delta E \cdot \Delta t \ge \frac{\hbar}{2} \\ \Delta p_x \cdot \Delta x \ge \frac{\hbar}{2} \end{cases}$ справедливы не только для фотона, но и для любой другой частицы, так как согласно предположению де Бройля (в квантовой механике) каждая частица одновременно является волной, для которой частота и длина волны связаны с энергией и импульсом частицы соотношениями:

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k = \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}\cdot \end{cases}$$

Любопытно, что согласно теории вторичного квантования (подробнее в последней лекции за 2010г.) фаза светового поля и число фотонов тоже не могут быть одновременно строго определены, то есть подчиняются некоторому соотношению неопределенности.

## Интерференция.

## Экзамен. Явление интерференции. Ширина полос. Видность.

Говорят, что волны интерферируют, если интенсивность суммарной волны не равна сумме интенсивностей:

$$I \ne \sum_m I_m.$$

Световые волны разных частот не интерферируют. Поясним это.

Световое поле известно только на ограниченном интервале времени *T*. Всегда с достаточной точностью можно заменить реальную зависимость напряженности светового поля от времени периодической функцией времени с периодом *T*. Тогда все частоты в ее Фурье разложении кратны некоторой малой частоте $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а свет разных частот можно рассматривать, как разные компоненты этого ряда Фурье.

Мы уже обсуждали, что для ряда Фурье справедливо равенство $I = \sum_m I_m$, где $I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$, $\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt$ — коэффициенты разложения ряда Фурье. То есть при усреднении за бесконечное время $I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t$ световые волны разных частот не интерферируют $I = \sum_m I_m$.

---------

При наблюдении интерференции подразумевается, что складываются почти однонаправленные световые волны. Только для таких волн определено понятие интенсивности.

Интерференцию наблюдают на экране, который ставят почти перпендикулярно лучам.

На экране образуются светлые и темные полосы.

Ширина интерференционных полос — расстояние между центрами соседних светлых полос.

---------

$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ — определение видности интерференционной картины. Здесь $I_{\max}$ — интенсивность в максимуме интенсивности светлой полосы (в середине светлой полосы), $I_{\min}$ — интенсивность в минимуме интенсивности (в середине темной полосы).

$0 \le I_{\min} \le I_{\max}$ =>

$0 \le V \le 1$.

$V = 0$ <=> $I_{\max} = I_{\min}$ — отсутствие интерференционных полос.

$V = 1$ <=> $I_{\min} = 0$ — максимальный контраст интерференционных полос.

## Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн ортогональных поляризаций.

Две поляризации света будем называть ортогональными, если единичные векторы поляризаций ортогональны:

$\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0$.

Например, для света, направленного вдоль оси $z$, ортогональны поляризации по декартовым осям

$\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right) = 0$, ортогональны и две круговые поляризации

$(\vec{e}_+, \vec{e}_-) = 0$, где

$$\begin{cases} \vec{e}_+ = \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- = \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

, где $\vec{e}_+$ — единичный вектор левой круговой поляризации, $\vec{e}_-$ — единичный вектор правой круговой поляризации.

---------

Выразим интенсивность света через комплексную амплитуду света $\tilde{\vec{E}}_0$:

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right).$$

Рассмотрим две световые волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении $\vec{k}$:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} =$$

$$= \left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right)\cdot e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{E}_0\vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}.$$

Подставим в выражение $I = \dfrac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right)$ для интенсивности комплексную амплитуду в виде $\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}$ и получим:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right) = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}, \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right) = \frac{cn}{8\pi\mu}\cdot$$

$$\cdot\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{01}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p2}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p2}\right)\right\}.$$

Учтем, что поляризации ортогональны $\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p2}\right) = 0$ и получим:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1},\vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2},\vec{e}_{p2}\right)\right\} = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\left|\tilde{E}_{01}\right|^2 + \left|\tilde{E}_{02}\right|^2\right) = I_1 + I_2$$

=> $\quad I = I_1 + I_2 \quad$ =>

Ортогональные поляризации не интерферируют.

## Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн одинаковой поляризации, как функция разности фаз.

Мы докажем формулу для интенсивности суммарной волны в случае линейной поляризации света. Для любой другой поляризации формула будет такой же.

Рассмотрим две световые волны в одной и той же пространственной точке:

$$E_1(t) = E_{01}\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \quad \text{и} \quad E_2(t) = E_{02}\cos\left(\omega t + \varphi_2\right).$$

Напряженность суммарного светового поля равна сумме напряженностей двух световых полей:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_{01}\cos(\omega t + \varphi_1) + E_{02}\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Подставим это в выражение для интенсивности света

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle \left(E_1(t) + E_2(t)\right)^2\right\rangle_t =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left(\left\langle E_1^2(t)\right\rangle_t + 2\left\langle E_1(t)E_2(t)\right\rangle_t + \left\langle E_2^2(t)\right\rangle_t\right) =$$

и получим

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\cdot\left\{E_{01}^2\left\langle\cos^2(\omega t + \varphi_1)\right\rangle_t + 2E_{01}E_{02}\left\langle\cos(\omega t + \varphi_1)\cdot\cos(\omega t + \varphi_2)\right\rangle_t\right\} +$$

$$+ \frac{cn}{4\pi\mu}\cdot\left\{E_{02}^2\left\langle\cos^2(\omega t + \varphi_2)\right\rangle\right\} =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2} + E_{01}E_{02}\left\langle\cos(2\omega\cdot t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right\rangle_t + E_{02}^2\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2} + E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{02}^2\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{cn}{8\pi\mu}\left(E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Окончательно получаем:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз интерферирующих волн с одинаковой поляризацией и с интенсивностями $I_1$ и $I_2$.

Часто интенсивность суммарной световой волны выражают через оптическую разность хода, которая связана с разностью фаз соотношением $\Delta = \lambda\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}$. Тогда

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(2\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

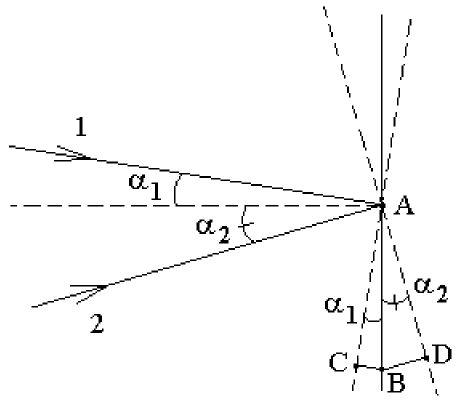
## **Экзамен. Связь ширины интерференционных полос и угла между интерферирующими волнами.**

Обычно при рассмотрении интерференции два интерферирующих луча и нормаль к экрану находятся в одной плоскости. Только такой вариант мы и будем рассматривать.

Докажем, что для малых углов между нормалью к экрану и каждым лучом ширину интерференционных полос можно найти по формуле:

$$d = \frac{\lambda}{\alpha},$$

где $\alpha$ — угол между интерферирующими лучами, $d$ — ширина интерференционных полос.




Пусть в точку $A$ на экране две световые волны 1 и 2 приходят в одинаковой фазе. Тогда точка $A$ — середина светлой полосы. Для простоты будем считать, что для точки $A$ оптическая разность хода интерферирующих волн равна нулю, а не просто кратна длине волны $\lambda$.

В точках $A$ и $C$ фазы первой световой волны равны, так как эти точки находятся на одной поверхности равных фаз, перпендикулярной лучу 1.

Аналогично в точках $A$ и $D$ фазы второй световой волны равны.

Тогда фаза 1-ой волны в точке $C$ равна фазе 2-ой волны в точке $D$, так как фазы двух волн одинаковы в точке $A$. Соответствующая разность хода для точек $C$ и $D$ равна нулю.

Волна 1 еще не дошла до точки $B$ на отрезок $CB$. Волна 2 уже прошла точку $B$ на отрезок $BD$.

Тогда разность хода $\Delta$ волн 1 и 2 для точки $B$ будет равна:

$$\Delta = CB + BD = AB \cdot \sin(\alpha_1) + AB \cdot \sin(\alpha_2) =$$

$$= AB \cdot (\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) \approx AB \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha \cdot AB, \text{ где}$$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ — угол между лучами 1 и 2.

Итак

$\Delta \approx \alpha \cdot AB$.

Пусть $AB$ — ширина интерференционных полос

$AB = d$.

Разность хода при переходе от одной светлой полосы к соседней светлой полосе изменяется на длину волны $\lambda$. Тогда при переходе от точки $A$ к точке $B$ разность хода изменяется на:

$\Delta = \lambda$.

Сравнивая это с равенством $\Delta \approx \alpha \cdot AB = \alpha \cdot d$, получаем:

$\lambda = \alpha \cdot d \quad =>$

$$d = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

Интересно, что ширина полос зависит только от угла между интерферирующими волнами и не зависит от любых других особенностей оптической схемы получения интерференции.

## Экзамен. Интерференция лазерных и интерференция нелазерных источников света.

Все источники света делятся на два класса: лазерные и нелазерные.

Рассмотрим сначала интерференцию лазерных источников света.

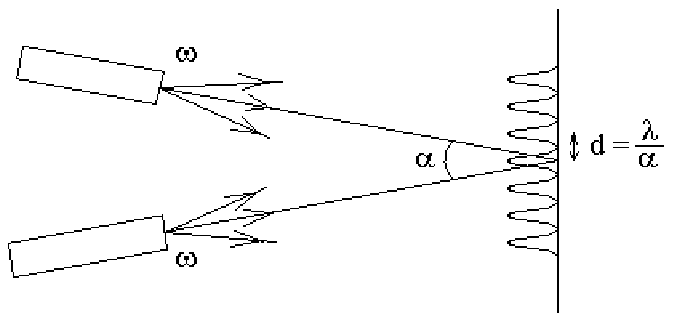
Для лазерного источника света излучение любых двух атомов усиливающей среды когерентно.

Источники света называются когерентными, если их свет способен интерферировать.

$I \neq \sum_m I_m$ — условие интерференции.

Для лазерных источников света даже излучение двух разных лазеров способно интерферировать. Интенсивность света при этом не постоянна, а испытывает биения, осциллирует, на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$, где $\omega_1$ и $\omega_2$ — частоты генерации двух рассматриваемых лазеров.

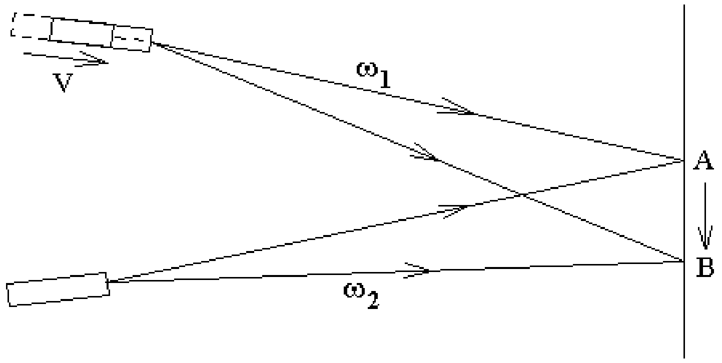
Рассмотрим два лазера, которые излучают широкие пучки света с одинаковой частотой $\omega$ и в одинаковой фазе.




На экране будут интерференционные полосы с шириной $d = \dfrac{\lambda}{\alpha}$.

Пусть некоторая точка экрана одинаково удалена от лазеров, и излучение в этой точке синфазно — разность фаз равна нулю. В этой точке будет середина светлой полосы, так как разность хода $\Delta$ для нее равна нулю $\Delta = 0$.

Что изменится, если верхний лазер начать двигать навстречу экрану со скоростью $V$?




Точка одинаково удаленная от лазеров начнет перемещаться вниз по экрану от точки $A$ к точке $B$. Если верхний лазер остановить, то в этой точке $B$ будет находиться середина светлой полосы, так как разность хода для нее равна нулю $\Delta = 0$.

Вместе с нулевой полосой, для которой $\Delta = 0$, и остальные интерференционные полосы будут двигаться вниз по экрану.

Будем считать, что частота излучения движущегося лазера в его собственной системе отсчета не изменяется во время движения и по-прежнему равна $\omega$.

В неподвижной системе отсчета, связанной с экраном, частота излучения верхнего лазера изменилась из-за эффекта Доплера:

Новая частота верхнего лазера в лабораторной системе отсчета равна $\omega_1 \approx \omega + \frac{V}{c}\omega$ при условии $V << c$, когда достаточно учитывать только линейный эффект Доплера.

Частота нижнего лазера $\omega_2$ по-прежнему сохраняется равной $\omega$.

В фиксированной точке экрана интенсивность света осциллирует с частотой $\omega_1 - \omega_2$. Эти осцилляции можно объяснить, как изменение разности хода $\Delta$, или как результат сложения волн с разными частотами. Это два описания одного и того же эффекта.

Следовательно, при интерференции двух световых волн с разными частотами $\omega_1$ и $\omega_2$ интерференционные полосы бегут по экрану. Полосы движутся вниз при условии $\omega_1 > \omega_2$.

Разность частот двух одинаковых неподвижных лазеров всегда шумит, то есть изменяется случайным образом в небольших пределах. При этом интерференционная картина на экране дрожит, смещаясь шумовым образом то вверх, то вниз.

---------

Для наблюдения интерференции излучения двух лазеров на приемнике света необходимо обеспечить выполнение двух условий.

1). Ширина полос $d = \frac{\lambda}{\alpha}$ должна быть больше ширины приемной площадки $D$ детектора света:

$$\frac{\lambda}{\alpha} > D.$$

Иначе на площадке приемника будет укладываться несколько интерференционных полос, и при движении полос средняя по площадке интенсивность почти не будет изменяться.

Если площадка прямоугольная, и ее ширина точно кратна ширине интерференционных полос, то средняя интенсивность на приемной площадке не изменяется при перемещении интерференционных полос.

2). Разность частот двух лазеров должна быть мала по сравнению с постоянной времени или инерционностью приемника света $\tau$:

$$\left|\omega_1 - \omega_2\right| < \frac{1}{\tau}.$$

Если второе условие не выполнено, то приемник сглаживает осцилляции интенсивности, и сигнал интерференции в фототоке приемника на частоте биений $\omega_1 - \omega_2$ будет отсутствовать.

Обычно второе условие выполнить гораздо труднее, чем первое.

---------

Рассмотрим теперь интерференцию нелазерных источников света.

Для нелазерных источников света излучение двух любых разных атомов некогерентно, потому что атомы излучают независимо друг от друга и со случайной разностью фаз. Следовательно, для нелазерных источников света излучение каждого атома может интерферировать только с излучением этого же атома.

Для нелазерных источников света любые два фотона, излученных одним и тем же атомом, некогерентны. Следовательно, для нелазерного источника света каждый фотон интерферирует только сам с собой.

---------

Обсудим подробнее, как это происходит.

Каждый атом после своего возбуждения излучает во все стороны затухающую световую волну — световой цуг. В этом световом цуге содержится всего один фотон — порция энергии $h\nu$, где $\nu$ — частота света.

Атом излучает электромагнитное поле световой волны во все стороны в соответствии с диаграммой направленности излучения диполя, а поглотить фотон можно только в одном месте.

Неправильно считать, что атом излучает фотон света в одну сторону, а мы, не зная в какую именно сторону он излучает, якобы вынуждены считать, что атом излучает во все стороны.

Дело в том, что излучение каждого атома, выпущенное в разные стороны, можно зеркалами собрать в одну точку экрана и заставить интерферировать. Например, в опыте Юнга излучение каждого атома проходит через две щели и интерферирует само с собой на экране. При этом интенсивность света на экране будет зависеть от разности фаз интерферирующих волн. Это и означает, что каждый атом излучает свет во все стороны, например, в стороны двух щелей.

Если бы атом не излучал одновременно в обе щели, а излучал бы то в одну щель, то в другую, то на экране не было бы интерференции.

Если один фотон проходит через две щели и интерферирует сам с собой, то нельзя ли за одной щелью поймать половину фотона $\frac{h\nu}{2}$? Нет нельзя. Можно поймать либо целый фотон $h\nu$, либо ничего.

Как же неделимый фотон проходит через две щели? Что именно проходит через две щели?

Свет имеет свойства и волны и частицы, но только по очереди, а не одновременно.

Атом излучает во все стороны волну вероятности поймать фотон. Иначе нельзя объяснить интерференцию нелазерных источников света. Комплексная напряженность электрического поля световой волны — это и есть волна вероятности поймать фотон или так называемая волновая функция. Хотя согласно теории вторичного квантования все не совсем так, но не забивайте себе голову.

Вероятность поймать фотон пропорциональна интенсивности света, то есть, пропорциональна квадрату модуля комплексного светового поля. Так как для монохроматического света модуль комплексного светового поля равен модулю комплексной амплитуды светового поля.

Аналогичные свойства волны и частицы имеет электрон и любая другая частица. Для любой частицы, как и для фотона, вероятность поймать частицу пропорциональна квадрату модуля волновой функции. Волновой функцией называют волну, которая соответствует частице.

---------

Лично я понимаю дуализм волна-частица следующим образом. Пока не пытаются определить на опыте координаты частицы (локализовать частицу или ее поймать) никакой частицы нет. Есть только волна. Эта волна дифрагирует на препятствиях и интерферирует сама с собой. Частицы при этом нет ни в каком смысле. Волна — это единственная реальность. Когда частицу ловят, волна мгновенно пропадает во всем пространстве. Волна пропадает, частица рождается. От волны остается только вероятность поймать частицу в разных точках пространства, которая пропорциональна квадрату модуля волны.

Интересно, что волна пропадает именно мгновенно, а не со скоростью света, что не совсем согласуется с теорией относительности. Размышления и обсуждения мгновенного изменения волны продолжаются в физике до сих пор. С этим связан вопрос о так называемых перепутанных квантовых состояниях, когда две части одной системы находятся далеко друг от друга, но описываются одной волновой функцией. Если измерить (изменить) состояние одной части системы, то мгновенно на любом расстоянии состояние другой части системы окажется соответствующим состоянию первой части.

Вы можете найти массу информации по этому вопросу в Интернете через поисковый сервер http://www.google.ru/ с запросом "парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена" или "ЭПР". Для начала рекомендую посмотреть статью в журнале Успехи физических наук, том 16, выпуск 4, страницы 436-457, 1936 год, которую можно найти по ссылке: http://ufn.ru/ufn36/ufn36_4/Russian/r364_b.pdf.

Кроме того, основные идеи квантовой механики можно посмотреть в первой и начале второй лекций моего курса по нелинейной лазерной спектроскопии

http://www.phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/NLLasSpectr.htm

до вопроса об уравнении Шредингера включительно.