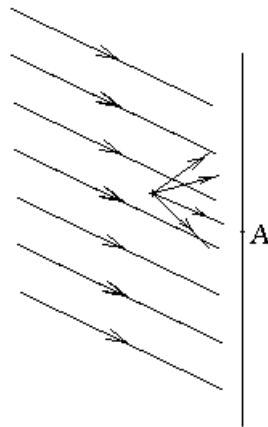


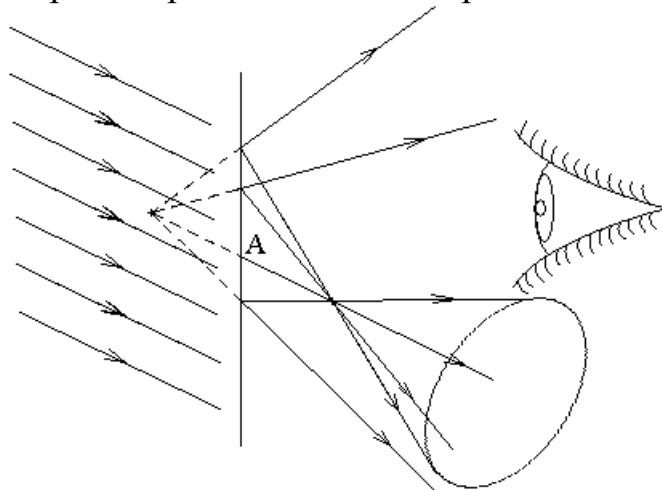
## Экзамен. Голограмма точки при наклонном падении опорной волны.

Запись голограммы.



Рассмотрим луч, который рассеян точечным объектом почти в направлении опорной волны. Этот луч проходит фотопластинку в некоторой точке  $A$ . Угол  $\alpha$  между двумя интерферирующими лучами для этой точки близок к нулю, а интерференционные полосы в точке  $A$  очень широкие  $d = \frac{\lambda}{\alpha}$ .

Рассмотрим теперь воспроизведение голограммы.



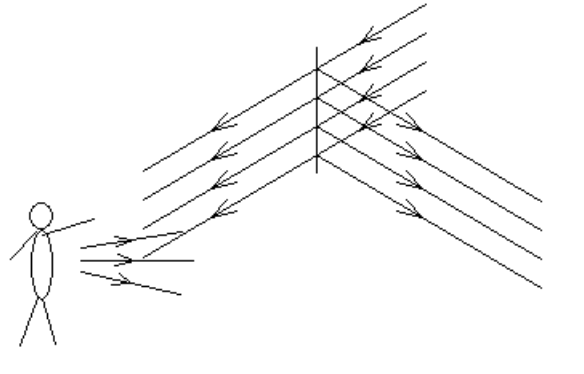
В окрестности точки  $A$  голограммы интерференционные полосы самые широкие. Для дифракционной решетки с широкими штрихами  $d$  нулевой и плюс-минус первый дифракционные максимумы направлены почти одинаково, так как характерные углы дифракции  $\frac{\lambda}{d}$  малы. Минус первые порядки дифракции разных участков голограммы должны пересекаться в точке действительного изображения. Следовательно, действительное изображение находится на продолжении луча, проходящего через точку  $A$  голограммы. Расстояние от голограммы до действительного изображения такое же, как от голограммы до восстановленного мнимого изображения точки рассеяния. Свет собирается в действительное изображение с большими aberrациями.

Как видно из рисунка, наклонное падение опорной волны позволяет сделать так, чтобы лучи, проходящие через действительное изображение, не

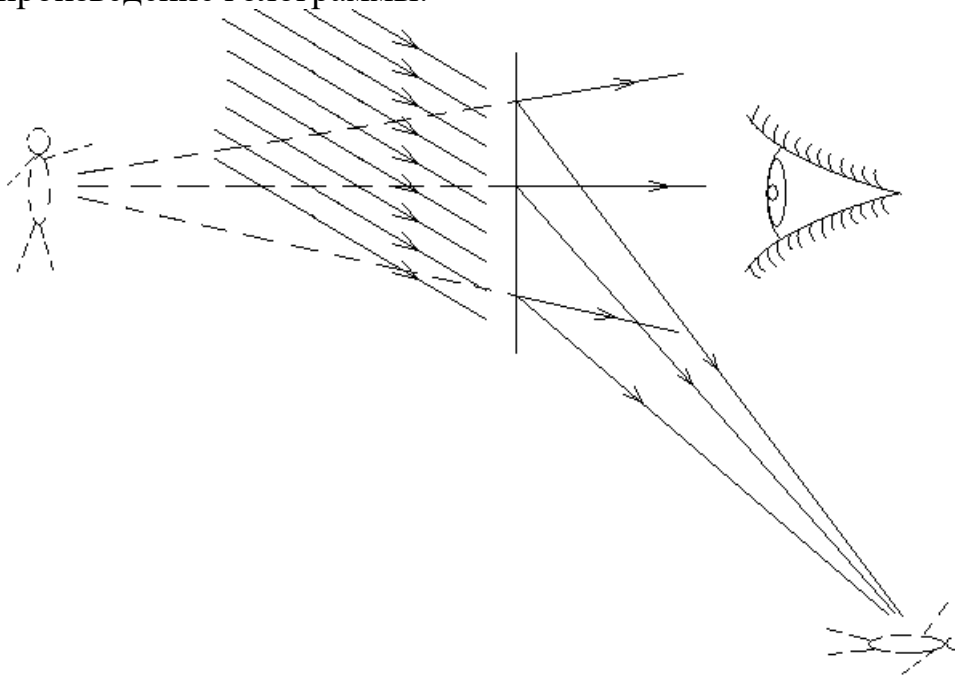
попадали в глаз и не мешали рассматривать восстановленное мнимое изображение.

### **Экзамен. Плоская голограмма протяженного объекта.**

Запись голограммы. Освещение объекта и опорная волна формируются из излучения одного лазера при расщеплении излучения на полупрозрачной пластине. Свет, рассеянный объектом и свет опорной волны интерферируют на фотопластинке.



Воспроизведение голограммы.



Изображение, полученное при восстановлении голограммы — объемное изображение. При разглядывании голограммы впечатление такое, что вы смотрите на голограмму, как в окно. Если один предмет мнимого изображения несколько загораживает другой предмет, то можно отклонить голову в сторону, чтобы увидеть заслоняемый объект. Для полной иллюзии окна не хватает только, чтобы изображение было цветным. Восстановленное изображение видно в монохроматическом свете опорной волны, которым производилась запись голограммы и которым голограмма воспроизводится.

### **Экзамен. Голографическая интерферометрия.**

Запишем на плоской фотопластинке голограмму поверхности некоторого предмета в монохроматическом свете.

Восстановим мнимое изображение этой поверхности с помощью голограммы и монохроматической опорной волны.

Одновременно с восстановлением изображения поместим реальную поверхность того же предмета на ее прежнее место туда, где находится ее восстановленное мнимое изображение. Пусть свет опорной волны падает на реальную поверхность предмета так же, как это было при записи голограммы.

В монохроматическом свете будут одновременно видны и реальная поверхность и ее восстановленное мнимое изображение. Если обе поверхности чуть сдвинуть относительно друг друга, то излучение, идущее от них, очень похоже на свет отраженный от плоскопараллельной пластины. Если между поверхностями будет малый угол, то это будет похоже на отражение света от оптического клина с малым углом. При этом будут наблюдаться интерференционные полосы равной толщины.

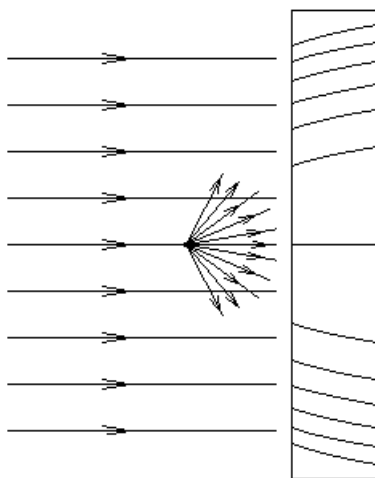
Если реальное тело чуть деформировать, то наблюдаемая поверхность покроется полосами равной толщины, отображающими деформацию тела. Разность хода при отражении от почти плоскопараллельной пластинки  $\Delta = 2nh \cdot \cos(\alpha)$ ,  $h$  — толщина пластинки,  $n=1$  (воздушный зазор),  $\alpha$  — угол преломления света (в данном  $n=1$  случае равный углу падения). При изменении разности хода на  $\lambda$  ширина зазора меняется на  $\frac{\lambda}{2 \cos(\alpha)}$ . При этом происходит визуализация малых деформаций величиной до долей микрона.

Это и есть метод голографической интерферометрии, позволяющий в реальном времени наблюдать и измерять малые деформации предмета.

### **Экзамен. Толстослойная голограмма.**

Рассмотрим голограмму одной точки с нормально падающей опорной волной. Пусть голограмма записывается в свете с длиной волны  $\lambda$ .

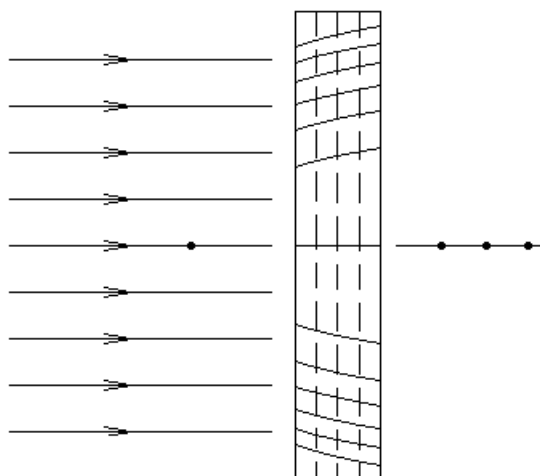
Запись голограммы.



Здесь справа толстослойная фотопластинка, и в ней изображены темные интерференционные полосы в сечении плоскостью рисунка. Задача обладает

осевой симметрией, и темные полосы в объеме фотопластинки представляют собой параболоиды вращения с осью, совпадающей с осью симметрии задачи. Фокусы параболоидов совпадают с рассеивающей свет точкой.

Воспроизведение голограммы.



Здесь точка слева от голограммы — восстановленное мнимое изображение точечного источника рассеянного света. Рассмотрим три пунктирные плоскости внутри голограммы, как три плоские голограммы. Для каждой из этих трех голограмм восстановленное мнимое изображение находится в одной и той же точке слева от голограммы. Действительные же изображения находятся симметрично мнимому изображению относительно соответствующей плоской голограммы, и для каждой плоской голограммы действительное изображение находится в своей точке. Это три точки справа от толстослойной голограммы.

Действительные изображения разных слоев голограммы находятся в разных точках, то есть действительное изображение смазано, и поэтому его не видно. Мнимые изображения находятся в одной точке и поэтому отчетливо видны.

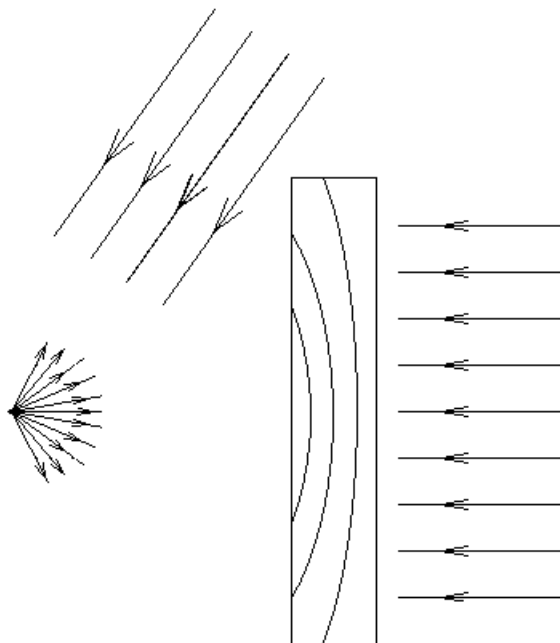
Плоская голограмма точки подобна зонной пластинке. Радиус  $m$ -ой зоны Френеля  $r_m = \sqrt{m\lambda L}$ . Если при восстановлении голограммы используется свет другой длины волны, то радиусы зон Френеля измениться не могут, так как голограмма уже проявлена и зафиксирована. Следовательно, изменится величина  $L \sim \frac{1}{\lambda}$ , и изображение, восстановленное в свете другой длины волны, окажется на другом расстоянии от голограммы. При этом для разных слоев толстослойной голограммы положения восстановленного изображения окажутся разными, не только для действительных изображений, но и для мнимых изображений. То есть изображения смажутся и не будут видны.

Если же восстанавливать голограмму, освещая ее белым светом, то толстослойная голограмма сама выберет длину волны, при которой ее записывали, и в этой длине волны сформирует мнимое изображение. Если при восстановлении голограммы ее освещать белым светом из другого направления, не совпадающим с направлением света при записи голограммы,

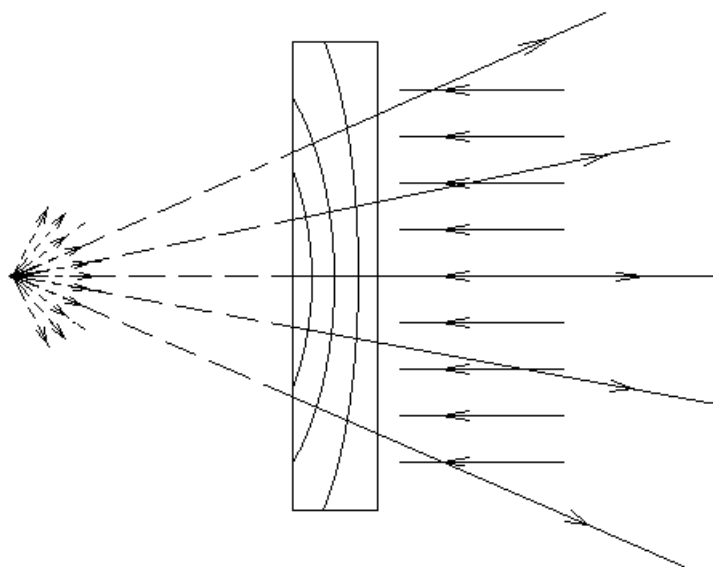
то восстановленное изображение будет искажено по форме и по цвету. При освещении голограммы рассеянным светом со всех направлений изображение смазывается.

Метод Денисюка — это метод записи толстослойной голограммы во встречных световых пучках. Это наиболее прогрессивный метод записи голограмм.

Запись голограммы точки:



Воспроизведение голограммы точки:



Голограмма работает, как многослойное зеркало. Отраженные волны от каждого слоя складываются синфазно в направлении восстановленной волны.

Преимущество записи во встречных пучках состоит в том, что воспроизведение голограммы происходит в отраженном свете, а не на просвет. Толстослойную голограмму и в этом случае можно восстанавливать в белом свете.

Для получения цветной голограммы запись производится в излучении лазеров трех цветов. В белом свете запись голограммы невозможна, потому что в белом свете не будет интерференционных полос. Воспроизведение голограммы, записанной в излучении трех лазеров, производится в сильном белом свете. Голограмма сама выбирает из белого света излучение трех длин волн, в которых производилась запись.

Можно рассчитать интерференционную картину голограммы на компьютере, например, в трех длинах волн, а затем черным цветом монохромным принтером напечатать цветную голограмму. При этом нужен принтер с высоким разрешением печати, желательный размер пикселя — меньше длины волны света.

### Дифракционный предел разрешения.

#### Экзамен. Дифракционный предел разрешения телескопа и глаза.

Будем считать, что телескоп — это одна линза (объектив) и экран в фокальной плоскости линзы. Будем считать, что прямо перед линзой объектива находится круглое отверстие в непрозрачном экране и диаметр отверстия равен диаметру линзы.

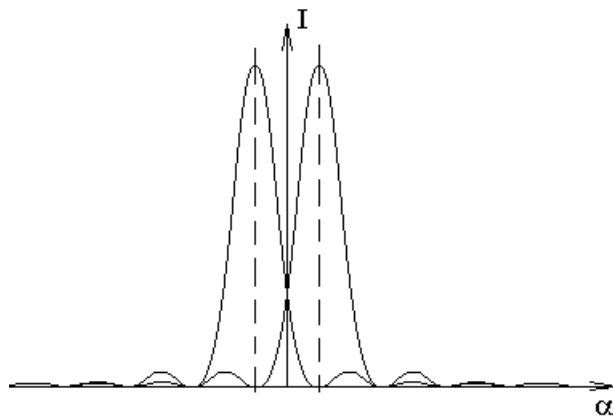
Свет далекой звезды приходит в виде почти плоской волны. В таком случае, в фокальной плоскости объектива наблюдается дифракция

Фраунгофера на круглом отверстии:  $I(\alpha) = I_0 \left( \frac{2J_1(U)}{U} \right)^2$ , где  $U = \frac{1}{2}kD \cdot \sin(\alpha)$ ,

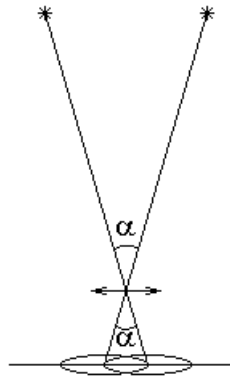
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число,  $D$  — диаметр отверстия. Угловой радиус первого

темного кольца дифракционного изображения  $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ .

Рассмотрим теперь две близкие звезды. По критерию Рэля звезды почти разрешены, если максимум интенсивности дифракционного изображения одной звезды совпадает с первым нулем интенсивности изображения другой звезды.



Рассмотрим луч, выходящий из центра звезды и проходящий через центр объектива. Этот луч приходит в центр диска Эйри дифракционного изображения звезды на экране. Рассмотрим такой луч для каждой из двух звезд.



Из рисунка видно, что угол между направлениями на две звезды равен углу из центра объектива в центры двух изображений звезд. А на пределе разрешения по критерию Рэля он же будет равен угловому радиусу первого темного кольца дифракционного изображения одной звезды.

В результате угловое разрешение телескопа или угол между направлениями на две звезды, при котором они едва разрешимы, равен угловому радиусу первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии:

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \text{ где } D \text{ — диаметр объектива телескопа.}$$

Аналогично телескопу угловое разрешение глаза равно

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D},$$

где  $D$  — диаметр зрачка глаза.

Угловое разрешение здорового глаза близко к дифракционному пределу разрешения.

-----

Рассмотрим еще одно объяснение того, что изображение удаленного точечного источника не является точечным, а имеет некоторый дифракционный размер.

Поверхность равных фаз перед линзой плоская, а за линзой — сферическая. Центр сферы находится в фокусе линзы. Рассмотрим излучение вторичных источников этой сферической поверхности равных фаз.

В фокусе линзы излучение вторичных источников синфазно, поэтому там большая амплитуда света.

При небольшом смещении точки наблюдения от фокуса на расстояние гораздо меньшее длины волны свет вторичных источников приходит в точку наблюдения почти синфазно, и амплитуда света в точке наблюдения тоже будет большой. Поэтому изображение неточечное.

Аналогично из рассмотрения интеграла Кирхгофа можно показать, что свет нельзя собрать на площадку размером меньше  $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$ .

### Экзамен. Понятие о разрешающей способности микроскопа.

Микроскоп — это одна линза — объектив и экран.

Чтобы получить увеличенное действительное изображение предмета нужно поместить предмет близко к фокальной плоскости линзы, чуть дальше от линзы. Действительное изображение при этом получается на большом расстоянии от линзы, большом по сравнению с фокусным расстоянием линзы.

Рассмотрим изображение точечного предмета. Если изображение точечного источника получается очень далеко, то свет сразу за линзой имеет почти плоский фронт волны. В таком случае свет сразу за линзой такой же, как без линзы при наблюдении дифракции Фраунгофера на круглом отверстии.

Для дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца равен:

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \text{ где } D \text{ — диаметр отверстия (в нашем случае диаметр линзы}$$

объектива микроскопа).

Точечный предмет (источник) дает изображение на экране в виде диска с радиусом первого темного кольца  $r = L\alpha = L \cdot 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , где  $L$  — расстояние от линзы до экрана.

Этот диск изображения (диск Эйри) можно отобразить обратно в предметную плоскость по законам геометрической оптики. Любая точка в этом кружке обратного изображения в предметной плоскости дает прямое изображение (еще одного диска Эйри), которое перекрывается с прямым изображением исходной точки, и два изображения неразличимы по критерию Рэлея.

Следовательно, разрешающая способность микроскопа  $l_{\min}$  равна радиусу кружка обратного изображения точки в предметной плоскости.

$l_{\min} = f\alpha$ , где  $f$  — фокусное расстояние объектива микроскопа, так как расстояние от предметной плоскости до объектива близко фокусному расстоянию объектива.

Подставим сюда угловое разрешение объектива  $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  и получим

$$l_{\min} = 1.22 \cdot \frac{\lambda \cdot f}{D} \text{ — разрешающая способность микроскопа или}$$

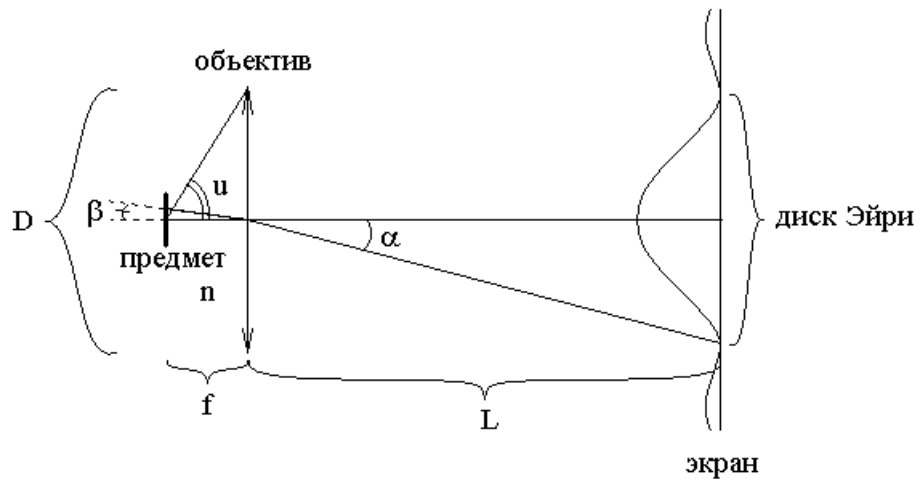
наименьшее расстояние между двумя точечными объектами, при котором они еще видны, как два объекта, а не сливаются в одно изображение. Здесь  $D$  — диаметр объектива,  $f$  — фокусное расстояние объектива.

-----

Сделаем некоторое уточнение.

Часто для увеличения разрешающей способности микроскопа и соответственно для уменьшения величины  $l_{\min}$  большую часть пространства между объективом и линзой объектива заполняют прозрачной средой с максимально возможным показателем преломления  $n$ .





Здесь  $f$  — фокусное расстояние объектива с учетом заполнения пространства между предметом и объективом средой с показателем преломления  $n$ ,  $D$  — диаметр объектива,  $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  — угловой радиус диска Эйри дифракционной картины образованной точечным источником света в плоскости изображения.

$$n \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha)$$

Здесь  $\beta$  — угловой размер обратного изображения по законам геометрической оптики диска Эйри в предметную плоскость.

В таком случае дифракционный предел разрешения:

$$l_{\min} = \beta f,$$

где

$$\beta \approx \sin(\beta) = \frac{1}{n} \sin(\alpha) \approx \frac{\alpha}{n} = 1.22 \frac{\lambda}{nD} = 0.61 \frac{\lambda}{n \frac{D}{2}} = 0.61 \frac{\lambda}{nf \cdot \operatorname{tg}(u)} \quad \Rightarrow$$

$$l_{\min} = \beta f = 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \operatorname{tg}(u)}.$$

Здесь  $2u$  — апертура микроскопа или угол, под которым из предмета виден входной зрачок (линза объектива).

Для реального микроскопа  $2u$  не является малым углом. В таком случае в первой же формуле  $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  (это угловой радиус первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии) была допущена некоторая неточность. Формула  $\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  справедлива, если во всех точках отверстия амплитуда светового поля одинаковая. В нашем же случае амплитуда поля на краю отверстия меньше, чем в центре отверстия, так как край отверстия находится дальше от рассматриваемого предмета в  $\frac{1}{\cos(u)}$  раз. В каком-то

смысле можно считать, что свет дифрагирует не на всем отверстии радиусом  $\frac{D}{2}$ , а только на его части примерно радиусом  $\frac{D}{2} \cos(u)$ . Тогда вместо полученного ранее выражения  $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n \frac{D}{2}}$  получаем  $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n \frac{D}{2} \cos(u)}$ .

Соответственно, вместо  $l_{\min} \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \operatorname{tg}(u)}$  получаем

$$l_{\min} \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \operatorname{tg}(u) \cdot \cos(u)} \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)}.$$

Более строгая теория разрешающей способности микроскопа (теория Аббе) дает для разрешающей способности микроскопа именно такой результат:

$$l_{\min} = 0.61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)},$$

где величина  $n \cdot \sin(u)$  называется числовой апертурой микроскопа.

### **Взаимодействие света с веществом.**

#### **Экзамен. Модель атома Томсона. Комплексная поляризуемость атомов.**

Когда Томсон придумывал свою модель атома, еще не было известно, что в атоме есть положительное ядро. Томсон представлял себе атом, как положительную каплю объемного заряда, в которой плавают точечные электроны.

Сегодня логичнее считать наоборот. Точечное положительное ядро плавает в центре почти недеформирующегося объемного заряда электронов. Точнее электронное облако слегка смещается относительно неподвижного ядра, так как почти вся масса атома сосредоточена в его ядре.

В соответствии с этой моделью атома будем считать, что электронное облако образует шар с постоянной плотностью заряда  $(-\rho)$ , где  $\rho > 0$ . Под действием внешнего электрического поля  $\vec{E}$  световой волны смещается только электронная оболочка. Электронная оболочка смещается без деформации. Со стороны ядра на оболочку действует возвращающая сила.

Составим дифференциальное уравнение для движения электронной оболочки, как целого.

Пусть  $\vec{F}_1$  — сила, действующая на электронную оболочку со стороны светового поля  $\vec{E}$ .

$\vec{F}_1 = (-q) \cdot \vec{E}$ , где  $q$  — заряд атомного ядра, а  $(-q)$  — заряд электронной оболочки.

Пусть  $\vec{F}_2$  — сила, действующая на электронную оболочку со стороны атомного ядра. Гораздо проще найти равную ей силу, с которой электронная оболочка действует на ядро. Для этого надо найти электрическое поле

однородно заряженного шара с плотностью заряда  $(-\rho)$  и умножить поле на заряд ядра  $q$ .

Электрическое поле шара можно найти по теореме Гаусса

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad ES = 4\pi(-\rho)V \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (-\rho) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}.$$

Силу, действующую на электронную оболочку со стороны ядра, мы обозначили, как  $\vec{F}_2$ . Тогда сила, действующая на ядро со стороны электронной оболочки, отличается знаком:

$$-\vec{F}_2 = q \cdot \vec{E} = q \cdot \left(-\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F}_2 = \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r}.$$

Здесь  $\vec{r}$  — вектор, проведенный из центра электронной оболочки в атомное ядро. Заменяем  $\vec{r} \rightarrow (-\vec{r})$ , тогда

$$\vec{F}_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} \text{ — сила, действующая на электронную оболочку со стороны}$$

ядра,  $\vec{r}$  — вектор, проведенный из ядра в центр масс электронного облака.

Второй закон Ньютона для электронной оболочки атома примет следующий вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\ddot{\vec{r}},$$

где  $\ddot{\vec{r}}$  — вторая производная от радиус-вектора электронной оболочки по времени или ускорение электронной оболочки.

Подставим значения  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и получим

$$-q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}$$

Добавим в уравнение движения вязкое трение в виде силы  $\vec{F}_3$  пропорциональной скорости  $\dot{\vec{r}}$

$$\vec{F}_3 = -2\gamma m\dot{\vec{r}}.$$

Здесь вязкое трение введено вместо потерь энергии электронной оболочки на излучение световых волн. На самом деле потери на излучение не совсем такие, но с такими потерями уравнение легче решается.

С учетом силы вязкого трения  $\vec{F}_3$  уравнение движения примет следующий вид

$$-q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} - 2\gamma m\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \quad \Rightarrow$$