**Факультатив. Рэлеевское рассеяние света в мутной среде.**

Рэлеевское рассеяние света — это рассеяние, которое удовлетворяет двум условиям: во-первых, при рассеянии не изменяется частота света (упругое рассеяние), а во-вторых, рассеяние происходит на объектах, размеры которых меньше длины волны света. Неупругое рассеяние света — это комбинационное рассеяние (рассеяние Рамана), а рассеяние на больших частицах — это рассеяние Ми.

Упругое рассеяние света на частицах состоит в отражении, преломлении и дифракции света. Когда размер частицы меньше $\frac{\lambda}{2}$, разделить эти три вклада невозможно. Упругое рассеяние света большим телом — это рассеяние поверхностью твердого или жидкого тела. Другими словами — это отражение света от неровностей поверхности. Оба вида рассеяния велики только в том случае, если размер рассеивающих неровностей больше, чем $\frac{\lambda}{2}$.

Рэлеевское рассеяние в мутной среде вызвано тем, что частица под действием света приобретает осциллирующий дипольный момент, который излучает во все стороны, а не только в направлении падающей световой волны.

Примеры рассеяния света в мутной среде — это рассеяние света в тумане или в молоке.

Рассмотрим рассеяние света на водных каплях тумана в воздухе. Для простоты будем считать, что радиус капли $r_0$ мал по сравнению с длиной волны света $\lambda$. На самом деле свет хорошо рассеивается как раз при обратном неравенстве, но аналитическое решение задачи в этом случае гораздо сложнее.

Интенсивность рассеянного света можно найти в результате рассмотрения следующей логической цепочки: $\vec{E} \to \vec{E}' \to \vec{P} \to \vec{p} \to E_\theta \to I(\theta)$.

Здесь:

$\vec{E}$ — поле падающей световой волны,

$\vec{E}'$ — световое поле внутри капли воды,

$\vec{P}$ — наведенная светом поляризация внутри капли воды,

$\vec{p}$ — осциллирующий дипольный момент всей капли воды,

$E_\theta$ — поле излучения этого диполя,

$I(\theta)$ — интенсивность света излучения диполя в зависимости от угла рассеяния $\theta$.

Во всех частях капли малого размера $r_0 << \lambda$ световое поле почти одинаково без фазового сдвига, связанного со временем распространения.

Поле внутри водяного шара $\vec{E}'$ отличается от внешнего поля $\vec{E}$ на поле поляризованного шара внутри самого шара $\left(-\frac{4}{3}\pi\vec{P}\right)$:

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Поле поляризованного шара рассматривается в курсе электричества.

Факультативная вставка.

Заметим, что выражение $\vec{E}' = \vec{E} - \frac{4}{3}\pi\vec{P}$ похоже на другое выражение $\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$, где $\vec{E}'$ — поле, действующее на молекулу; $\vec{E}$ — среднее поле в среде неполярного диэлектрика; $\vec{P}$ — поляризация диэлектрика.

Выражения похожи по форме, но не связаны по содержанию.

Конец факультативной вставки.

Поляризация среды $\vec{P}$ определяется электрическим полем $\vec{E}'$ внутри среды:

$$\vec{P} = \chi\vec{E}' \quad =>$$

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{4}{3}\pi\chi\vec{E}' \quad =>$$

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{1 + \frac{4}{3}\pi\chi}$$ — световое поле внутри капли воды. Тогда

$$\vec{P} = \chi\vec{E}' = \frac{\chi}{1 + \frac{4}{3}\pi\chi}\vec{E}$$ — поляризация среды в капле воды.

Подставим сюда выражение для диэлектрической восприимчивости среды $\chi$ через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon$.

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi \quad => \quad \chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$$

И получим

$$\vec{P} = \frac{\chi}{1 + \frac{4}{3}\pi\chi}\vec{E} = \frac{\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}}\vec{E} \quad =>$$

$$\vec{P} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \vec{E}$$ — наведенная светом поляризация внутри капли воды.

$$\vec{p} = \vec{P}V = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \vec{E} \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3$$ — осциллирующий дипольный момент всей капли воды. Откуда получаем

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot \vec{E}.$$

Рассмотрим поле диполя осциллирующего вдоль оси $z$:

$$E_{\theta'}(t, \vec{r}) = B_{\varphi}(t, \vec{r}) = \frac{\ddot{p}_z\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c^2 r} \cdot \sin(\theta')$$, где $\theta'$ и $\varphi$ — углы сферической системы координат. Чуть позднее обозначение $\theta$ без штриха нам понадобится для другого угла.

Здесь векторы $E_{\theta'}$ и $\ddot{p}_z$ связаны формулой в разные моменты времени, но для нас в дальнейшем это будет несущественно.

Для монохроматического светового поля дипольный момент рассматриваемой капли воды гармонически осциллирует с частотой светового поля $\omega$: $p = p_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. Тогда $\ddot{p} = -\omega^2 p$. Подставим это в выражение для $E_{\theta'}$ и получим:

$$E_{\theta'} = -\frac{\omega^2 p}{c^2 r} \cdot \sin(\theta').$$

Подставим сюда $\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot \vec{E}$ и получим

$$E_{\theta'} = -\frac{\omega^2}{c^2 r} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot E \cdot \sin(\theta'),$$

где $E$ — напряженность поля падающей волны, $\theta'$ — угол между направлением рассеяния света (направлением излучения диполя $\vec{p}$) и направлением самого диполя $\vec{p}$, которое совпадает с направлением вектора $\vec{E}$ падающей на каплю световой волны.

Пусть капля воды висит в воздухе, для которого показатель преломления близок к единице. Тогда связь интенсивности рассеянного света с его напряженностью имеет следующий вид:

$$I(\theta') = \frac{cn}{4\pi\mu} \left\langle E_{\theta'}^2 \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi} \left\langle E_{\theta'}^2 \right\rangle_t.$$

Подставим сюда $E_{\theta'} = -\frac{\omega^2}{c^2 r} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot E \cdot \sin(\theta')$ и получим

$$I(\theta') = \left( -\frac{\omega^2}{c^2 r} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot r_0^3 \cdot \sin(\theta') \right)^2 \cdot \frac{c}{4\pi} \left\langle E^2 \right\rangle_t.$$

Здесь $\frac{c}{4\pi} \left\langle E^2 \right\rangle_t = I_0$ — интенсивность падающей на каплю световой волны. Тогда

$$I(\theta') = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \sin^2(\theta') \cdot I_0.$$

Подставим сюда $\varepsilon = n^2$ и получим

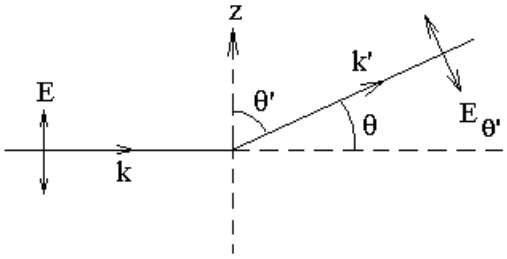
$$I(\theta') = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \sin^2(\theta') \cdot I_0.$$

Обычно рассматривают рассеяние естественного неполяризованного света. В таком случае нужно усреднить интенсивность рассеянного света по разным значениям угла $\theta'$ между направлением рассеяния и направлением колебания диполя. Дело в том, что в неполяризованном свете направление колебаний диполя изменяется случайным образом.

Получим теперь интенсивность рассеянного света, как функцию от другого угла — от угла рассеяния $\theta$.

Рассмотрим рассеяние на угол $\theta$ раздельно для двух ортогональных поляризаций падающей световой волны. Для неполяризованного света падающей волны каждая поляризация будет иметь интенсивность $\frac{I_0}{2}$ равную половине интенсивности неполяризованной волны.

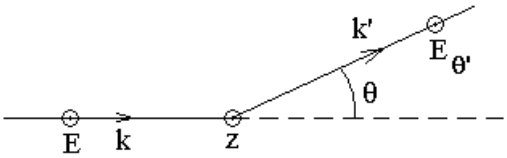
Сначала рассмотрим рассеяние света, поляризация которого лежит в плоскости волновых векторов падающей и рассеянной волн.




Из рисунка видно, что $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$ => $\sin^2(\theta') = \cos^2(\theta)$ =>

$$I_1(\theta) = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \sin^2(\theta') \cdot \frac{I_0}{2} = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \frac{I_0}{2}.$$

Рассмотрим теперь поляризацию падающей волны перпендикулярную плоскости рассеяния света.




В этом случае направление колебаний диполя перпендикулярно плоскости рисунка, и угол $\theta'$ между направлением диполя и направлением рассеяния равен $\frac{\pi}{2}$.

$\sin^2(\theta') = 1$ =>

$$I_2(\theta) = \frac{\omega^4}{c^4 r^2} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \cdot r_0^6 \cdot \frac{I_0}{2}.$$

Интенсивность рассеянного света равна сумме интенсивностей рассеянных волн в двух поляризациях:

$I(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta)$.

Окончательно получаем интенсивность $I$ рассеяния неполяризованного света в зависимости от угла рассеяния $\theta$:

$$I(\theta)=\frac{\omega^4}{c^4 r^2}\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\cdot r_0^6\cdot\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}\cdot I_0.$$

Здесь $r$ — расстояние от рассеивающей капли до точки наблюдения, $n$ — показатель преломления капли, $r_0$ — радиус капли, $I_0$ — интенсивность падающей волны.

Проанализируем результирующую формулу.

1). $I(\theta)\sim\frac{\omega^4}{c^4}=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4$ =>

Короткие световые волны рассеиваются гораздо эффективнее, чем длинные. В результате этого при рассеянии белого света рассеивается голубой свет (голубое небо), а проходит красноватый свет (красное солнце на восходе и закате, когда свет проходит большую толщину воздушного слоя).

2). $I(\theta)\sim r_0^6$ =>

Частицы малого размера рассеивают свет гораздо меньше, чем частицы большего размера. Соответственно рассеяние света отдельными атомами очень мало.

3). Рассеянный свет частично поляризован, так как для одной поляризации $I(\theta)\sim\frac{\cos^2(\theta)}{2}I_0$, а для другой поляризации $I(\theta)\sim\frac{I_0}{2}$. Свет, рассеянный перпендикулярно падающему свету, полностью поляризован, так как в этом случае $\cos^2(\theta)=0$. Свет от неба частично поляризован, и если на небо смотреть через поляроид в направлении перпендикулярном направлению на солнце, то поворотом поляроида можно ослабить рассеянный свет.

**<u>Факультатив. Рэлеевское рассеяние света на флуктуациях плотности газа.</u>**

Рэлеевское рассеяние света — это рассеяние без изменения частоты света на объектах, размеры которых гораздо меньше длины волны. Рассмотренное в предыдущем вопросе рассеяние света в мутной среде — это тоже рэлеевское рассеяние света. Рассмотрим частный случай рэлеевского рассеяния — рассеяние света на флуктуациях плотности газа.

Голубое небо и красное солнце у горизонта — это результат рэлеевского рассеяния именно на флуктуациях плотности газа.

Рассмотрим любой малый объем газа. Плотность газа и показатель его преломления в рассматриваемом объеме случайно отличаются от средних значений этих величин. Рассеяние на этих неоднородностях мы и будем рассматривать.

Величина рассеяния зависит от того, насколько число молекул газа в рассматриваемом объеме случайно отличается от среднего значения. Чтобы оценить это отличие будем считать, что молекулы влетают в рассматриваемый объем и вылетают из него независимо друг от друга. Это справедливо, если длина свободного пробега молекул гораздо больше размеров рассматриваемого

объема. На самом деле длина свободного пробега молекул воздуха при атмосферном давлении примерно 0.15 мкм, а линейные размеры рассматриваемого объема флуктуации меньше 0.25 мкм. То есть требуемое неравенство не выполнено, зато анализ будет гораздо проще.

Если молекулы влетают в объем независимо друг от друга, то число молекул в объеме подчиняется распределению Пуассона:

$p(K)=\frac{\langle K\rangle^K}{K!}\cdot e^{-\langle K\rangle}$, где $p(K)$ — вероятность того, что в объеме $V$ окажется ровно $K$ молекул.

Средний квадрат отклонения от среднего значения нужно вычислять по обычной формуле усреднения, как сумму произведений вероятности значения на само усредняемое значение:

$$\left\langle\left(K-\langle K\rangle\right)^2\right\rangle=\sum_{K=0}^{+\infty}p(K)\cdot\left(K-\langle K\rangle\right)^2.$$

Подставляя сюда $p(K)=\frac{\langle K\rangle^K}{K!}\cdot e^{-\langle K\rangle}$, ряд удается просуммировать и оказывается, что средний квадрат отклонения от среднего значения для распределения Пуассона равен самому среднему значению:

$$\left\langle\left(K-\langle K\rangle\right)^2\right\rangle=\langle K\rangle.$$

---

Выразим интенсивность рассеяния света, полученную в предыдущем вопросе, через число молекул в объеме рассеивающей частицы.

В формуле рэлеевского рассеяния

$$I(\theta)=\frac{\omega^4}{c^4r^2}\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\cdot r_0^6\cdot\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}\cdot I_0$$

внесем изменение в соответствии с формулой Лоренц-Лорентца

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4}{3}\pi N\alpha$$

тогда

$$I(\theta)=\frac{\omega^4}{c^4r^2}\left(\frac{4}{3}\pi N\alpha\right)^2 r_0^6\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}I_0=\frac{\omega^4}{c^4r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3N\right)^2\alpha^2\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}I_0$$

Подставим сюда объем шара $V=\frac{4}{3}\pi r_0^3$ и получим

$$I(\theta)=\frac{\omega^4\alpha^2}{c^4r^2}\cdot(NV)^2\cdot\frac{1+\cos^2(\theta)}{2}\cdot I_0.$$

Здесь $N$ — концентрация молекул, $NV$ — число молекул в рассматриваемом объеме.

До этого момента мы использовали формулу рассеяния света на частицах мутной среды, только преобразовали эту формулу к другому виду.

Оказывается, что для рассеяния света на флуктуациях плотности нужно в формуле рассеяния на частице мутной среды заменить

$$(NV)^2 \to NV .$$

Обозначим число молекул в рассматриваемом объеме, как

$$K \equiv NV .$$

Число молекул в рассматриваемом объеме — это величина случайная, флуктуирующая величина.

В нашем случае рассеяния света на флуктуациях рассеяние возникает только за счет отличия $K$ от среднего значения $\langle K \rangle$. Поэтому в формуле для рассеянного света нужно заменить $K^2$ на $\left\langle \left( K - \langle K \rangle \right)^2 \right\rangle$.

Тогда

$$(NV)^2 = K^2 \to \left\langle \left( K - \langle K \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle K \rangle = NV .$$

Следовательно, в формуле для интенсивности рассеянного света

$$I(\theta) = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \cdot (NV)^2 \cdot \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} \cdot I_0$$

нужно заменить

$$(NV)^2 \to NV .$$

В результате получим

$$I(\theta) = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \cdot NV \cdot \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} \cdot I_0 .$$

Окончательную формулу запишем в следующем виде:

$$\left\langle \frac{I(\theta)}{NV} \right\rangle = \frac{\omega^4 \alpha^2}{c^4 r^2} \cdot \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} \cdot I_0 .$$

Здесь $\left\langle \frac{I(\theta)}{NV} \right\rangle$ — средняя интенсивность света рассеянного одной флуктуацией, отнесенная к числу молекул в объеме флуктуации. Это интенсивность рассеянного света, приведенная к одной молекуле. Рассматривается интенсивность, рассеянная в направлении образующем угол $\theta$ с первоначальным направлением света.

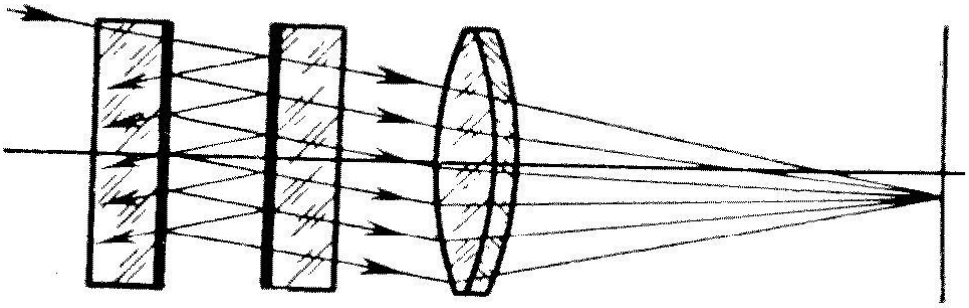
Из полученной формулы видно, что интенсивность света, рассеянного как бы каждой молекулой, не зависит от размера рассеивающей свет флуктуации. То есть эту величину не нужно усреднять по всем возможным размерам флуктуаций.

## **Факультатив. Интерферометр Фабри — Перо.**

В интерферометре Фабри — Перо наблюдается многолучевая интерференция.

Интерферометр Фабри — Перо — это лазер без усиливающей свет среды, когда остаются только два зеркала.

Зеркала в общем случае сферические, но мы рассмотрим только простейший интерферометр Фабри — Перо с двумя плоскими зеркалами и рассмотрим его очень коротко.



Пусть снаружи на интерферометр нормально падает плоская монохроматическая волна света. Каждое из зеркал имеет высокий амплитудный коэффициент отражения $r_1$ и $r_2$ и небольшой амплитудный коэффициент пропускания $\tau_1$ и $\tau_2$. Расстояние $L$ между зеркалами заполнено средой с показателем преломления $n$.

Рассмотрим амплитуду световой волны, проходящей через интерферометр. Световая волна будет многократно проходить пространство между зеркалами, каждый раз отражаясь от одного из двух зеркал. Каждый раз волна, падающая на зеркало, будет частично проходить сквозь него. Амплитуда волны на выходе из интерферометра $\tilde{E}_{0_{вых}}$ представляет собой бесконечный ряд амплитуд вышедших сквозь только второе зеркало световых волн:

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = \tilde{E}_{0_{вх}}\tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}}\tau_2 + \tilde{E}_{0_{вх}}\tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_2 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}}\tau_2 +$$

$$+\tilde{E}_{0_{вх}}\tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_2 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_2 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}} r_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}}\tau_2 + \ldots$$

здесь $\tilde{E}_{0_{вх}}$ — амплитуда падающей на интерферометр волны; $\tilde{E}_{0_{вх}}\tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}}\tau_2$ — амплитуда волны, прошедшей интерферометр без отражений; $\Delta = nL$ — оптическая длина пути между зеркалами.

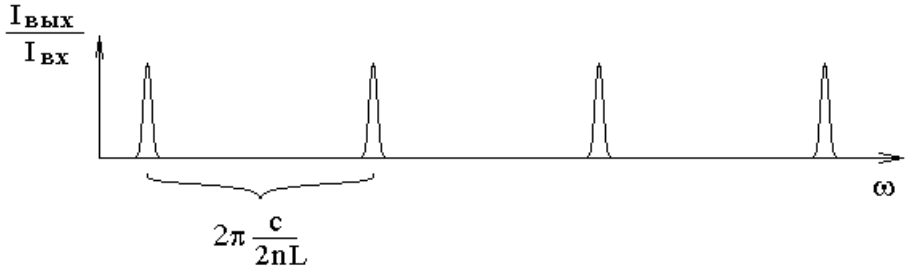
Ряд представляет собой геометрическую прогрессию и легко суммируется:

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = \frac{\tilde{E}_{0_{вх}}\tau_1 e^{i2\pi\frac{\Delta}{\lambda}}\tau_2}{1 - r_1 r_2 e^{4\pi i\frac{\Delta}{\lambda}}}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды:

$$I_{вых} = I_{вх}\left|\frac{\tau_1\tau_2}{1 - r_1 r_2 e^{4\pi i\frac{\Delta}{\lambda}}}\right|^2 .$$

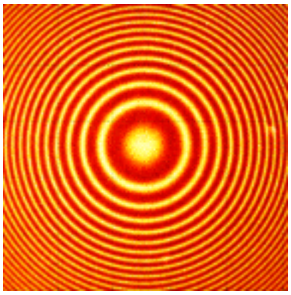
График этой зависимости имеет следующий вид:

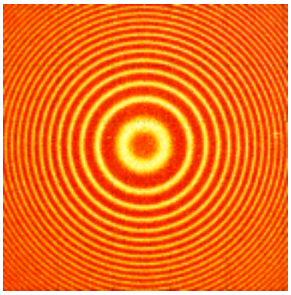



.

Чем выше коэффициенты отражения зеркал, тем уже частотные пики пропускания света. В лазере потери зеркал на пропускание компенсируются усилением лазерной среды, и пики становятся бесконечно узкими — это продольные моды излучения лазера.

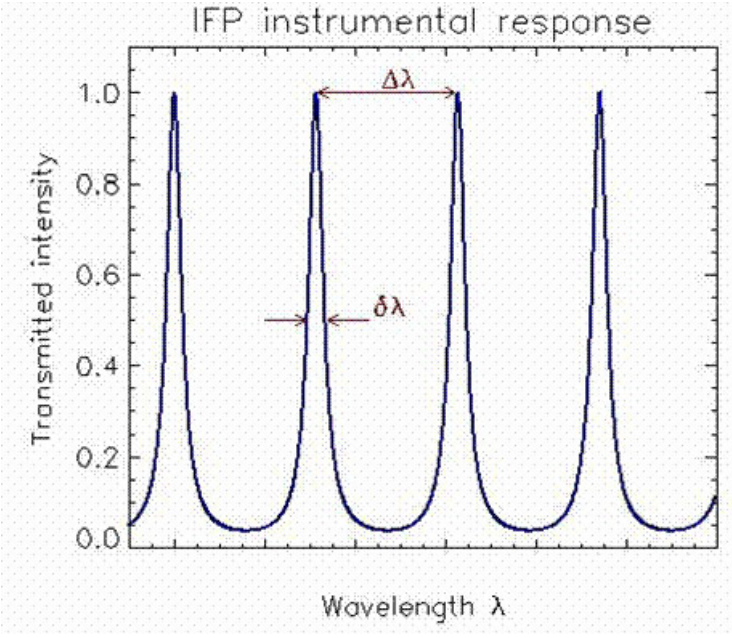
Заметим, что, если угол $\alpha$ падения света на интерферометр отличен от нуля, то оптическая разность хода волны, которая не отражается от зеркал, и волны, которая отражается от каждого из зеркал по одному разу, равна $2\Delta = 2nL\cdot\cos(\alpha)$, как и при отражении света от плоскопараллельной пластинки, а не $\frac{2nL}{\cos(\alpha)}$, как могло бы показаться.





Основными характеристиками интерферометра Фабри-Перо являются интервал свободной дисперсии и резкость.

Интервал свободной дисперсии — это частотное расстояние между пиками пропускания или какой участок спектра можно рассмотреть без наложения пиков пропускания разных порядков: $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$. Если $n$ — показатель преломления среды между зеркалами, то $\Delta\lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{2nL}$, где $\lambda_0$ — длина волны света снаружи от интерферометра. Соответственно $\Delta\nu = \frac{c}{2nL}$.




Резкость интерферометра Фабри — Перо $R$ — это отношение интервала свободной дисперсии $\Delta\lambda$ к ширине на полувысоте пика пропускания $\delta\lambda$. $R \equiv \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \approx \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}$, где $r_1$ и $r_2$ — амплитудные коэффициенты отражения зеркал интерферометра.

## Факультатив. Нелинейная оптика.

Световое поле на частоте $\omega$ наводит дипольный момент атома на той же частоте $\omega$. В линейной оптике считают, что дипольный момент линейно зависит от напряженности светового поля:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}.$$

Величина дипольного момента равна произведению заряда электронной оболочки на величину смещения ее центра масс относительно ядра атома.

Если смещение будет большим, то электронная оболочка оторвется от атома. По этой причине в сильном световом поле $\vec{E}$ не может быть линейной зависимости $\vec{p} = \alpha \vec{E}$.

Для нелинейной зависимости можно считать, что сама поляризуемость не постоянна, а зависит от величины электрического поля.

Если поляризуемость зависит от поля $\vec{E}$ световой волны, то от него будут зависеть и показатель преломления среды, и коэффициент поглощения среды.

Наличие этих зависимостей приводит к новым оптическим явлениям так называемой нелинейной оптики.

Нелинейная зависимость дипольного момента от напряженности светового поля приводит к нелинейной зависимости поляризации среды от светового поля. Эту зависимость всегда можно представить в виде ряда Тейлора по степеням напряженности светового поля $E$:

$$P(t) = \chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \ldots$$

Здесь $\chi^{(1)} = \chi$ — обычная (линейная) восприимчивость среды для поля $E$ оптической частоты. Для разреженной среды восприимчивость равна произведению концентрации на поляризуемость одной молекулы $\chi = N\alpha$.

**<u>Факультатив. Оптическое удвоение частоты. Оптическое детектирование.</u>**

Учтем зависимость поляризуемости атомов или молекул $\alpha$ от вещественной напряженности электрического поля $E$ световой волны. Если среда изотропная, то поляризуемость не изменяется при изменении направления вещественного поля $\vec{E}$ на противоположное. В таком случае разложение поляризуемости в ряд Тейлора содержит только четные степени поля $E$. Для анизотропной среды поляризуемость может иметь и нечетные степени в разложении по степеням поля $E$. Для слабого поля оставим только первую поправку к поляризуемости:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 E.$$

Тогда

$$p = \alpha E = \alpha_0 E + \alpha_1 E^2.$$

Пусть световое поле имеет вид

$E = E_0 \cdot \cos(\omega t)$, тогда

$$p = \alpha_0 E_0 \cos(\omega t) + \alpha_1 E_0^2 \cos^2(\omega t) \qquad =>$$

$$p = \alpha_0 E_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\alpha_1 E_0^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 E_0^2 \cos(2\omega t)$$

Диполь кроме колебаний на частоте поля $\omega$ испытывает колебания на удвоенной частоте $2\omega$.

Если излучения разных диполей на частоте $2\omega$ будут синфазными, то излучение на частоте $2\omega$ будет иметь большую амплитуду. Это так называемое условие синхронизма.

---

Постоянное слагаемое $\frac{1}{2}\alpha_1 E_0^2$ создает постоянный дипольный момент в каждой молекуле. Эти наведенные световым полем постоянные диполи создают постоянное электрическое поле вокруг среды.

Эффект возникновения этого постоянного электрического поля называют оптическим детектированием.

**<u>Факультатив. Самофокусировка.</u>**

Показатель преломления изотропной среды в сильном световом поле изменяется. Для изотропной среды в разложении показателя преломления в ряд Тейлора будут только четные степени напряженности светового поля. Если учесть только первое слагаемое в разложении по степеням поля, то

$$n = n_0 + n_2 E^2.$$

В изотропной среде нет линейного по полю слагаемого, так как изменение направления светового поля на противоположное направление не

может изменить показатель преломления изотропной среды, иначе среда была бы анизотропной.

Добавка к показателю преломления может быть как положительной, так и отрицательной.

Если добавка положительная $n_2 > 0$, то показатель преломления в лазерном луче увеличивается.

В среде с переменным показателем преломления свет поворачивает в сторону увеличения показателя преломления.

Если изменение показателя преломления достаточно велико, то лазерный луч самостоятельно фокусируется в нелинейной среде, а затем не расходится и распространяется далее в виде тонкого шнура.

Это и есть самофокусировка луча.

**<u>Факультатив. Комбинационное или рамановское рассеяние света.</u>**

Рассеяние Рамана не наблюдается в среде, состоящей из отдельных атомов, а только в молекулярных средах.

Колебания атомов молекулы на частоте $\Omega$ приводят к колебаниям поляризуемости молекулы $\alpha$:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}.$$

Вдали от линии поглощения сдвиг фаз между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$ можно не учитывать, тогда можно рассмотреть вещественные векторы $\vec{p}$ и $\vec{E}$. Изменение поляризуемости в результате колебаний атомов молекулы имеет вид:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos(\Omega t).$$

Рассмотрим колеблющуюся молекулу в световом поле с частотой $\omega$. Колебания поляризуемости с частотой $\Omega$ приводят к тому, что электрический диполь молекулы в световом поле совершает колебания не на одной частоте $\omega$, а на трех частотах $\omega, \omega \pm \Omega$:

$$p = \alpha E = \left(\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\Omega t)\right) \cdot E_0 \cos(\omega t) =$$

$$= E_0 \cdot \left(\alpha_0 \cos(\omega t) + \alpha_1 \cos(\Omega t) \cos(\omega t)\right) =$$

$$= E_0 \cdot \left(\alpha_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\alpha_1 \cos\left((\omega + \Omega)t\right) + \frac{1}{2}\alpha_1 \cos\left((\omega - \Omega)t\right)\right).$$

На этих же трех частотах $\omega, \omega \pm \Omega$ молекула излучает или, как говорят, рассеивает свет.

Излучение на частоте $\omega - \Omega$ называют стоксовой компонентой рассеяния, излучение на частоте $\omega + \Omega$ — антистоксовой компонентой рассеяния.

---

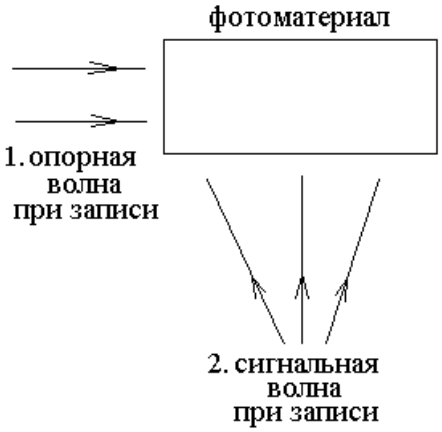
Вынужденное комбинационное рассеяние — это случай, при котором биения частот падающего и рассеянного излучения заметно раскачивают колебания молекулы на частоте биений $\Omega$. Увеличение колебаний молекулы приводит к увеличению рассеяния и т. д. В результате при вынужденном рассеянии рассеянная волна стоксовой компоненты $\omega - \Omega$ становится соизмеримой с падающей волной.

---

Иногда комбинационным рассеянием называют любой процесс с излучением и поглощением света на разных, но близких, частотах. Процесс может происходить не только с молекулами, но и с атомами. Это комбинационное рассеяние в широком смысле.

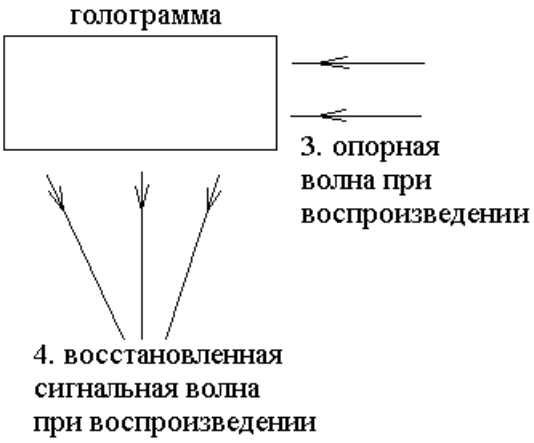
## Факультатив. Обращение волнового фронта (вариант 1). Динамическая голография или четырехволновое взаимодействие.

Рассмотрим запись толстослойной голограммы.




Обернем во времени картину распространения обеих световых волн опорной и сигнальной. Интерференционная картина в среде фотопластинки при этом не изменится, так как в каждой точке среды сохранится модуль разности фаз интерферирующих волн. Следовательно, ту же голограмму можно было записать, если обе волны направить обратно.

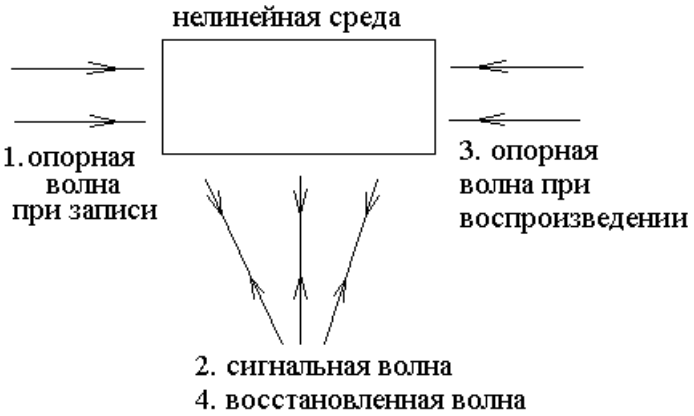
При воспроизведении голограммы направим опорную волну во встречном направлении. Тогда восстановленная сигнальная волна тоже изменит направление на противоположное в соответствии со вторым возможным вариантом направления волн при записи голограммы.




Если при записи голограммы была расходящаяся сигнальная волна, то при воспроизведении получится сходящаяся волна. Это и есть обращение волнового фронта волны при воспроизведении голограммы.

---

В динамической голограмме одновременно присутствуют все четыре рассмотренные волны. По этой причине это явление называют еще четырехволновым взаимодействием. В этом случае запись и воспроизведение голограммы происходит одновременно.




Если в обычной голограмме запись происходит с помощью фотоматериала, то в динамической голограмме роль фотоматериала играет нелинейная оптическая среда.

В любой прозрачной среде в сильном световом поле показатель преломления изменяется. Если среда изотропная, то показатель преломления не изменяется при изменении направления вещественного поля $\vec{E}$ на противоположное. В таком случае разложение показателя преломления в ряд Тейлора содержит только четные степени поля $E$. Обычно, рассматривая зависимость показателя преломления от светового поля, ограничиваются учетом только первой неисчезающей поправки в этом разложении:

$$n = n_0 + n_2 E^2 .$$

В динамической голограмме опорная световая волна 1 и сигнальная волна 2, взаимодействуя с нелинейной средой, изменяют ее показатель преломления в соответствии с объемной интерференционной картиной. В каждом плоском

слое нелинейной среды интерференционные полосы изменения показателя преломления образуют фазовую дифракционную решетку. Опорная волна 3 дифрагирует на этой решетке, образуя сигнальную волну 4.

Можно считать, что любая волна из двух опорных волн, нелинейно взаимодействуя в среде с любой из двух сигнальных волн, формирует в среде динамическую голограмму. Энергия второй опорной волны при воспроизведении этой голограммы перекачивается в энергию второй сигнальной волны. Происходит перекачка энергий из опорных волн в сигнальные волны, то есть из сильных волн в слабые волны. Это и есть четырехволновое взаимодействие.

## Факультатив. Обращение волнового фронта (вариант 2). Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ).

В твердом теле всегда присутствуют акустические волны всех возможных направлений и частот только с очень малой шумовой амплитудой. Эти волны образуются в результате термодинамических флуктуаций плотности среды. В максимумах и минимумах акустической волны разная плотность среды и разная величина показателя преломления. То есть акустическая волна представляет собой фазовую объемную дифракционную решетку, которую можно рассматривать, как толстослойную голограмму.

Рассеяние света на волнах акустических флуктуаций — это рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.

---

Если световая волна достаточно сильная, то происходит так называемое вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна или обращение волнового фронта. Среду, в которой наблюдается такое обращение волнового фронта, называют ВРМБ-зеркалом.

Рассмотрим акустическую волну, поверхности равных фаз которой совпадают с поверхностями равных фаз световой волны. Фронт акустической волны можно рассматривать, как движущееся зеркало. Если зеркала расположены с шагом $\frac{\lambda}{2}$, где $\lambda$ — длина световой волны, то отраженные от фронтов акустической волны световые волны будут синфазны. Частота акустической волны находится из условия, что длина акустической волны равна половине длины световой волны. От большого количества слабых зеркал отражается световая волна с большой амплитудой.

Две встречные световые волны образуют стоячую волну. Среда втягивается в пучности стоячей световой волны. Таким образом, если рассеянная назад световая волна уже есть, то она поддерживает акустическую волну, которая создает рассеянную назад световую волну. Это и есть вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.

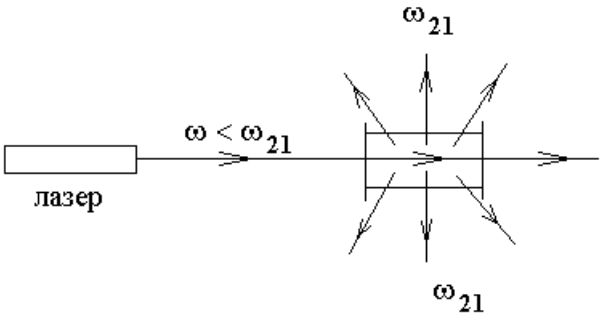
Акустическая волна — это бегущая волна. При вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна раскачивается убегающая от световой волны акустическая волна. Можно сказать, что световое поле, отражаясь от акустической волны назад, толкает акустическую волну вперед. Рассеянное

назад световое излучение с частотой $\omega$ оказывается сдвинутым по частоте на частоту акустической волны $\Omega$: $\omega - \Omega$, где $\Omega << \omega$. Сдвиг частоты объясняется эффектом Доплера при отражении от убегающего зеркала.

## **Факультатив. Лазерное охлаждение.**

Радиационное давление (доплеровское охлаждение).

Оптическая схема опыта. В кювету с газом светят лазером, и газ охлаждается:




.

Излучение лазера с частотой $\omega$ пропускают через кювету с газом, который имеет линию поглощения несколько большей частоты $\omega_{21}$, чем частота излучения лазера $\omega$, так что разность частот не превышает доплеровской ширины спектральной линии $2kU$. Здесь $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $U = \sqrt{\dfrac{2k_Б T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость атомов газа.

Свет частично поглощается средой, переводя атомы среды в возбужденное состояние. Некоторые атомы возвращаются на нижний уровень энергии в результате спонтанного излучения, которое происходит равновероятно по всем направлениям.

Если после поглощения кванта света атомом газа безызлучательный переход на другие уровни энергии атома маловероятен, то газ охлаждается.

Рассмотрим два эквивалентных объяснения этого явления: объяснение через рассмотрение импульса и объяснение через рассмотрение энергии.

---

Рассмотрение через импульс.

Свет резонансно поглощается атомами, в системе отсчета которых частота света совпадает с частотой поглощающего перехода $\omega_{21}$. С учетом продольного эффекта Доплера частота света в системе отсчета атома $\omega'$ отличается от частоты света $\omega$ в лабораторной системе отсчета:

$$\omega' = \omega - kV_z,$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $V_z$ — проекция скорости атома на направление лазерного луча.

Свет резонансно поглощается атомами, для которых

$\omega' = \omega_{21}$ => $\omega - kV_z = \omega_{21}$ =>

$$V_z = \frac{\omega - \omega_{21}}{k} < 0.$$

Проекция скорости атомов на луч отрицательная, так как $\omega < \omega_{21}$ по условию эксперимента. Отрицательная проекция скорости означает, что атомы поглощающие свет летят навстречу лучу.

Каждый поглощенный фотон имеет небольшой импульс

$$p = \frac{\hbar\omega}{c},$$

который переходит к поглощающему свет атому.

При поглощении импульса фотона проекция скорости $V_z$ атома на луч уменьшается по модулю, так как атом летел навстречу поглощенному фотону. Следовательно, уменьшается модуль импульса атома.

При излучении атом тоже испытывает отдачу от излучаемого фотона, но спонтанное излучение изотропно, поэтому при излучении фотона импульс атома увеличивается и уменьшается равновероятно.

В среднем в результате каждого акта поглощения и спонтанного излучения импульс атома уменьшается. Кинетическая энергия связана с импульсом атома соотношением $E = \frac{p^2}{2m}$, а энергия связана с температурой $E = \frac{3}{2}kT$. Уменьшение импульса означает уменьшение энергии и охлаждение.

---

Рассмотрим теперь объяснение лазерного охлаждения через рассмотрение энергии.

По условию эксперимента частота падающего света $\omega$ меньше частоты поглощающего перехода $\omega_{21}$, тогда $\hbar\omega < \hbar\omega_{21}$, и получаемая атомом энергия падающего фотона меньше энергии, которую атом теряет при спонтанном излучении фотона.

Атом получает меньше энергии при поглощении, чем отдает при излучении. Следовательно, среда теряет энергию и охлаждается.

Рассмотрим этот процесс чуть подробнее.

В своей собственной системе отсчета атом поглощает и излучает свет одной и той же частоты $\omega_{21}$, но в лабораторной системе отсчета частоты оказываются разными.

Поглощают свет атомы, которые летят навстречу лучу. При переходе из лабораторной системы отсчета в систему отсчета атома частота поглощаемого света увеличивается от $\omega$ до $\omega_{21}$. Спонтанное излучение света равновероятно по направлениям, поэтому доплеровский сдвиг излучаемого кванта при возвращении в лабораторную систему отсчета равновероятно увеличивает и

уменьшает частоту света. В среднем при излучении доплеровского сдвига частоты не происходит.

---

Предел охлаждения определяется тем, что атом при поглощении кванта света может остановиться, испытав отдачу от фотона. Тогда при излучении атом снова испытает отдачу и вернется к прежнему значению скорости. В таком случае охлаждения уже не будет.

Приравняем импульс фотона к импульсу атома

$$\begin{cases} p = \dfrac{h\nu}{c} \\ \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{3}{2} k_Б T \end{cases} \quad => \quad T = \frac{h^2 \nu^2}{3 k_Б m c^2} \approx \frac{1}{40000 \cdot A} \text{ (K).}$$

Здесь $T$ — предел лазерного охлаждения в Кельвинах, $A$ — вес атома в атомных единицах, в которых атомный вес атома водорода равен единице.

$U = \sqrt{\dfrac{2k_Б T}{m}} \approx \dfrac{0.6}{\sqrt{A}}$ (м/с) — наиболее вероятная скорость при предельном охлаждении, выраженная в метрах в секунду; $A$ — это вес атома в атомных единицах.

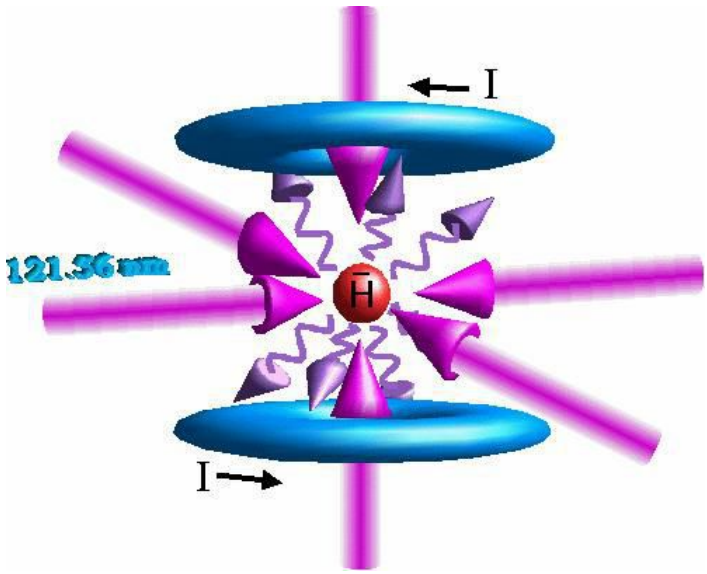
---

<u>Оптическая патока.</u>

Другой метод охлаждения основан на использовании встречных световых волн одинаковой частоты и амплитуды. Пусть, как и раньше, выполняется неравенство $\omega < \omega_{21}$. В этом случае разность частот можно сравнивать не только с доплеровской шириной спектральной линии, но и с лоренцевской (однородной) шириной спектральной линии одиночного атома. Если атом покоится, то встречные волны оказывают одинаковое радиационное давление, и давление можно не учитывать. Если атом движется, то встречные волны имеют разный по знаку доплеровский сдвиг при переходе в систему отсчета атома. Встречная световая волна оказывается ближе по частоте к частоте перехода $\omega_{21}$, и оказывает большее радиационное давление. То есть для атома возникает сила, направленная против скорости и пропорциональная скорости — это сила вязкого трения.

Радиационное давление для каждой из встречных световых волн возникает в результате того, что атом испытывает отдачу от импульсов квантов света при поглощении из одного направления, а при излучении во всех направлениях средняя отдача равна нулю.

Три пары лазеров во взаимно ортогональных направлениях создают вязкое трение при движении атома в любом направлении. Атомы тормозятся, их скорость убывает, убывает кинетическая энергия, убывает температура газа.




Доплеровскому трению, как и любому вязкому трению, неизбежно сопутствуют флуктуации, в нашем случае — флуктуации излучения атома. Эти флуктуации определяют предел охлаждения $h\Delta\nu = k_Б T$ примерно $T = 10^{-4} K$, где $\Delta\nu$ — однородная (лоренцевская) ширина спектральной линии.

Можно сфокусировать встречные нерезонансные волны. Атом будет втягиваться в сильное поле. Это будет лазерная ловушка.

На картинке изображена магнитная ловушка для заряженных частиц и нейтральных атомов с нулевым магнитным моментом. Такой нейтральный атом — диамагнетик. Диамагнетик выталкивается из магнитного поля. Заряженную частицу выталкивает сила Лоренца из области большего магнитного поля. Если линии магнитного поля сгущаются в направлении оси X, то заряд при вращении по окружности вокруг линии магнитного поля оказывается в поле, которое не совсем перпендикулярно плоскости окружности. Линия, проходящая через центр окружности, перпендикулярна плоскости окружности, а линия, проходящая через край окружности — не перпендикулярна. Из-за этой неперпендикулярности возникает составляющая силы Лоренца против оси X.

**<u>Факультатив. Дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига.</u>**

С дипольным комплексным моментом молекул $\tilde{p}$

$\tilde{p}(\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$, где $\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$

связана комплексная поляризация среды $\tilde{P} = N_0 \tilde{p}$, где $N_0$ — концентрация молекул.

Из вещественности $P(t)$ и $E(t)$ можно доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega) \\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega) \end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей

вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерсу и Кронигу, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$, удалось взять интеграл по вычетам и доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(\omega_0) = \dfrac{2}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\omega\alpha''(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \\ \alpha''(\omega_0) = -\dfrac{2\omega_0}{\pi}\mathcal{P}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\alpha'(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}d\omega \end{cases}.$$

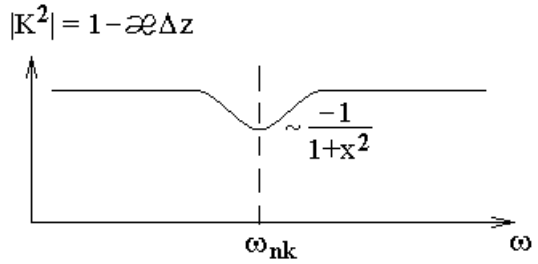
Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения. Эти интегральные связи между $\alpha'(\omega)$ и $\alpha''(\omega)$ означают, что интегрально связаны зависимость коэффициента поглощения от частоты света и зависимость показателя преломления от частоты света. Для оптически тонкого слоя:

$$\begin{cases} \alpha' \sim \chi' \sim (n-n_0) \\ \alpha'' \sim \chi'' \sim \aleph \end{cases}.$$

В свою очередь от добавки к показателю преломления и от коэффициента поглощения зависит комплексный коэффициент передачи оптически тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$:

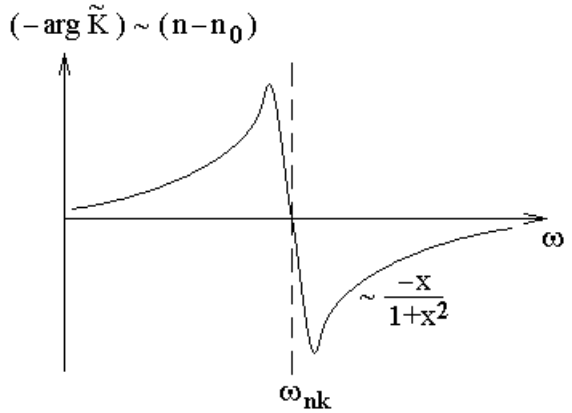
$$\begin{cases} \left|\tilde{K}^2\right| = 1-\aleph\cdot\Delta z \\ -\arg\left(\tilde{K}\right) \sim (n-n_0) \end{cases}.$$

Так если амплитудный коэффициент пропускания имеет провал лоренцевской формы



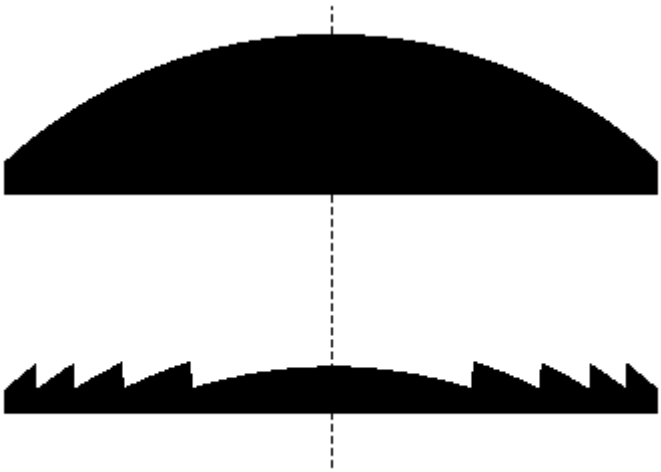

,

то показатель преломления имеет добавку в виде всплеска дисперсионной формы:




Если форма провала не совсем лоренцевская, то и форма всплеска не совсем дисперсионная.

## Факультативно. Линза Френеля.



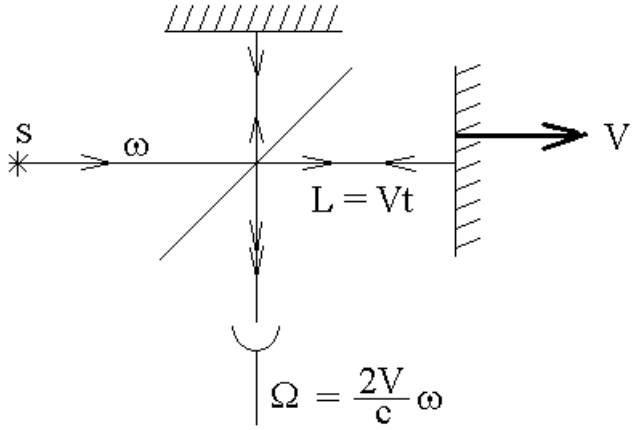
## Факультативно. Фурье-спектрометр.

В интерферометре Майкельсона свет регистрируется точечным приемником света. Одно из зеркал интерферометра двигают с постоянной скоростью вдоль луча. При использовании монохроматического света интерференционные полосы проходят по приемнику света, и сигнал на приемнике представляет собой синусоиду. Частота синусоиды пропорциональна скорости движения зеркала и обратно-пропорциональна длине волны света.

Если интерферометр освещается светом с двумя длинами волн, то фототок приемника будет содержать две синусоиды с разными частотами.

Если интерферометр освещать светом с неизвестным спектром, то Фурье образ фототока приемника пропорционален неизвестному спектру света.

Зависимость фототока от времени записывают в компьютер, проводят преобразование Фурье над этой зависимостью. Зависимость модуля фурье-образа электрического сигнала с приемника света от частоты $\Omega$ пропорциональная зависимости интенсивности света от частоты $\omega$.




Пусть, например, правое зеркало интерферометра двигается со скоростью $V$. При перемещении зеркала на $\frac{\lambda}{2}$ интенсивность света на приемнике изменяется на один период $T$ синусоиды

$$L(t+T)=L(t)+\frac{\lambda}{2}.$$

То есть $VT=\frac{\lambda}{2}$ и $T=\frac{\lambda}{2V}$.

При этом частота фототока с приемника света

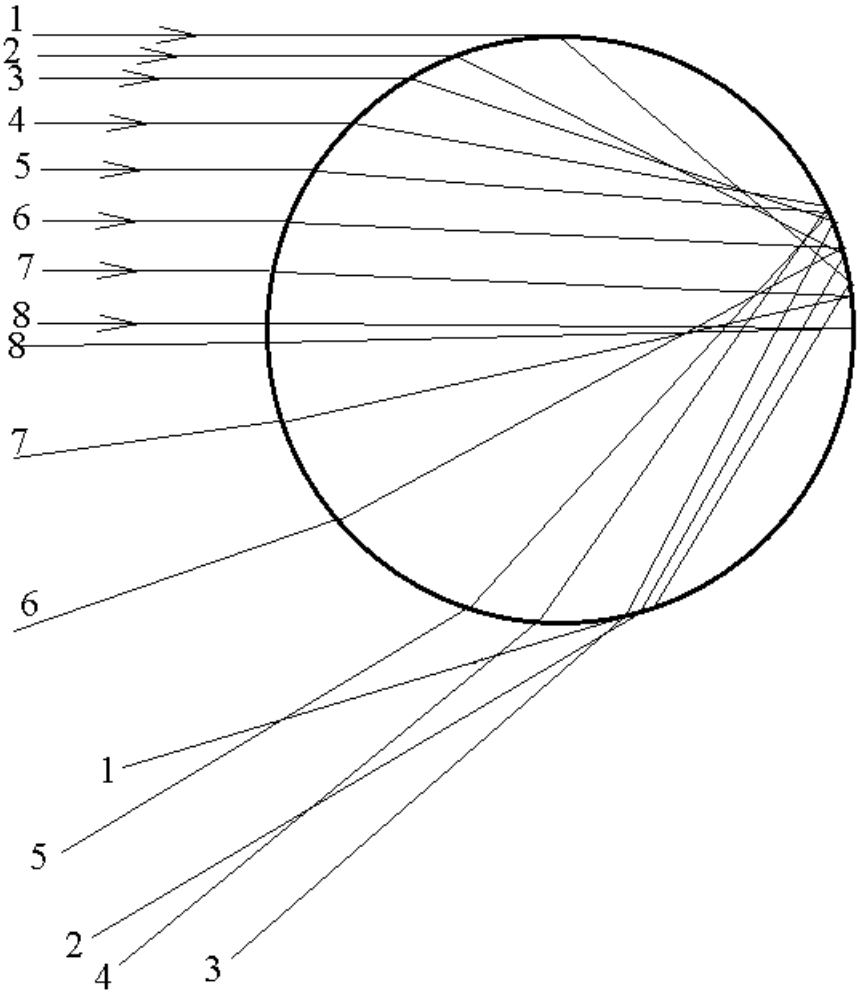
$$\Omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{2V}{\lambda}=4\pi\frac{V}{\frac{c}{\nu}}=4\pi\frac{V}{c}\nu=2\frac{V}{c}\omega.$$

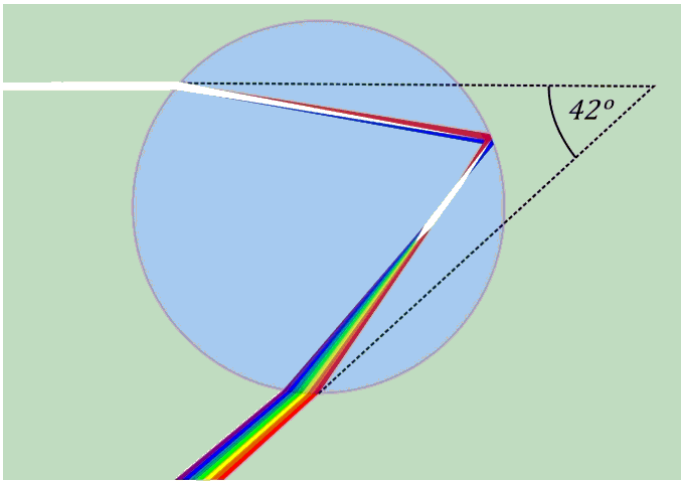
**<u>Факультатив. Любопытные оптические явления.</u>**

Стробоскопический эффект в дневном свете. Если смотреть на вращающийся винт самолета или вертолета, то некоторые положения винта видны отчетливо и несмазанно, как если бы наблюдение велось при освещении вращающегося объекта короткими периодическими световыми импульсами при стробоскопическом эффекте. Только в природных условиях дневного освещения коротких световых импульсов нет. Объяснение эффекта состоит в том, что зрачок человеческого глаза испытывает непрерывные подергивания. Этими подергиваниями модулируется свет, приходящий на каждую светочувствительную клетку сетчатки глазного яблока, так как свет приходит на клетку то от одной точки рассматриваемого предмета, то от другой точки. При этом обостряется видимая граница предмета. Изображение предмета становится более четким. Модулированный на характерных частотах световой сигнал воспринимается мозгом, как более достоверный. На короткое мгновение подергивание зрачка глаза может смещать изображение лопасти винта по сетчатке глаза в направлении навстречу его перемещению в результате реального движения. При этом наблюдаемое движение лопасти становится медленным, и лопасть на мгновение перестает смазываться.

Радуга. Преломление белого света в капле воды или тумана. Первичная радуга образуется лучами, которые испытали преломление внутрь капли, одно

отражение внутри капли и преломление при выходе из капли. Зависимость угла поворота вышедшего из капли света от прицельного параметра имеет экстремум, направление которого зависит величины показателя преломления капли воды, а показатель преломления зависит от длины волны света. В направлении экстремума идет много света для каждой длины волны в своем направлении. Подробнее смотрите http://ru.wikipedia.org/wiki/Радуга.



Глория. Явление наблюдается, когда вы смотрите с самолета на тень самолета, расположенную на облаках ниже самолета. Солнце при этом светит вам в затылок. Вокруг тени самолета на облаках видно яркое свечение — глория. Аналогичное явление наблюдается, если стоять на горе выше слоя облаков и смотреть на свою тень на облаках (брокенский призрак). Предлагаются два возможных объяснения этого явления. Первое — когерентное обратное рассеяние света. Явление состоит в том, что строго назад когерентно рассеиваются две волны, одна из которых испытывает рассеяние на произвольной последовательности рассеивающих центров, а вторая испытывает рассеяние на тех же центрах в обратной последовательности. Рассеяние назад когерентно в малый угол, величина которого равна отношению длины волны света к расстоянию между рассеивающими центрами в направлении поперек луча. В частности лазерный луч в воздухе испытывает сильное обратное рассеяние. Подробнее смотрите http://ufn.ru/ru/articles/1996/3/b/. Второй менее правдоподобный вариант объяснения явления глории состоит в том, что это — радуга первого порядка на каплях воды, находящихся в особом полиморфном состоянии с аномально высоким показателем преломления $n = 1.8 \div 1.9$ вместо обычного значения показателя преломления воды $n$ = 1.33. Подробнее смотрите http://www.cao-rhms.ru/nevzorov/44.pdf.

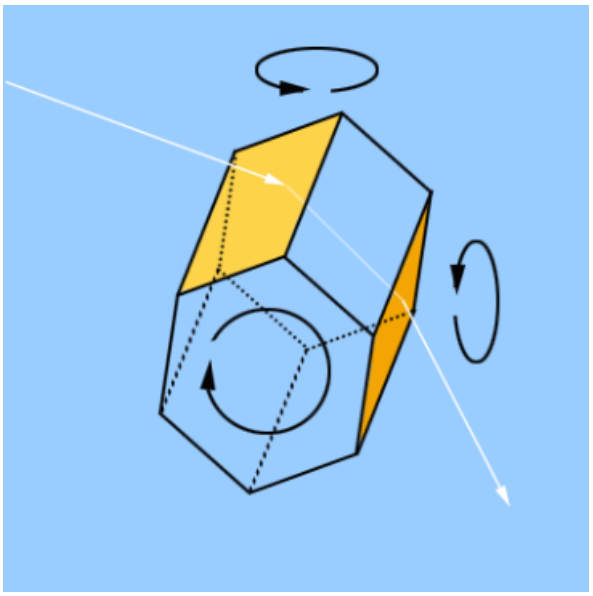
Спеклы. Наблюдатель рассматривает или фотографирует в когерентном свете диффузно отражающий или пропускающий объект. Спеклы лучше наблюдаются в поляризованном свете, например, при отражении лазерного излучения матовой пластинкой. Для спеклов характерны: зернистость, кипение, высокий контраст. Угловой размер одного пятна структуры спекла равен отношению длины волны света к диаметру лазерного пучка. Угловой размер всей структуры спекла равен отношению длины волны света к размеру одного

дефекта диффузно рассеивающей поверхности. Подробнее смотрите http://de.ifmo.ru/--books/0049/ch32.htm.

Венцы — светлые кольца вокруг солнца или луны, которые образуются в результате дифракции света на малые углы на каплях воды облака или тумана. Размеры капель разные, поэтому углы дифракции $\frac{\lambda}{D}$ для одной длины волны света тоже разные. В результате венец белый, почти не окрашен. Подробнее смотрите http://ru.wikipedia.org/wiki/Венцы_(астрономия). Венец вокруг луны:

.

Гало — светлые кольца вокруг солнца или луны, которые образуются в результате преломления света на кристаллах льда ледяного облака. Угловые радиусы гало примерно $22^0$ и $45^0$. Подробнее смотрите http://ru.wikipedia.org/wiki/Гало. Гало вокруг солнца в Гималаях.



Солнечный столб и солнечный крест образуется в результате преломления солнечных лучей на ледяных кристаллах, парящих в воздухе в виде горизонтальных пластинок. Нижнее солнце видно с самолета, воздушного шара или с вершины горы — это яркое отражение Солнца в зеркальном слое плоских ледяных кристаллов. Отражение находится настолько же ниже горизонта, насколько настоящее Солнце находится выше горизонта. Реже и не настолько отчетливые отражения Солнца от одинаково ориентированных кристаллов льда могут быть расположены и в других направлениях

относительно Солнца обычно под углом в $22^0$. Подробнее смотрите http://www.p-normal.narod.ru/Kristals.html.

Фата-моргана (фея Моргана) — миражи, возникающие над поверхностью моря, в тех случаях, когда в нижних слоях атмосферы образуется (обычно вследствие разницы температур) несколько чередующихся слоев воздуха различной плотности, способных давать зеркальные отражения. Подробнее смотрите http://ru.wikipedia.org/wiki/Фата-моргана.

Очень красивое атмосферное оптическое явление, норвежская спиральная аномалия, наблюдалась при неудачном пуске российской межконтинентальной баллистической ракеты Булава. Подробнее смотрите http://ru.wikipedia.org/wiki/Норвежская_спиральная_аномалия.

**Факультатив. Зеркальный ящик. Плотность возможных состояний в пространстве импульсов или волновых векторов.**

Покажем, что число возможных состояний в единичном интервале частот действительно пропорционально $\nu^2$, как это видно в формуле Планка для излучения абсолютно черного тела.

Величина импульса фотона равна:

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Длина волнового вектора или волновое число равно:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{c}.$$

Сравнивая два выражения, получим

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

То есть импульс фотона и волновой вектор излучения — это почти одно и то же с точностью до постоянного сомножителя $\hbar$.

Волновой вектор $\vec{k}$ имеет координаты $k_x, k_y, k_z$. Рассмотрим фазу плоской волны

$$\vec{k}, \vec{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t.$$

Здесь $\frac{2\pi}{\omega}$ — временной период волны. Тогда $\frac{2\pi}{k_x}, \frac{2\pi}{k_y}, \frac{2\pi}{k_z}$ — пространственные периоды волны по осям $x, y, z$.

Рассмотрим пустой ящик с идеальными металлическими зеркальными внутренними поверхностями стенок. Разложим произвольный свет в ящике по плоским монохроматическим волнам. Рассмотрим, какие плоские волны могут существовать в этом зеркальном ящике. Направим оси координат вдоль ребер ящика. Зафиксируем момент времени $t$ и координаты $y, z$. При перемещении вдоль $x$-координаты мы имеем волну с периодом $\frac{2\pi}{k_x}$. На идеальных зеркалах, перпендикулярных оси $x$, составляющая вектора $\vec{E}$ параллельная границе объема обращается в ноль, так как внутри идеального проводника $\vec{E} = 0$, а граничное условие для поля $\vec{E}$ имеет вид $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Тогда вдоль оси $x$ мы имеем стоячую волну с узлами на зеркалах по крайней мере для составляющей вектора $\vec{E}$ перпендикулярной оси $x$. Следовательно, на длине ящика $L_x$ укладывается целое число полуволн $m_x$ с периодом $\frac{2\pi}{k_x}$. Тогда

$$L_x = m_x \cdot \frac{\pi}{k_x} \qquad => \qquad k_x = \frac{m_x \pi}{L_x}.$$

Аналогично $\begin{cases} k_y = \dfrac{m_y \pi}{L_y} \\ k_z = \dfrac{m_z \pi}{L_z} \end{cases}$.

Получается, что допустимые значения проекций $k_x, k_y, k_z$ волнового вектора $\vec{k}$ изменяются с постоянным шагом по каждой из трех проекций. Следовательно, допустимые значения волнового вектора $\vec{k}$ имеют постоянную плотность в пространстве векторов $\vec{k}$.

Аналогично, плотность возможных значений импульса фотона $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ постоянна в пространстве импульсов.

---

Бесконечное трехмерное пространство можно рассматривать, как бесконечно большой ящик с зеркальными внутренними стенками.

Тогда в нашем пространстве допустимые значения волнового вектора и импульса фотона имеют постоянные плотности в соответствующих трехмерных пространствах.

В трехмерном пространстве векторов $\vec{k}$ (с постоянной плотностью допустимых значений) число значений вектора в интервале от $k$ до $k+dk$ пропорционально объему между двумя сферами с радиусами $k$ и $k+dk$. Этот объем равен

$4\pi k^2 dk \sim \omega^2 d\omega \sim \nu^2 d\nu$, так как $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Следовательно, и плотность возможных состояний в единичном интервале волновых чисел пропорциональна $\nu^2$, также как в единичном интервале частот, так как $k = \dfrac{2\pi\nu}{c} \sim \nu$.

Это объясняет появление сомножителя, пропорционального $\nu^2$, в формуле Планка.

## Экзамен. Оптический аналог опыта Брауна — Твисса. Понятие об эффекте группировки фотонов. Параметр вырождения света.

Факультативная вставка.

Браун и Твисс поставили опыт аналогичный тому, который мы рассмотрим в этом вопросе, только они провели опыт в радиочастотном, а не в оптическом, диапазоне.

Коротко обсудим опыт Брауна и Твисса.

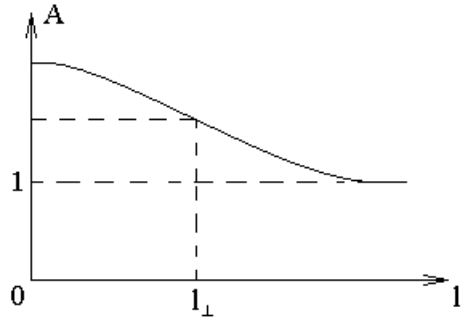
Пусть $I$ — сила тока в приемной антенне. Для радиоволн ток антенны пропорционален напряженности поля радиоволн. Для сравнения заметим, что, фототок приемника света в оптическом диапазоне всегда пропорционален интенсивности света или квадрату напряженности поля.

Радиоволны от удаленного космического источника принимают две антенны, расположенные на расстоянии $l$ друг от друга. В опыте измеряется зависимость некоторой величины $A$ от $l$:

$$A \equiv \frac{\left\langle I_1^2 \cdot I_2^2 \right\rangle}{\left\langle I_1^2 \right\rangle \cdot \left\langle I_2^2 \right\rangle}.$$

Если квадраты токов $I_1^2$ и $I_2^2$ флуктуируют (шумят) независимо друг от друга, то среднее от произведения равно произведению средних и,

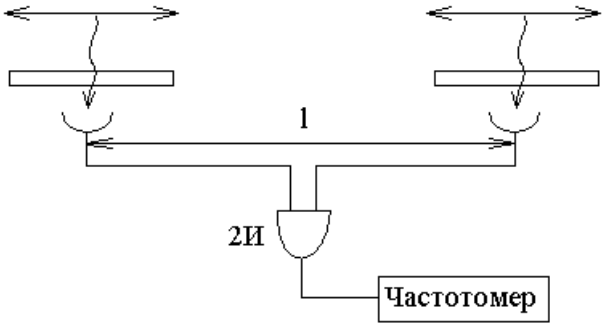
следовательно, $A = 1$. Если же квадраты токов $I_1^2$ и $I_2^2$ двух антенн одновременно возрастают и одновременно убывают, то $A > 1$.




В опыте Брауна — Твисса определялось расстояние $l = l_\perp$, при котором отличие величины $A$ от единицы уменьшалось вдвое. Далее из величины пространственной когерентности $l_\perp$ определялся угловой размер $\gamma = \dfrac{\lambda}{l_\perp}$ источника радиоизлучения.

Конец факультативной вставки.

Рассмотрим оптический опыт аналогичный опыту Брауна — Твисса.



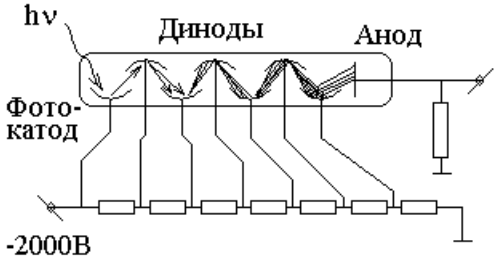

Свет далекой звезды проходит на приемники через узкополосные светофильтры.

В качестве приемников света используются ФЭУ — фотоэлектронные умножители.

Факультативная вставка.

Коротко обсудим устройство ФЭУ.

Фотоэлектронный умножитель представляет собой откачанную от воздуха колбу с несколькими электродами.




Световой фотон падает на фотокатод, из которого фотон выбивает электрон. Между катодом и ближайшим динодом приложено электрическое

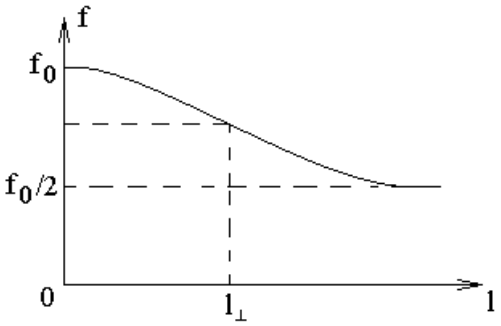
напряжение, ускоряющее выбитый электрон. Из динода ускоренный электрон выбивает десяток электронов, которые ускоряются напряжением к следующему диноду. Каждый электрон выбивает десяток из следующего динода и т. д. Электроны, вылетевшие из последнего динода, собираются на аноде и прилипают к нему. В результате на аноде формируется лавина примерно из миллиона электронов, которая создает импульс анодного тока отрицательной полярности. Этот ток проходит через сопротивление нагрузки в цепи анода, на котором при этом формируется отрицательный импульс напряжения. Импульс напряжения усиливают, инвертируют и подают на один из входов логической микросхемы "2И".

Конец факультативной вставки.

ФЭУ регистрирует отдельные фотоны. Импульсы с двух фотоэлектронных умножителей поступают на два входа логической микросхемы "2И". Сигнал на выходе схемы появляется только в том случае, если импульсы на двух входах совпадают по времени.

Частотомер регистрирует число совпадений на протяжении заданного промежутка времени.

На опыте регистрируется частота совпадений $f$, как функция расстояния $l$ между двумя ФЭУ.




Оказалось, что частота совпадений $f$ уменьшается примерно вдвое при изменении от нуля до бесконечности расстояния $l$ между двумя приемниками света.

Причина зависимости $f$ от $l$ состоит в том, что в один объем когерентности пара фотонов попадает вдвое чаще, чем в разные объемы когерентности. Это связано с эффектом группировки фотонов.

Факультативная вставка.

Все элементарные частицы делятся на два больших класса: бозоны и фермионы.

Они различаются величиной спина или спинового квантового числа $s$, с которым жестко связан момент импульса $S$ вращения частицы вокруг собственной оси $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$.

У бозонов спин целый: $s = 0$, 1 или 2. Согласно современным теориям спин элементарной частицы не может иметь значение больше двух единиц. Бозонами могут быть не только элементарные частицы, но и целые атомы.

Примеры бозонов: фотон $s=1$, атом гелия $s=0$, куперовская пара электронов $s=0$.

У фермионов спин полуцелый: $s=\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2}$. Примеры фермионов: электрон $s=\frac{1}{2}$, протон $s=\frac{1}{2}$, нейтрон $s=\frac{1}{2}$.

Два фермиона не могут быть в одном состоянии, никто не знает почему.

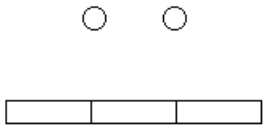
Два бозона, наоборот, предпочитают находиться в одном состоянии.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Эффект группировки фотонов состоит в том, что фотоны предпочитают находиться в одном состоянии.

Этот эффект можно объяснить качественно.

Пусть есть три одинаково возможных состояния для двух бозонов.



Рассмотрим вероятность того, что две частицы находятся в одном состоянии, все равно в каком.

Если бы бозоны не были тождественно неразличимы, то расположить два шара в трех ящиках можно 9-ю вариантами. Благоприятных вариантов три, когда два шара находятся в одном ящике все равно в каком.

Тогда $p=\frac{3}{9}$ — вероятность того, что два шара оказываются в одном ящике все равно в каком.

Перестановка тождественных бозонов не изменяет состояния системы. Поэтому для бозонов существует всего 6 вариантов расположения бозонов вместо 9-и. Можно предположить, что эти 6 вариантов равновероятны. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно,

$p=\frac{3}{6}$ — вероятность того, что два бозона попадают в одно состояние все равно в какое.

Рассмотрим теперь, что будет, если два бозона вбросить по очереди.

Первый бозон равновероятно попадет в любое из трех эквивалентных состояний.

Второй бозон с вероятностью $\frac{1}{2}$ попадает в то же состояние, в котором оказался первый бозон, так как оба бозона должны оказаться в одном состоянии с вероятностью $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Тогда в каждое из двух оставшихся состояний вероятность попасть второму бозону равна $\frac{1}{4}$. Это необходимо, чтобы сумма вероятностей была равна 1.

Получилось, что для второго бозона вероятность попасть в занятое состояние вдвое больше, чем в каждое из свободных. Это и есть эффект группировки.

Новые бозоны охотнее попадают в то состояние, в котором уже есть бозоны.

На основе комбинаторики можно доказать, что вероятность $p_i$ попасть в $i$-е состояние связана с числом бозонов $n_i$, которое уже есть в $i$-м состоянии соотношением:

$$p_i \sim (n_i + 1).$$

Разная вероятность попадания тождественных частиц в занятые и свободные эквивалентные состояния приводит к изменению распределения по энергиям, и оно становится отличным от распределения Больцмана для нетождественных частиц.

$n_i = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{E_i - \mu}{k_Б T}\right)}$ — распределение Больцмана для нетождественных частиц,

$n_i = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{E_i - \mu}{k_Б T}\right) - 1}$ — распределение Бозе — Эйнштейна для тождественных бозонов,

$n_i = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{E_i - \mu}{k_Б T}\right) + 1}$ — распределение Ферми — Дирака для тождественных фермионов.

Здесь $n_i$ — среднее число частиц в $i$-ом состоянии с энергией $E_i$ при термодинамическом равновесии и температуре $T$; $k_Б$ — постоянная Больцмана; $\mu$ — химический потенциал, который можно найти из условия нормировки:

$\sum_i n_i = N$, где $N$ — общее число частиц.

Заметим, что в случае нулевой массы покоя бозонов, как это имеет место для фотонов, оказывается, что

$$\mu = 0.$$

Для бозонов величину $n_i$ называют еще параметром вырождения.

Для фотонов одно состояние — это объем когерентности (для резонатора лазера — одна лазерная мода). То есть световое поле содержит в среднем $n_i$ фотонов в каждом объеме когерентности.

Факультативная вставка.

При температуре источника света меньше 20000 градусов, параметр вырождения света в видимом диапазоне меньше единицы.

Приемник света обычно в состоянии зарегистрировать только небольшую часть фотонов, идущих в одном объеме когерентности. В таком случае параметр вырождения фотоотсчетов приемника меньше параметра вырождения света. Подробнее смотрите книгу Дж. Гудмена "Статистическая оптика":

http://optdesign.narod.ru/book/Goodman_StatOpt_rus.djvu

Конец факультативной вставки.

Для нелазерных источников света обычно параметр вырождения много меньше единицы $n_i \ll 1$. Такой свет называют невырожденным.

Для лазерных источников света параметр вырождения много больше единицы $n_i \gg 1$, и такое состояние света называют вырожденным. Теплового равновесия при этом нет, то есть $n_i$ не подчиняется распределению Бозе-Эйнштейна.

Вернемся теперь к интерпретации оптического аналога опыта Брауна — Твисса.

Свет далекой звезды — это нелазерный, невырожденный свет с малым параметром вырождения фотоотсчетов $n_i \ll 1$. В таком случае пренебрежем тройными попаданиями фотонов в один объем когерентности. Будем считать, что в объеме когерентности обычно ноль фотонов, редко — один фотон и очень редко — два фотона. Вероятность попадания второго фотона в объем когерентности, в котором уже есть один фотон, вдвое больше, чем в соседний объем, в котором нет фотонов, из-за эффекта группировки фотонов.

Следовательно, когда оба приемника света находятся в пределах одного объема когерентности, число совпадений фотонов, регистрируемых двумя приемниками, примерно вдвое больше, чем когда приемники разнесены настолько, что не попадают в один объем когерентности.

Этот способ измерения угловых размеров звезд $\gamma = \dfrac{\lambda}{l_\perp}$ не зависит от шумов атмосферы, так как объем когерентности слабо деформируется этими шумами, если длина когерентности $l_\parallel = \dfrac{c}{\delta\nu}$ выбрана достаточно большой с помощью узкополосных светофильтров ($\delta\nu$ мало).