Факультатив. Логические микросхемы.

Обычно логические микросхемы имеют однополярное питание +5 Вольт и имеют ногу, соединенную с общим проводом схемы.

На входах и выходах логических схем различают только два напряжения: около нуля (логический ноль) и около +5 Вольт (логическая единица).

Работа простейших логических схем характеризуется таблицей истинности.

Рассмотрим для примера логическую схему 2И. Схема имеет два входа, поэтому 2И, и один выход. Таблица истинности схемы 2И имеет вид:

0 0 | 0
0 1 | 0
1 0 | 0
1 1 | 1

Здесь первый столбец — это возможные варианты логических уровней на первом входе схемы, второй столбец — уровни на втором входе схемы, третий столбец — уровни на выходе.

Таблица истинности для схемы 2И показывает, что напряжение логической единицы на выходе схемы присутствует в единственном случае, когда единица одновременно присутствует и на первом и на втором входе, поэтому — 2И.

Рассмотрим схему 2И-НЕ. Логические уровни на ее выходе отличаются от уровней схемы 2И тем, что они инвертированы:

0 0 | 1
0 1 | 1
1 0 | 1
1 1 | 0

Для сравнения приведем таблицу истинности для схемы 3ИЛИ:

0 0 0 | 0
0 0 1 | 1
0 1 0 | 1
0 1 1 | 1
1 0 0 | 1
1 0 1 | 1
1 1 0 | 1
1 1 1 | 1

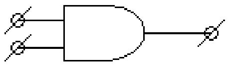
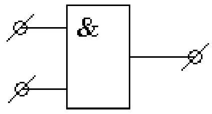
Заметим, что в одном корпусе микросхемы обычно присутствуют несколько независимых логических схем с общим питанием и одним общим проводом. Например, 4-2И-НЕ — четыре схемы 2И-НЕ в одном корпусе.

Хорошая переводная книга по электронике:

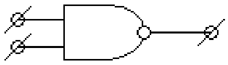
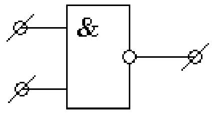
Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники.

Условные обозначения логических микросхем в западной литературе и в советской литературе различаются.

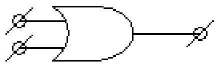
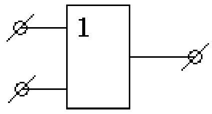
Микросхема.   Западная литература.   Советская литература.

2И

2И-НЕ

2ИЛИ

Факультатив. Последовательная логика. *RS*-триггер.

Рассмотренные до этого момента логические схемы — это схемы комбинационной логики. В схемах комбинационной логики состояние выходов однозначно определяется состоянием входов в текущий момент времени. В схемах последовательной логики состояние выходов сейчас зависит от состояния входов не только в текущий момент времени, но и от состояния входов в предшествующие моменты времени.

Простейшим примером последовательной логики является *RS*-триггер. *RS*-триггер — это элементарная ячейка памяти, в которую можно записать одно из двух состояний 0 или 1.

Рассмотрим работу логической схемы *RS*-триггера.

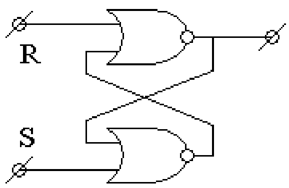


Схема состоит из двух логических схем 2ИЛИ-НЕ. Схема содержит два входа и один выход.

Вход *R* (reset) — сброс. Вход *S* (set) — установка.

В нормальном состоянии оба входа *R* и *S* находятся в состоянии логического нуля. При этом на выходе схемы может быть любое из двух состояний 0 или 1 в зависимости от предыстории состояний входов.

И действительно.

Предположим, что выход схемы находится в состоянии 1. Это напряжение поступает на верхний вход нижней схемы 2ИЛИ-НЕ. Тогда на входах нижней схемы 2ИЛИ-НЕ будут логические уровни 1 и 0. Логическая функция 2ИЛИ нижней схемы будет равна 1. Тогда выход нижней схемы 2ИЛИ-НЕ будет в состоянии 0. Это напряжение поступает на нижний вход верхней схемы 2ИЛИ-НЕ. На входах этой схемы будут уровни 0 и 0. Логическая функция 2ИЛИ верхней схемы будет равна 0. Тогда выход верхней схемы 2ИЛИ-НЕ будет в состоянии 1, что соответствует начальному предположению о состоянии 1 выхода всей схемы.

Предположим теперь, что выход всей схемы находится в состоянии 0. Это напряжение поступает на верхний вход нижней схемы 2ИЛИ-НЕ. Тогда на входах нижней схемы 2ИЛИ-НЕ будут логические уровни 0 и 0. Логическая функция 2ИЛИ нижней схемы будет равна 0. Тогда выход нижней схемы 2ИЛИ-НЕ будет в состоянии 1. Это напряжение поступает на нижний вход верхней схемы 2ИЛИ-НЕ. На входах этой схемы будут уровни 1 и 0. Логическая функция 2ИЛИ верхней схемы будет равна 1. Тогда выход верхней схемы 2ИЛИ-НЕ будет в состоянии 0, что соответствует начальному предположению о состоянии 0 выхода всей схемы.

Получается, что при нулевых значениях на входах R и S любое из двух возможных состояний 0 или 1 выхода схемы является устойчивым состоянием.

Предположим теперь, что на вход R поступает короткий импульс логической единицы 1. Логическая функция 2ИЛИ верхней схемы будет во время этого импульса равна 1 независимо от значения напряжения на втором входе верхней схемы 2ИЛИ-НЕ. Тогда на выходе верхней схемы 2ИЛИ-НЕ будет логический 0. Логический 0 на выходе всей схемы останется в устойчивом состоянии и после окончания импульса логической 1 на входе R. Следовательно, импульс на входе R сбрасывает выход всей схемы в состояние 0, то есть выполняет функцию reset.

Предположим теперь, что на вход S поступает короткий импульс логической единицы 1. Логическая функция 2ИЛИ нижней схемы будет во время этого импульса равна 1 независимо от значения напряжения на втором входе нижней схемы 2ИЛИ-НЕ. Тогда на выходе нижней схемы 2ИЛИ-НЕ будет логический 0. Это напряжение поступает на один из входов верхней логической схемы 2ИЛИ-НЕ. На обоих входах верхней логической схемы 2ИЛИ-НЕ при этом логические 0. Логическая функция 2ИЛИ верхней схемы будет равна 0. Тогда на выходе верхней схемы 2ИЛИ-НЕ будет логическая 1. Логическая 1 на выходе всей схемы останется в устойчивом состоянии и после окончания импульса логической 1 на входе S. Следовательно, логическая 1 на входе S устанавливает выход всей схемы в состояние 1, то есть выполняет функцию set.

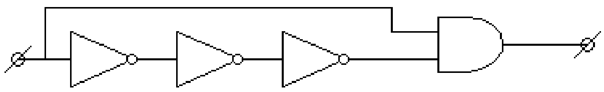
Рассматриваемый RS-триггер является элементарной ячейкой памяти, в которую можно записать одно из двух состояний 0 или 1. Записанное состояние остается в этой ячейке памяти и после того, как пропадает импульс записи.

Этот принцип сохранения состояния используется во всех более сложных микросхемах памяти.

Факультатив. Логические иголки.

В сложных схемах комбинационной логики возможны непредвиденные короткие импульсы на выходах, связанные с разным временем распространения логических сигналов по разным путям. Эти короткие импульсы называют логическими иголками. Логические иголки могут приводить к неожиданным срабатываниям логических схем.

В следующей схеме, если не учитывать конечное время распространения логического сигнала через каждый из трех инверторов, сигнал на выходе схемы 2И всегда ноль.

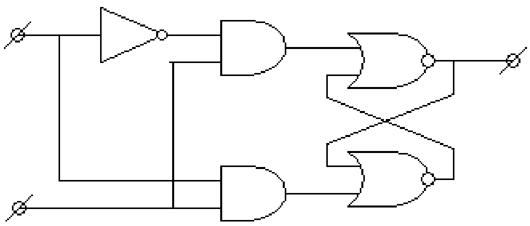


С учетом задержки распространения на выходе появляется короткий импульс при каждом перепаде вверх напряжения на входе схемы. Эту схему можно назвать одновибратором.

В сложных схемах короткие логические иголки могут представлять серьезную проблему. Для ее устранения была придумана синхронная последовательная логика.

Суть работы схем синхронной последовательной логики состоит в том, что они анализируют входные сигналы только на фронте так называемого тактового сигнала.

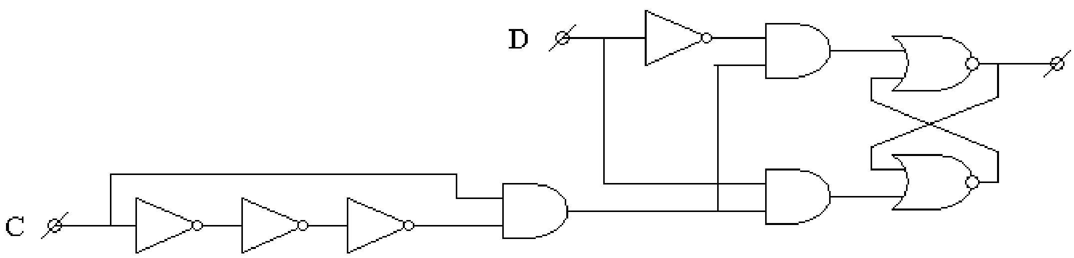
В схеме, приведенной ниже, справа *RS*-триггер, выполненный на двух схемах ИЛИ-НЕ. Напряжение с верхнего входа схемы проходит на выход схемы и может установить или сбросить *RS*-триггер, но только в том случае, когда на нижнем входе разрешающее высокое напряжение.



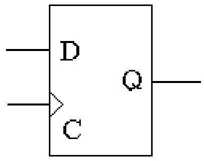
Если на нижний вход подать короткий импульс, то *RS*-триггер установится или сбросится в зависимости от состояния верхнего входа именно в момент короткого синхроимпульса.

Если на нижний вход подавать сигнал через одновибратор, то изменение состояния выхода схемы будет возможно только по переднему фронту тактового импульса на входе одновибратора.

Эта схема *D*-триггера.



Вся эта схема *D*-триггера обозначается, как



Здесь D — это вход данных, Q — выход, треугольником обозначен тактовый вход C.

<u>Переменные электромагнитные поля</u> <u>(продолжение)</u>**<u>.</u>**
<u>Факультатив. Потенциалы излучения осциллятора в волновой зоне.</u>

Осциллятор или вибратор — изменяющийся во времени электрический диполь.

Волновая зона — зона больших расстояний от диполя до точки наблюдения, больших расстояний по сравнению с длиной волны $r >> \lambda$.

Будем рассматривать излучение зарядов и токов в вакууме $\begin{cases} \varepsilon = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$.

Раскладывая запаздывающие потенциалы по степеням $\frac{1}{r}$, и оставляя только наибольшие слагаемые, получим (без доказательства):

$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{r}) = \left(\frac{\vec{r}}{r}, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right) \right) \\ \vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{1}{cr} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right) \end{cases}$$

, где $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный от диполя в точку наблюдения, $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ — дипольный момент излучающей системы.

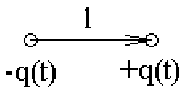
Часто для сокращения записи вводят вектор Герца: $\vec{P}(t,\vec{r}) \equiv \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$.

То же самое решение для потенциалов, выраженное через вектор Герца, примет более простой вид:

$$\begin{cases} \varphi = \left(\frac{\vec{r}}{r}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} \right) \\ \vec{A} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{cases}$$

Простейший излучатель — это вибратор Герца, который представляет собой диполь $\vec{p}(t)$ или пару зарядов $-q(t)$ и $q(t)$ одинаковых по модулю, но противоположных знаков, на фиксированном расстоянии $\vec{l}$ друг от друга. Величина зарядов $q(t)$ — произвольная функция времени.

$$\vec{p}(t)=\vec{l}\cdot q(t).$$



<u>Факультатив. Напряженность поля излучения диполя.</u>

(излучения осциллятора)

Произвольно изменяющийся во времени дипольный момент можно представить, как сумму трех моментов, изменяющихся вдоль осей x, y, z. Напряженность электрического поля излучения диполя равна сумме полей трех диполей, направленных вдоль осей.

Рассмотрим один из трех диполей. Пусть дипольный момент направлен вдоль оси z и имеет произвольную зависимость величины от времени.

Потенциалы излучения диполя

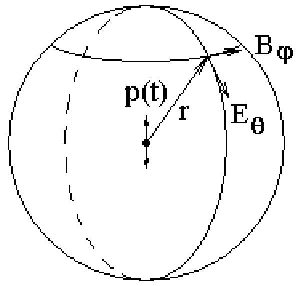
$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{r})=\left(\dfrac{\vec{r}}{r},\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\vec{p}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{r}\right)\right) \\ \vec{A}(t,\vec{r})=\dfrac{1}{cr}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{p}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\right) \end{cases}$$

можно подставить в выражения для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ через потенциалы

$$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}.$$

Оставляя только слагаемые, которые медленнее всего убывают с увеличением расстояния от излучающего диполя до точки наблюдения, получим, что только две проекции полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на единичные векторы сферической системы координат отличны от нуля и равны друг другу:

$$E_\theta=B_\varphi=\frac{\sin(\theta)}{c^2 r}\frac{\partial^2 p_z\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{\partial t^2}=\frac{\sin(\theta)}{c^2}\ddot{P}_z,$$ где p_z — проекция дипольного момента на ось z, P_z — проекция вектора Герца на ось z. Подразумевается, что другие проекции этих двух векторов равны нулю.



Это электромагнитное поле обладает следующими свойствами.

1). $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot \left[\vec{E}, \vec{H} \right] \ \uparrow\uparrow \ \vec{r}$ — энергия течет от диполя вдоль радиус-вектора.

2). $E = B$ в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

3). $\vec{E} \perp \vec{B}$ в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

4). Вектор $\vec{E}$ принадлежит плоскости векторов $\vec{p}$ и $\vec{r}$.

5). $E = B \sim \frac{1}{r}$, что естественно, так как вектор Пойнтинга обязан спадать, как $\frac{1}{r^2}$, чтобы в единицу времени через сферу любой площади $4\pi r^2$ протекала одна и та же энергия.

Для излучения магнитного диполя поле $\vec{E}$ имеет порядок $\frac{V}{c}$ по отношению к полю $\vec{E}$ излучения электрического диполя. Электромагнитное поле излучения магнитного диполя имеет вид:

$$E_\varphi = -B_\theta = -\frac{\sin(\theta)}{c^2 r} \cdot \frac{\partial^2 m_z\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}$$

Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ излучения любого мультипольного момента спадают с расстоянием, как $\frac{1}{r}$. Излучение мультипольных моментов более высоких порядков мало, если размер излучающей системы мал по сравнению с длиной волны излучения.

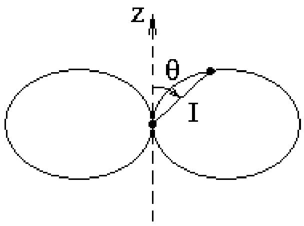
<u>Факультатив. Диаграмма направленности излучения диполя.</u>

Рассмотрим излучение диполя, который изменяется только вдоль оси z.

$E = B \sim \sin(\theta)$ =>

$$I \equiv \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle_t = \left\langle \left| \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E}.\vec{H} \right] \right| \right\rangle_t \sim \left\langle EB \right\rangle_t \sim \sin^2(\theta).$$

Здесь I — интенсивность излучения, $\langle \ \rangle_t$ — среднее по времени значение.



Из начала координат для каждого направления отложим отрезок, длина которого пропорциональна интенсивности излучения диполя в данном направлении, и поставим точку в конце отрезка. Соединим точки в концах отрезков для всех направлений и получим поверхность, которую называют диаграммой направленности излучения диполя.

Поверхность имеет вид тора с точечной дыркой в середине.

Вид поверхности показывает, что излучения вдоль диполя (вдоль оси z) нет. Излучение максимально в направлении перпендикулярном диполю.

Факультатив. Излучение ускоренно движущегося заряда.

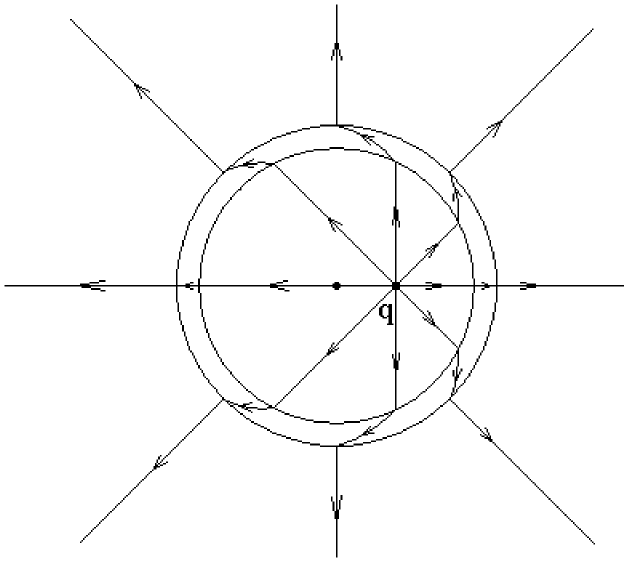
Рассмотрим произвольно движущийся точечный заряд в вакууме.

Для любого объема, который не включает в себя заряд, имеем $\Phi_E = 4\pi Q = 0$. Поток поля $\vec{E}$ равен нулю, значит, сколько линий поля втекает в объем, столько и вытекает из объема. Следовательно, линии поля $\vec{E}$ начинаются только на заряде и заканчиваются на бесконечности независимо от движения заряда.

Если заряд подергать, то по линиям поля $\vec{E}$, как по струнам, побегут волны со скоростью c. Это и есть электрическая составляющая электромагнитных волн.

Давайте подробнее рассмотрим заряд, который бесконечно долго покоился, затем кратковременно ускорился и стал двигаться с постоянной скоростью $\vec{V}$ слева направо.

В нерелятивистском приближении при $V \ll c$ линии поля $\vec{E}$ заряда, движущегося с постоянной скоростью, такие же, как и линии поля покоящегося заряда.



Пусть информация об ускоренном движении заряда достигла со скоростью c области между двумя близкими сферами. Внутри меньшей сферы имеем линии поля $\vec{E}$ заряда, движущегося с постоянной скоростью. Снаружи большей сферы имеем линии поля $\vec{E}$ заряда, покоящегося в центре сфер, так как информация о начале движения заряда не успела добраться до этой области, распространяясь со скоростью c.

Область между сферами содержит поле ускоренно движущегося заряда.

Рассмотрим одну из линий поля $\vec{E}$ в области между двумя сферами. По мере удаления этой области от начала координат фиксированной линии поля приходится проходить между сферами все больший путь. На больших расстояниях от начала координат линия поля практически стелется по поверхности сферы, так как расстояние между двумя сферами остается неизменным.

В таком случае при $V \ll c$ линии поля становятся перпендикулярными радиус-вектору, направленному из точки ускоренного движения заряда, из центра сфер. То есть поле излучения направлено поперечно направлению движения энергии или просто поперечно.

Если выбрать определенное направление из начала координат, то между двумя сферами через отрезок в этом направлении проходит одно и то же число линий поля независимо от удаления r от начала координат.

Следовательно, между двумя сферами плотность линий в плоскости рисунка не зависит от радиуса сфер r. В направлении перпендикулярном рисунку плотность линий поля спадает, как $\frac{1}{r}$. В результате, поле $E \sim \frac{1}{r}$, так как E пропорционально плотности линий поля $\vec{E}$.

Между сферами плотность линий поля спадает, как $\frac{1}{r}$, а в остальных областях, как $\frac{1}{r^2}$. Следовательно, на больших расстояниях можно считать, что поле $\vec{E}$ остается только между двумя сферами.

Мы рассмотрели излучение одного заряда. Заметим, что излучение диполя такое же, как и излучение одного заряда, если считать, что второй заряд диполя неподвижен, и расположен, например, в центре сфер.

Электричество и теория относительности.
Факультатив. Тензоры.

Преобразования Лоренца во многом похожи на преобразования пространственных координат при поворотах системы координат. Нам будет удобно рассматривать свойства преобразований Лоренца на примере более наглядных преобразований поворота системы координат.

Предположим, что кто-то открыл новый закон, согласно которому

$F_x = ma_y$.

Можно не проверять его на опыте, а сразу сказать, что он ошибочен.

И действительно. Пусть закон справедлив. Повернем оси координат вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$. Тогда левая часть равенства, величина F_x, не изменится, а правая часть, величина ma_y, изменится. Следовательно, предложенный закон ошибочен.

Чтобы закон был справедлив необходимо, чтобы обе части уравнения изменялись одинаковым образом при поворотах системы координат.

Обе части равенства одинаково изменяются относительно поворотов системы координат, если равенство записано в векторном виде, например, $\vec{F} = m\vec{a}$.

Обе части равенства могут быть записаны в скалярном виде, например $E = \frac{mV^2}{2}$. В этом случае обе части равенства не изменяются при поворотах системы координат.

Скалярные и векторные величины являются частными случаями более общего класса тензорных величин. Скаляр — это тензор нулевого ранга, вектор — это тензор первого ранга. Тензор момента инерции твердого тела — это тензор второго ранга. Чтобы равенство не нарушалось при поворотах системы координат достаточно, чтобы равенство было записано в тензорном виде.

Чтобы равенства не нарушались при преобразованиях Лоренца, они тоже должны быть записаны в тензорном виде только относительно преобразований Лоренца.

Чтобы объяснить понятие тензора сначала уточним понятие вектора. При поворотах системы координат столбец новых координат любого направленного отрезка получается, как результат произведения некоторой матрицы поворота на столбец старых координат. Коэффициенты матрицы поворота одни и те же для любого направленного отрезка, они выражаются через три угла Эйлера для произвольного поворота системы координат. Сейчас нам не важно, как именно выглядит эта матрица. Преобразования Лоренца тоже можно записать в виде матрицы.

Любую тройку величин a^i, где i пробегает значения 1, 2, 3, будем называть вектором относительно поворотов системы координат, если эта тройка величин преобразуется при поворотах системы координат так же (с помощью той же матрицы), как преобразуются координаты направленного отрезка.

Введем понятие прямого произведения векторов. Пусть a^i и b^k — два вектора. Тогда девять компонент $a^i b^k$ будем называть прямым произведением векторов a^i и b^k.

Любые девять величин можно обозначить, как c^{ik}. Если компоненты c^{ik} преобразуются при повороте системы координат так же, как компоненты прямого произведения векторов $a^i b^k$, то будем называть величину c^{ik} тензором второго ранга. Тензор второго ранга можно записать, как матрицу.

Тензором ранга $N+1$ будем называть величину с $(N+1)$-им индексом, которая преобразуется при повороте системы координат также как, как прямое произведение тензора N-го ранга на тензор первого ранга.

Факультатив. Свертка тензоров.

Рассмотрим тензор второго ранга a^{ik}. Просуммируем компоненты тензора с одинаковыми значениями двух индексов: $a^{11} + a^{22} + a^{33}$. Эта сумма и называется сверткой тензора a^{ik}.

Аналогично можно произвести свертку тензора более высокого ранга, для этого нужно просуммировать компоненты тензора с одинаковыми значениями двух индексов, по которым проводится свертка. В результате свертки тензора образуется тензор с рангом на два меньше, чем ранг исходного тензора.

Если свернуть тензор момента инерции твердого тела, то получиться тензор нулевого ранга или скалярная величина, равная сумме диагональных элементов матрицы момента инерции. Сумма диагональных элементов тензора инерции сохраняется при произвольных поворотах системы координат.

В тензорной алгебре есть любопытная теорема. Если свертка прямого произведения тензора с некоторым объектом является тензором, то этот объект тоже является тензором. Подразумевается, что хотя бы один индекс из двух, по которым проводится свертка, не принадлежит неизвестному объекту. Эта теорема нам понадобится в дальнейших рассуждениях.

Факультатив. Ковариантные и контравариантные величины.

Если базисные векторы не ортогональны друг другу, то система координат называется косоугольной. Если углы между базисными векторами изменяются при перемещении в пространстве, то систему координат называют криволинейной.

В косоугольной, как и в криволинейной, системе координат нужно различать контравариантные и ковариантные величины. Обычные координаты вектора, которые являются коэффициентами разложения вектора по базисным векторам, называются контравариантными координатами. Эти контравариантные координаты образуют контравариантный вектор или контравариантный тензор первого ранга.

При повороте системы координат новые базисные векторы выражаются через старые векторы с помощью матрицы поворота. Величины, которые при повороте системы координат изменяются так же, как базисные векторы, называются ковариантными величинами или ковариантными векторами. Забавно, что совокупность базисных векторов образует один ковариантный вектор, так как новый столбец из базисных векторов после поворота системы координат получается умножением матрицы поворота на столбец старых базисных векторов.

Ковариантные величины — это величины, изменяющиеся так же, как базисные векторы. Контравариантные величины — величины, изменяющиеся иначе, как коэффициенты разложения направленного отрезка по базисным векторам. Контравариантные координаты изменяются при повороте с помощью матрицы, которая является обратной транспонированной матрицей к матрице поворота, с помощью которой изменяются базисные векторы. В ортогональной системе координат обе матрицы совпадают.

Тензор может быть по одному индексу ковариантным, а по другому — контравариантным тензором. Контравариантные индексы принято писать наверху, а ковариантные внизу, например, $a^i{}_k$. В косоугольной системе координат сворачивать тензор можно только по одному ковариантному и одному контравариантному индексу, иначе свертка не будет тензором.

Свертка тензора $a^i{}_k$ — это сумма:

$$\sum_i a^i{}_i \equiv a^i{}_i .$$

Если верхний и нижний индексы обозначены одной и той же буквой, то по этому индексу подразумевается суммирование и знак суммы для краткости не пишут.

Рассмотрим в косоугольной или даже криволинейной системе координат контравариантные координаты вектора x^i и некоторое равенство с этими координатами:

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x^3} = 3 .$$

В этом равенстве правая часть — скаляр или тензор нулевого ранга. Левую часть равенства можно рассматривать, как свертку контравариантного вектора $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ с некоторым объектом $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}$. Свертка равна трем и является тензором нулевого ранга. Следовательно, объект — ковариантный тензор первого ранга. Его называют ковариантной производной и обозначают следующим образом:

$$\partial_i \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Здесь запись в виде строки является намеком на то, что свертку можно рассматривать как на матричное произведение строки на столбец.

<u>Факультатив. Метрический тензор в теории относительности.</u>

Чтобы равенство имело смысл в разных движущихся относительно друг друга системах отсчета достаточно, чтобы равенство было записано в тензорном виде относительно преобразований Лоренца или как говорят в тензорном виде по группе Лоренца.

Контравариантным вектором или контравариантным тензором первого ранга по группе Лоренца называют пространственные координаты и время события:

$$x^\alpha \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Греческими буквами $(\alpha, \beta, \gamma ...)$ будем обозначать индексы тензоров относительно преобразований Лоренца, а латинскими буквами (i, j, k, ...) — индексы тензоров относительно преобразований поворота.

Энергия и импульс частицы тоже образуют контравариантный вектор:

$$p^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

Квадрат интервала между двумя событиями является скаляром по группе Лоренца:

$$\Delta S^2 \equiv (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Правую часть равенства можно рассматривать, как свертку контравариантного вектора $\begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} \equiv \Delta x^\alpha$ и штучки $\begin{pmatrix} c\Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}$. Свертка, квадрат интервала — скаляр по группе Лоренца. Следовательно, штучка — ковариантный вектор. Его естественно обозначить так же, как и контравариантный вектор Δx^α, только с индексом внизу:

$$\Delta x_\alpha \equiv \begin{pmatrix} \Delta x_0 & \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}.$$

Здесь Δx_α — ковариантный вектор или, что то же самое, ковариантные координаты вектора Δx^α.

Столбец ковариантных координат вектора можно получить из контравариантных координат умножением слева на некоторую матрицу:

$$\begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$. Здесь, как это обычно делают, значки приращений Δ опущены для краткости записи.

Если пространство-время не искривлено гравитацией, то метрический тензор имеет следующий вид:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\alpha\beta}.$$

В общем случае метрический тензор — это тензор второго ранга, с помощью которого опускают или поднимают какой-нибудь индекс любого тензора. Так для тензора первого ранга x^α:

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \qquad\qquad x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta$$

Здесь, как и обычно, по одинаковым индексам подразумевается суммирование.

В пространстве-времени, искривленном гравитацией, метрический тензор остается симметричной матрицей, но уже недиагональной.

С помощью метрического тензора можно опускать или поднимать значки любого тензора, в том числе и метрического тензора.

В любом искривленном пространстве, как и в пространстве-времени, искривленном гравитацией, метрический тензор ковариантный по одному индексу и контравариантный по другому индексу является единичным тензором:

$$g^{\alpha}{}_{\beta}=g_{\alpha}{}^{\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

<u>Факультатив. Уравнения электромагнитного поля в ковариантной форме.</u>

Уравнение представлено в ковариантной форме, если оно записано в тензорном виде относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим уравнение неразрывности

$$div\left(\vec{j}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

Запишем его в следующем виде:

$$\frac{\partial\left(c\rho\right)}{\partial\left(ct\right)}+\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=0.$$

Здесь левая часть равенства — свертка ковариантной производной $\partial_{\alpha}\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\left(ct\right)}&\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ и объекта $\begin{pmatrix}c\rho\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}c\rho\\\vec{j}\end{pmatrix}$, а правая часть равенства — скаляр по группе Лоренца. Следовательно, объект $\begin{pmatrix}c\rho\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}$ — контравариантный вектор по группе Лоренца:

$$j^{\alpha}\equiv\begin{pmatrix}c\rho\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}$$

Его называют 4-х вектором плотности тока.

Плотность заряда и плотность тока действительно образуют 4-х вектор, но строго говоря, из предыдущих рассуждений такой вывод не следует. Дело в том, что мы рассматриваем не просто прямое произведение двух тензоров, мы еще производим дифференцирование, при котором теряется часть информации. Из наших рассуждений следует, что плотность заряда и плотность тока $\begin{pmatrix}c\rho\\\vec{j}\end{pmatrix}$ могут отличаться от 4-х вектора только на 4-х мерную константу. Эта константа не может зависеть ни от координат, ни от времени. Там, где (или когда (!)) нет зарядов и токов, остается только 4-х константа, и она там обязана быть 4-х вектором относительно преобразований Лоренца. Тогда сумма 4-х константы и $\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ образует 4-х вектор, и сама 4-х константа — тоже 4-х вектор. Следовательно, $\begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ — 4-х вектор.

Уравнение неразрывности в ковариантном виде примет следующий вид:

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0.$$

Рассмотрим теперь оператор Даламбера:

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Его можно представить, как свертку ковариантной производной $\partial_\alpha \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(ct)} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ и контравариантной производной $\partial^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(ct)} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$, которая получается в результате свертки прямого произведения метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ и ковариантной производной ∂_β:

$$\partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta.$$

Свертка прямого произведения $\partial_\alpha \partial^\beta$ ковариантного вектора ∂_α и контравариантного вектора ∂^β — скаляр по группе Лоренца:

$$-\partial_\alpha \partial^\alpha = \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Следовательно, оператор Даламбера — скалярный оператор относительно преобразований Лоренца.

Рассмотрим дифференциальные уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца в вакууме:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}.$$

В правой части равенств стоит 4-х вектор плотности тока j^{α} с коэффициентом $-\frac{4\pi}{c}$. В левой части скалярный по группе Лоренца оператор Даламбера действует на некоторую величину $\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$. Следовательно, эта величина является контравариантным вектором относительно преобразований Лоренца:

$A^{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ — 4-х вектор потенциала электромагнитного поля.

Дифференциальные уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца могут быть записаны в ковариантном виде:

$$\partial_{\beta}\partial^{\beta} A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^{\alpha}.$$

Рассмотрим калибровку Лоренца в вакууме:

$$div\left(\vec{A}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Калибровка Лоренца может быть записана в ковариантном виде:

$$\partial_{\alpha} A^{\alpha} = 0.$$

Именно по этой причине калибровка Лоренца оказывается такой удобной.

В теории электромагнетизма есть и другие уравнения в ковариантной форме, мы их рассматривать не будем.

Уравнения Максвелла тоже можно записать в ковариантной форме через так называемый тензор электромагнитного поля. Это антисимметричный тензор второго ранга, компоненты которого выражаются через компоненты 4-х вектора потенциала A^{α}:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$$

Четыре диагональных элемента этого тензора равны нулю. Элементы симметрично расположенные относительно главной диагонали отличаются знаком. Шесть элементов над главной диагональю равны трем проекциям вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ и трем проекциям вектора магнитной индукции $\vec{B}$ с разными знаками.