Экзамен. Линии электрического поля E.

Линия векторного поля — это линия, касательная в каждой точке к которой совпадает с направлением векторного поля.

В физике к линиям поля есть дополнительное требование.

Плотность линий поля пропорциональна полю в каждой точке пространства.

(Число линий поля $\vec{E}$) / ($dS_{\perp \vec{E}}$) ≡ (Плотность линий поля $\vec{E}$) ~ E,

здесь $dS_{\perp \vec{E}}$ — проекция площадки, которую пронизывают линии поля $\vec{E}$, на плоскость перпендикулярную полю $\vec{E}$.

Условие пропорциональности числа линий поля самой напряженности поля не может быть выполнено в точности, так как напряженность может изменяться непрерывно, а число линий может изменяться только дискретно. Поэтому в физике понятие линий поля — нестрогое понятие.

Экзамен. Поток вектора электрического поля E.

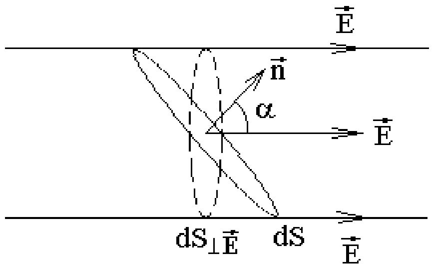
Поток через поверхность — строгий аналог числа линий поля пронизывающих поверхность.

Введем поток Φ_E так, чтобы он был пропорционален числу линий поля, пронизывающих поверхность.

$d\Phi_E$ ~ (Число линий поля $\vec{E}$) = (Плотность линий поля $\vec{E}$) × $dS_{\perp \vec{E}}$ ~ $E\,dS_{\perp \vec{E}}$.

$d\Phi_E \equiv E\,dS_{\perp \vec{E}}$ — определение потока вектора $\vec{E}$ через поверхность, площадь проекции которой на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{E}$ равна $dS_{\perp \vec{E}}$.

Выразим площадь проекции поверхности через площадь самой поверхности.



Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности dS.

Из рисунка видно, что $dS_{\perp \vec{E}} = dS\cos(\alpha)$.

Тогда $d\Phi_E \equiv E\,dS_{\perp \vec{E}} = E\,dS\cos(\alpha) = E\,dS\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right)$.

Введем определение вектора площадки: $d\vec{S} \equiv \vec{n}\,dS$. Тогда $\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{E},d\vec{S}}\right)$.

Тогда $d\Phi_E = E\,dS\,\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{n}}\right) = E\,dS\,\cos\left(\widehat{\vec{E},d\vec{S}}\right) = \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$.

$d\Phi \equiv \left(\vec{E},d\vec{S}\right)$ — определение потока поля $\vec{E}$ через произвольно ориентированную площадку $d\vec{S}$.

<u>Экзамен. Электростатическая теорема Гаусса.</u>

Теорема доказывается для неподвижных зарядов. По предположению Максвелла формулировка теоремы остается справедливой и для движущихся зарядов. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, так оно и есть.

Теорема Гаусса утверждает, что

$\Phi_E = 4\pi Q$, где Φ_E — поток через замкнутую поверхность, границу объема V; Q — сумма зарядов в объеме V.

При вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности — нормаль, направленная наружу из объема V.

$\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ — теорема Гаусса в системе СИ.

Докажем теорему сначала для поля одного точечного заряда, а затем для поля любой суперпозиции зарядов.

Совместим начало координат с точечным зарядом q, тогда электрическое поле в любой точке $E = \dfrac{q}{r^2}$.

Рассмотрим малую площадку dS и поток через нее:

$$d\Phi_E = \left(\vec{E},d\vec{S}\right) = E\,dS_{\perp\vec{E}} = E\,dS_{\perp\vec{r}} = \frac{q}{r^2}\,dS_{\perp\vec{r}} = q\,\frac{dS_{\perp\vec{r}}}{r^2} = q\,d\Omega,$$

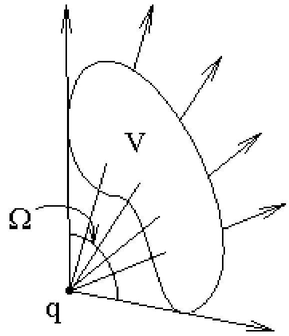
здесь $d\Omega$ — телесный угол, под которым площадка dS видна из точечного заряда q.

Пусть заряд q находится внутри замкнутой поверхности, тогда

$$\left.\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S d\Phi_E \\ d\Phi_E &= q\,d\Omega \end{aligned}\right\} \quad => \quad \Phi_E = \oint_S q\,d\Omega = q\oint_S d\Omega = q\,4\pi = 4\pi\,q.$$

Итак, если точечный заряд находится внутри замкнутой поверхности, то формула $\Phi_E = 4\pi Q$ доказана.

Рассмотрим теперь заряд, расположенный снаружи от объема V.



Из рисунка видно, что ближняя и дальняя границы объема относительно заряда видны под одинаковым телесным углом Ω. Тогда потоки через обе части границы одинаковы по модулю и равны $\Phi_E = q\Omega$, так как $d\Phi_E = q\,d\Omega$. Модули потоков равны, но знаки потоков противоположны. В таком случае поток через всю замкнутую поверхность будет равен нулю $\Phi_E = 0$.

В данной конфигурации зарядов внутри объема нет $Q = 0$. Поэтому равенство $\Phi_E = 4\pi Q$ выполнено и в этом случае с учетом равенства $\Phi_E = 0$.

Рассмотрим теперь вторую часть доказательства, когда зарядов много.

На равенство $\vec{E} = \sum\limits_i \vec{E}_i$ подействуем оператором $\oint\limits_S \left(\cdot , d\vec{S} \right)$ и получим

$$\oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \oint\limits_S \left(\sum_i \vec{E}_i, d\vec{S} \right). \quad => \quad \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \sum_i \oint\limits_S \left(\vec{E}_i, d\vec{S}\right) =>$$

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E_i}, \quad =>$$

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E_i} = \sum_i 4\pi Q_i = 4\pi \sum_i Q_i = 4\pi Q \quad =>$$

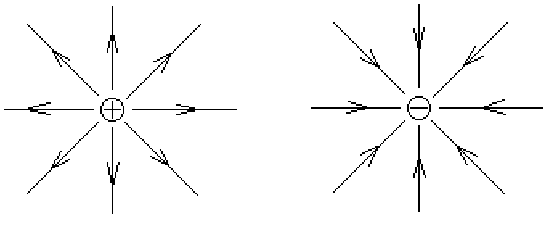
$$\Phi_E = 4\pi Q,$$

что и требовалось доказать.

<u>Факультатив. Линии поле $\vec{E}$ не рвутся.</u>

Если в объеме нет зарядов $Q = 0$, то $\Phi_E = 4\pi Q = 0$. Поток равен нулю — это значит, сколько линий поля втекает в объем, столько и вытекает.

Следовательно, линии поля $\vec{E}$ не начинаются и не заканчиваются в пустом объеме без зарядов. В этом смысле линии поля $\vec{E}$ не рвутся. Это справедливо и для переменных электрических полей.

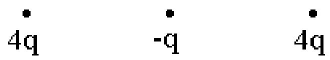


Линии поля $\vec{E}$ вытекают из положительных зарядов и втекают в отрицательные заряды. В этом смысле заряды буквально являются источниками поля.

Экзамен. Теорема Ирншоу.

Невозможно статическое распределение зарядов, в котором хотя бы один заряд находится в устойчивом равновесии.

Отметим, что неустойчивое равновесие возможно, например:



Доказательство.

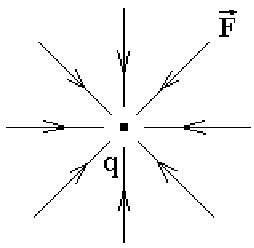
Проведем доказательство методом "от противного".

Предположим, что для одного из зарядов есть устойчивое равновесие и получим противоречие.

Будем считать, что все заряды дискретные — точечные.

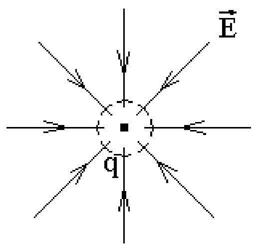
Пусть в устойчивом равновесии находится заряд q, например положительный.

Для устойчивого равновесия поле сил при смещении в любую сторону пытается вернуть заряд в точку равновесия. Тогда, если сдвигать заряд q, то поле сил $\vec{F}$ со стороны остальных зарядов на этот заряд q имеет следующий вид:



Аналогично выглядит и поле $\vec{E}$ остальных зарядов, кроме рассматриваемого заряда q, так как $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$.

Рассмотрим маленькую сферу вокруг заряда q:



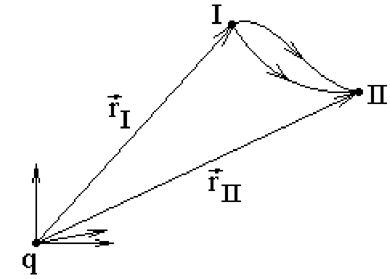
Из рисунка видно, что поток поля $\vec{E}$ остальных зарядов через эту сферу отрицательный $\Phi_E < 0$. Это с одной стороны, а с другой стороны поток равен нулю $\Phi_E = 0$. И действительно, внутри малой сферы вокруг заряда q нет других зарядов, и для этих других зарядов $Q=0$. Следовательно, для поля $\vec{E}$ остальных зарядов, кроме заряда q, получим $\Phi_E = 4\pi Q = 0$.

Итак $\begin{cases}\Phi_E < 0 \\ \Phi_E = 0\end{cases}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Экзамен. Потенциальность кулоновских сил.

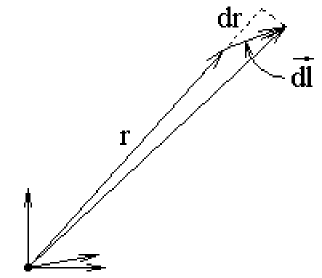
Поле сил потенциально (силы консервативны), если работа по перемещению пробного заряда не зависит от траектории, а зависит только от начальной и конечной точек.

Докажем сначала потенциальность сил со стороны поля одного точечного заряда q. Для этого найдем работу электростатических сил $A'_{I\to II}$ при перемещении пробного заряда q' из точки I в точку II:



Пусть начало координат совпадает с зарядом q. Найдем работу dA' на малом участке пути $d\vec{l}$:

$$dA' = \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \left(q'\vec{E}, d\vec{l}\right) = q'E\,dl_E = q'E\,dl_r \approx q'E\,dr = q'\frac{q}{r^2}dr\,.$$



Из рисунка видно, что $dl_r \approx dr$.

Работа на конечном участке

$$A'_{I\to II} = \int_I^{II} dA' = \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} q'\frac{q}{r^2}dr = q'q\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \frac{dr}{r^2} = q'q\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_I}^{r_{II}} = q'q\left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}}\right) \qquad =>$$

$A'_{I\to II} = q'q\left(\dfrac{1}{r_I} - \dfrac{1}{r_{II}}\right)$ — работа электростатических сил по перемещению пробного заряда q' в поле заряда q из точки $\vec{r}_I$ в точку $\vec{r}_{II}$, если начало координат совпадает с зарядом q.

Это выражение не зависит от формы траектории, следовательно, поле $\vec{E}$ точечного заряда потенциально.

Докажем теперь потенциальность сил произвольного распределения точечных зарядов.

Из принципа суперпозиции

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \qquad \left| \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q' \cdot, d\vec{l} \right) \right. =>$$

$$\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\left(\vec{E}\right), d\vec{l} \right) = \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\left(\sum_i \vec{E}_i \right), d\vec{l} \right) =>$$

$$\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\vec{E}, d\vec{l} \right) = \sum_i \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \left(q'\vec{E}_i, d\vec{l} \right) \quad =>$$

$$A'_{I \to II} = \sum_i A'_{i, I \to II} = \sum_i q' q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right)$$

$$A'_{I \to II} = q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right)$$

— работа электростатических сил по перемещению пробного заряда q' из точки I в точку II. Здесь $\vec{r}_{iI} = \vec{r}_I - \vec{r}_i$ — вектор из i-го заряда в точку I, $\vec{r}_{iII} = \vec{r}_{II} - \vec{r}_i$ — вектор из i-го заряда в точку II.

Экзамен. Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

Энергия — это способность совершить работу, поэтому:

$W'_I \equiv A'_{I \to \infty}$.

Электростатическая энергия заряда в точке I по определению равна работе электростатических сил по перемещению заряда из точки I на бесконечность.

$$W'_I \equiv A'_{I \to \infty} = A'_{I \to II}\Big|_{II \to \infty} = q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right)\Bigg|_{r_{iII} \to \infty} = q' \sum_i q_i \frac{1}{r_{iI}} = q' \sum_i q_i \frac{1}{\left| \vec{r}_I - \vec{r}_i \right|}$$

=> $\quad W'\left(\vec{r}\right) = q' \sum_i q_i \dfrac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|}$ - энергия заряда q' в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в поле остальных зарядов q_i.

Экзамен. Потенциал электростатического поля.

Потенциал — потенциальная энергия единичного заряда.

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'}$$

Экзамен. Потенциал произвольного распределения зарядов.

Для системы точечных зарядов q_i получим следующее выражение для потенциала φ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W'(\vec{r})}{q'} = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Тогда для произвольного распределения зарядов получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \int_{l'} \frac{\tau(\vec{r}\,') \cdot dl'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$\varphi = \dfrac{q}{r}$ — потенциал поля точечного заряда.

В системе СИ $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r}$.

<u>Экзамен. Связь потенциала и напряженности электростатического поля.</u>

$$\varphi(\vec{r}_I) \equiv \frac{W'(\vec{r}_I)}{q'} \equiv \frac{A'_{I\to\infty}}{q'} = \frac{\int_I^\infty \left(\vec{F}', d\vec{l}\right)}{q'} = \int_I^\infty \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l}\right) = \int_I^\infty \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) \;\; =>$$

$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^\infty \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \int_{\vec{r}}^\infty E_l dl$ — связь потенциала и напряженности в одну сторону.

Получим теперь связь между $\vec{E}$ и φ в другую сторону.

Рассмотрим

$$\varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) = \int_{\vec{r}_{II}}^\infty E_l dl - \int_{\vec{r}_I}^\infty E_l dl = -\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl\,.$$

Устремим $\vec{r}_{II} \to \vec{r}_I$ и получим:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) \approx d\varphi \\ &-\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl \approx -E_l dl \end{aligned}\right\} \quad => \quad d\varphi = -E_l dl \quad =>$$

$E_l = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ — для любого направления l.

Рассмотрим направления вдоль осей x, y, z:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \quad \Rightarrow$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, где

$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \dfrac{\partial}{\partial z}$ — оператор набла.

$grad(\varphi) \equiv \vec{\nabla} \varphi$ — определения градиента.

$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \\ \varphi(\vec{r}) = \displaystyle\int_{\vec{r}}^{\infty} E_l \, dl \end{cases}$ — связь напряженности и потенциала в обе стороны.