

**Факультатив. Связь силы и потенциальной энергии для любых потенциальных полей.**

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'} \text{ и } \vec{E} \equiv \frac{\vec{F}'}{q'} \text{ и из } \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \text{ мы получили } \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi.$$

Тогда, повторив выкладки, из равенства  $W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l})$  мы получим

$\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ . То есть, если  $W(\vec{r})$  — это энергия или способность совершить работу при перемещении из точки  $\vec{r}$  на бесконечность, то сила может быть выражена через энергию по формуле  $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ .

Можно доказать и в обратную сторону, что из равенства  $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$  следует  $W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l})$ . И действительно, рассмотрим интеграл:

$$-\int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l}) = -\int_{\vec{r}}^{\infty} (-\vec{\nabla} W, d\vec{l}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{\nabla} W)_l dl = \int_{\vec{r}}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial l} \cdot dl = \int_{\vec{r}}^{\infty} dW = W|_{\vec{r}}^{\infty} = -W(\vec{r})$$

То есть, если для силы  $\vec{F}$  удалось подобрать такую функцию  $W$ , что  $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ , то сила — потенциальна, а  $W$  — потенциальная энергия, соответствующая этой силе. Подробнее, почему  $(\vec{\nabla} W)_l = \frac{\partial W}{\partial l}$ , смотри в следующем вопросе.

**Факультатив. Физический смысл градиента.**

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции, например,  $\varphi$  равен  $\vec{\nabla} \varphi \equiv \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ . Проекция градиента на направление оси  $x$  — это

коэффициент при единичном векторе  $\vec{i}$  вдоль оси  $x$ , то есть  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . Ось  $x$  можно направить произвольно вдоль любого направления  $l$ , следовательно, проекция градиента  $\vec{\nabla} \varphi$  на произвольное направление  $l$  равна  $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ .

Зададимся вопросом, в каком направлении проекция вектора максимальна? Ответ — в направлении самого вектора. Тогда вектор смотрит в направлении, проекция вектора на которое максимальна.

Следовательно, направление градиента, как вектора — это направление, в котором максимальна производная по направлению, то есть направление, в котором функция быстрее всего возрастает.

Градиент как вектор показывает направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина вектора градиента равна производной от функции по этому направлению.

**Факультатив. Дивергенция.**

$$\operatorname{div}(\vec{A}) \equiv (\vec{\nabla}, \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

**Факультатив. Теорема Гаусса-Остроградского.**

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV = \oint_S (\vec{A}, d\vec{S})$$

Здесь  $\oint_S (\vec{A}, d\vec{S}) \equiv \Phi_A$  — поток произвольного векторного поля  $\vec{A}$ , и при

вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_V (\vec{\nabla}, \vec{A}) \cdot dV = \oint_S (\vec{A}, d\vec{S})$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

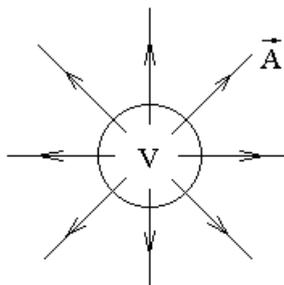
**Факультатив. Физический смысл дивергенции.**

Рассмотрим малый объем  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV \approx \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot \int_V dV = V \cdot \operatorname{div}(\vec{A}) \Rightarrow$$

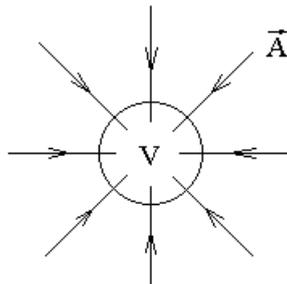
$$\operatorname{div}(\vec{A}) \approx \frac{\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV}{V} = \frac{\oint_S (\vec{A}, d\vec{S})}{V} = \frac{\Phi_A}{V} \Rightarrow$$

Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



то поток положительный  $\Phi_A > 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}) > 0$ .

Если же



то поток отрицательный  $\Phi_A < 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}) < 0$ .

Дивергенция — производная во все стороны.

### Экзамен. Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме.

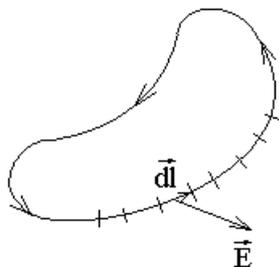
$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \left| \cdot \frac{1}{V} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi_E}{V} = \frac{4\pi Q}{V} \quad | \quad V \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho$$

В системе СИ:  $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

### Экзамен. Теорема о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ .

$$\Gamma_E \equiv \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_l E_l dl \quad \text{— определение циркуляции поля } \vec{E}.$$



Для вычисления циркуляции по контуру или по замкнутой линии эту замкнутую линию нужно разбить на большое число малых отрезков. Каждому отрезку соответствует вектор  $d\vec{l}$ . В области отрезка электрическое поле  $\vec{E}$  почти постоянно. Для каждого отрезка нужно вычислить  $(\vec{E}, d\vec{l})$  и просуммировать соответствующие величины по замкнутому контуру.

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{E}$  по замкнутому контуру:

$$\Gamma_E \equiv \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_l \left( \frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l} \right) = \frac{1}{q'} \oint_l (\vec{F}', d\vec{l}) = \frac{1}{q'} \oint_l dA' = \frac{1}{q'} A'_{I \rightarrow I}$$

Работу по перемещению заряда по замкнутому контуру  $A_{I \rightarrow I}$  можно найти из выражения для работы по перемещению из точки I в точку II:

$$A'_{I \rightarrow I} = A'_{I \rightarrow II} \Big|_{II \rightarrow I} = q' \sum_i q_i \left( \frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right) \Big|_{II \rightarrow I} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Gamma_E = 0$  или, что то же самое,  $\oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$  — теорема о циркуляции электростатического поля.

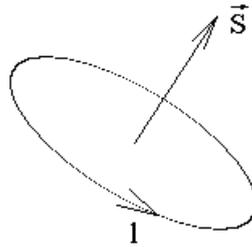
### Факультатив. Ротор.

$$\text{rot}(\vec{A}) \equiv [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

### Факультатив. Теорема Стокса.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int_S (\text{rot}(\vec{A}), d\vec{S}) = \oint_l (\vec{A}, d\vec{l}),$$



Направление нормали к поверхности и направление обхода контура образуют правый винт.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_S ([\vec{\nabla}, \vec{A}], d\vec{S}) = \oint_l (\vec{A}, d\vec{l})$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

### Факультатив. Физический смысл ротора.

Рассмотрим маленькую площадку  $S$ :

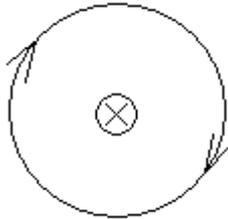
$$\int_S (\text{rot}(\vec{A}), d\vec{S}) = \int_S (\text{rot}(\vec{A}))_n dS \approx (\text{rot}(\vec{A}))_n \cdot \int_S dS \approx S \cdot (\text{rot}(\vec{A}))_n \quad \Rightarrow$$

$$\left(\operatorname{rot}(\vec{A})\right)_n \approx \frac{\int (\operatorname{rot}(\vec{A}), d\vec{S})}{S} = \frac{\oint (\vec{A}, d\vec{l})}{S} = \frac{\Gamma_A}{S}$$

Ротор — поверхностная плотность циркуляции.

Циркуляция — мера закрученности поля.

Ротор производная вида:



### Экзамен. Теорема о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ в дифференциальной форме.

По теореме о циркуляции электростатического поля для любого контура  $l$ :

$$\oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{S} \right| \quad | S \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$\left(\operatorname{rot}(\vec{E})\right)_n = 0$  — для любого направления вектора нормали  $\vec{n}$ . Тогда

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

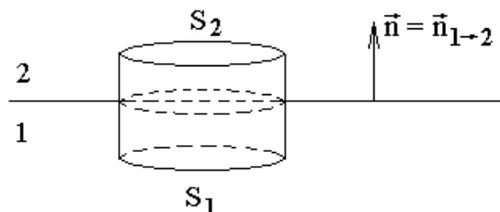
### Экзамен. Скачок электрического поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную поверхность.

Этот же вопрос можно было бы назвать "граничные условия для поля  $\vec{E}$  в вакууме", так как заряженную поверхность можно рассматривать, как границу двух объемов.

Любая поверхность вблизи выглядит плоской.

Рассмотрим скачок поля  $\vec{E}$  на плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

Рассмотрим цилиндр малой высоты с основаниями параллельными заряженной плоскости. Пусть основания цилиндра расположены с двух сторон от заряженной плоскости.



Если высота цилиндра мала, то потоком через боковую поверхность можно пренебречь. Тогда

$$\Phi \approx \Phi_{S_2} + \Phi_{S_1} = E_{2n}S - E_{1n}S,$$

где минус в последнем выражении вызван тем, что внешняя нормаль к цилиндру на площадке  $S_1$  противоположна выбранному направлению нормали к заряженной плоскости  $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ .

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен

$$\Phi = 4\pi Q = 4\pi\sigma S.$$

Сравнивая два выражения для потока  $\Phi$ , получим

$$E_{2n}S - E_{1n}S = 4\pi\sigma S \quad \Rightarrow$$

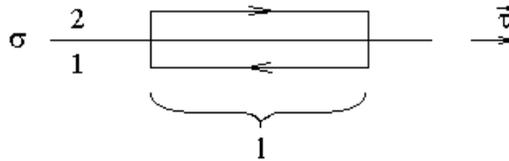
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma,$$

где нормаль к границе  $\vec{n}$  смотрит из объема 1 в объем 2.

-----

Рассмотрим теперь тангенциальную (по касательной к поверхности) составляющую поля  $\vec{E}$  при переходе через заряженную границу.

Рассмотрим прямоугольный контур в плоскости перпендикулярной заряженной поверхности.



Если высота прямоугольника мала, то вклад в циркуляцию вертикальных отрезков пренебрежимо мал. Тогда

$$\Gamma_E \approx \Gamma_2 + \Gamma_1 = E_{2l} \cdot l + E_{1l} \cdot l = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l,$$

где минус вызван тем, что на нижнем отрезке направление  $d\vec{l}$  противоположно выбранному направлению единичного тангенциального вектора  $\vec{\tau}$ .

По теореме о циркуляции электростатического поля  $\vec{E}$  имеем  $\Gamma_E = 0$ .

Сравнивая равенство  $\Gamma_E = 0$  с другим только что полученным равенством  $\Gamma_E = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l$ , находим:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

Здесь  $\vec{\tau}$  — единичный вектор по касательной к заряженной поверхности.