

Факультатив. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2 , и для каждого из них выполнены граничные условия. Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla} \varphi_i$ соответствующие этим двум решениям для потенциала.

Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны. Покажем, что для этого достаточно доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$. Это равенство эквивалентно равенству $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla} \varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке границы выполнено условие $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$. Откуда следует, что в этой точке границы некоторая функция равная разности решений равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$. И так, производная этой функции во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а сама функция равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$ хотя бы в одной точке. Тогда функция во всех точках объема равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_V = 0$ или $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$, и два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Докажем теперь равенство $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ для всех точек объема, и теорема о единственности решения для потенциала φ будет доказана. С этой целью докажем два равенства:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV &= \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) \\ \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Если мы их докажем, то получим $\int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = 0$ или

$$\int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV = 0, \text{ то есть } \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0 \text{ в каждой точке объема.}$$

Докажем сначала первое равенство системы.

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV \quad - \text{ по теореме}$$

Гаусса-Остроградского для векторного поля $(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV = \int_V (\vec{\nabla}, (\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV =$$

Левую набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$\begin{aligned}
&= \int_V \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV = \\
&= \int_V \left(\vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2, \vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\
&= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\
&= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) \cdot dV = \\
&= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (-4\pi\rho - (-4\pi\rho)) \cdot dV = \\
&= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV.
\end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0.$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду.

Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}
&\left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = \\
&(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right)_{d\vec{S}} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right)_{\vec{n}} \cdot dS = \\
&(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS
\end{aligned}$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

$$1. \text{ Рассмотрим доказательство равенства } \oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$$

для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ в любой точке границы S .

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0 \Rightarrow$ Первый сомножитель $(\varphi_1 - \varphi_2)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи Неймана.}$$

В краевой задаче Неймана $\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S$, следовательно, на поверхности

S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи с границами в виде проводников.}$$

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\varphi|_{S_i} = \text{const}_i$, где S_i — поверхность i -го проводника границы, если граница многосвязная.

$$\text{Тогда } (\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_i} = \text{const}_i$$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i -го проводника:

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS \end{aligned}$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2) \cdot dS = \\ &= 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\oint_{S_i} \sigma_2 dS - \oint_{S_i} \sigma_1 dS \right) = 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (Q_{2i} - Q_{1i}). \end{aligned}$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i -ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ будет выполнено для каждой границы, так как в}$$

краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0$ доказано для

краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

Экзамен. Основные свойства проводников в электростатическом поле.

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля $\vec{E}$ течет электрический ток.

Свойства проводников.

1. $\vec{E}_{внутри} = 0$ — поле $\vec{E}$ внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри} \neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем электрический ток.

2. $0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla} \varphi_{внутри} = 0 \Rightarrow \varphi_{внутри} = const$ - каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

$$3. \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\rho_{внутри} = \text{div}(\vec{E}_{внутри}) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_{внутри} = 0 \Rightarrow$$

В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

$$4. \left\{ \begin{array}{l} E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_n = 4\pi\sigma \text{ - нормальная составляющая}$$

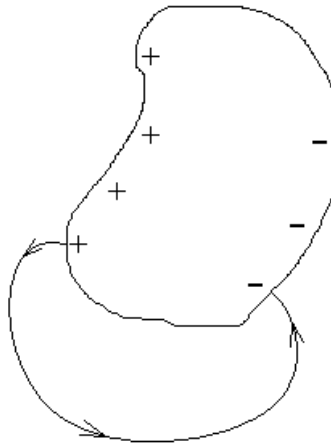
поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ , где $\vec{n}$ — нормаль, направленная из проводника наружу.

$$5. \left\{ \begin{array}{l} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_\tau = 0 \text{ - тангенциальная}$$

составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля $\vec{E}$ начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля $\vec{E}$ потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

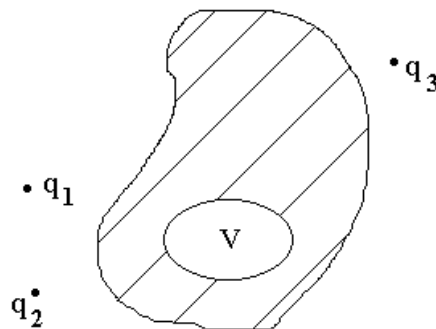
Невозможно:



Экзамен. Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но не полностью.

Если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E} = 0$ независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0 . Тогда $\varphi|_S = \varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi|_S = \varphi_0$. Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ в объеме V , так как в этом объеме нет зарядов: $\rho = 0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi = 0$.

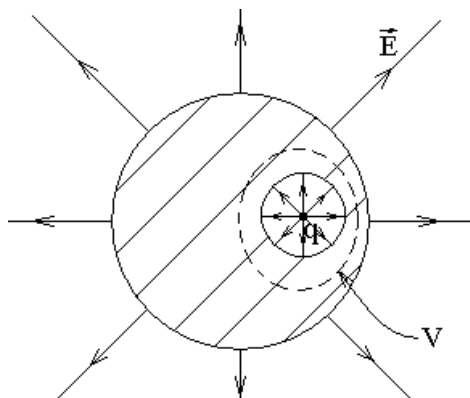
Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$$\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0$$

Внутри полости поле $\vec{E}$ отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

Факультатив. Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле $\vec{E}$ везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V . Все точки поверхности S находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле $\vec{E}$. Тогда и поток поля $\vec{E}$ через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. С учетом теоремы Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$. Тогда $Q = 0$, сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Внутри объема проводника зарядов нет. Следовательно, если в полости заряд q , то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q .

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V . В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q . Граница объема — это поверхность проводника, на которой задан полный заряд $Q = -q$. Ни в одной точке границы не задан потенциал, поэтому задача о потенциале в объеме полости имеет единственное решение с точностью до неизвестного слагаемого. Задача сферически симметрична. Поэтому поле в объеме полости можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда $E = \frac{q}{r^2}$.

Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q , и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение —

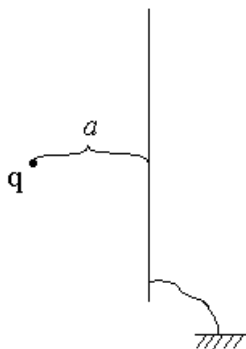
поле точечного заряда $E = \frac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле $\vec{E}$ снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

Экзамен. Метод изображений 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

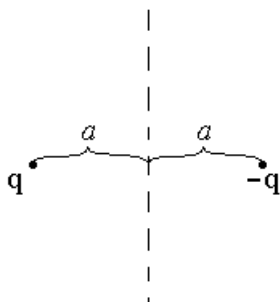
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q , расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a . Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говорится, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на опыте можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V , в котором ищут решение для потенциала. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поле $\vec{E}$ и поле φ в левой половине пространства — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.

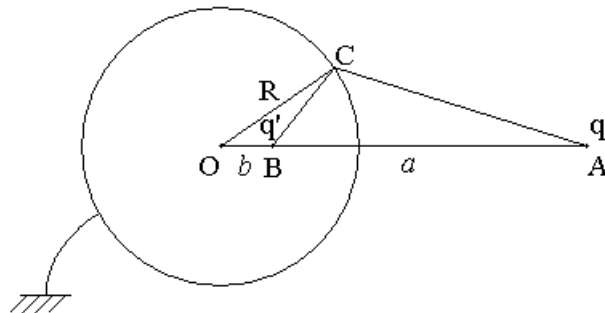
Экзамен. Метод изображений 2. Точечный заряд и проводящий заземленный шар.

Рассмотрим задачу.

Дан проводящий заземленный шар радиусом R и точечный заряд q на расстоянии $a > R$ от центра шара. Найти потенциал φ в каждой точке пространства.

Покажем, что заряд-изображение q' на расстоянии b от центра шара вместе с реальным зарядом q удовлетворяет граничным условиям для потенциала $\varphi|_S = 0$, если

$$\begin{cases} q' = -q \frac{R}{a} \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases}.$$



$$b = \frac{R^2}{a} \Rightarrow \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow$$

$\triangle OCB \sim \triangle OAC$ — треугольники подобны, так как имеют общий угол $\angle BOC$ и прилежащие стороны треугольников пропорциональны $\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA}$.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a} \Rightarrow BC = AC \frac{R}{a}$$

Тогда

$$\varphi(C) = \frac{q}{AC} + \frac{q'}{BC} = \frac{q}{AC} + \frac{-q \frac{R}{a}}{AC \frac{R}{a}} = 0.$$

Потенциал в произвольной точке C на сфере равен нулю. Следовательно, заряды q и q' удовлетворяют граничным условиям для потенциала.

Потенциал и напряженность снаружи шара — это потенциал и напряженность пары зарядов q и q' , где

$$\begin{cases} q' = -q \frac{R}{a} \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases}.$$

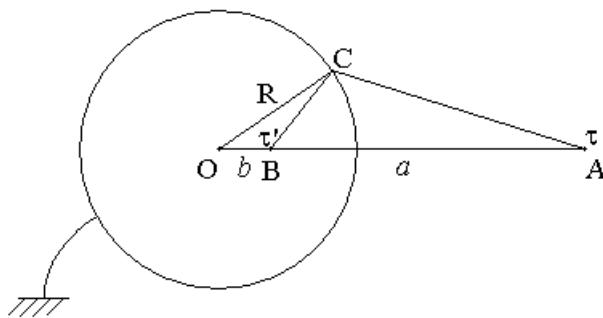
Здесь b — расстояние от центра шара до заряда-изображения q' .

Факультатив. Электрическое поле длинного заземленного проводящего цилиндра и параллельной цилиндру заряженной нити.

Рассмотрим поле заряженной нити и заземленного проводящего цилиндра.

Придумаем заряды-изображения в виде второй заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau' = -\tau$, расположенной параллельно оси цилиндра на расстоянии $b = \frac{R^2}{a}$ от оси цилиндра. Здесь R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от оси цилиндра до параллельной цилиндру заряженной нити.

Рассмотрим цилиндр, заряженную нить и заряженную нить-изображение со стороны торца цилиндра.



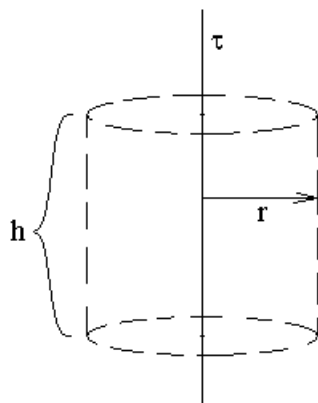
Этот рисунок практически совпадает с рисунком предыдущего вопроса о поле заземленного шара и точечного заряда с точностью до замены $q \rightarrow \tau$ и $q' \rightarrow \tau'$.

Из подобия треугольников $\triangle OCB \sim \triangle OAC$ следует $\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a} \Rightarrow$

$$BC = AC \frac{R}{a}.$$

Найдем теперь поле $\vec{E}$ одной заряженной нити.

Для этого рассмотрим соосный с нитью цилиндр и применим к этому цилиндру теорему Гаусса.



$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad E \cdot S = 4\pi \cdot \tau h$$

Из симметрии задачи поле $\vec{E}$ направлено по радиусу в плоскости перпендикулярной заряженной нити. Тогда поток отличен от нуля только через боковую поверхность цилиндра. $\Rightarrow$

$$E \cdot 2\pi r h = 4\pi \tau h \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{2\tau}{r}$$

Заметим, что потенциал бесконечной заряженной нити бесконечен. В таких случаях потенциал отсчитывают не от бесконечности, а от некоторой точки, потенциал в которой выбран за ноль. Пусть эта точка расположена на расстоянии r_0 от заряженной нити. При этом из симметрии задачи следует, что потенциал в любой точке на расстоянии r_0 от нити также будет нулевым. Тогда потенциал в произвольной точке на расстоянии r от нити:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \int_r^{r_0} E_l dl = \int_r^{r_0} E_r dr = \int_r^{r_0} E dr = \int_r^{r_0} \frac{2\tau}{r} dr = 2\tau \cdot \ln(r) \Big|_r^{r_0} = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Рассмотрим потенциал двух заряженных нитей τ и τ' в произвольной точке боковой поверхности цилиндра:

$$\varphi(C) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC}\right) + 2\tau' \cdot \ln\left(\frac{r_0}{BC}\right) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC}\right) - 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC \frac{R}{a}}\right) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Правая часть равенства не зависит от положения точки C на поверхности цилиндра. Следовательно, для поля двух заряженных нитей τ и τ' боковая поверхность цилиндра эквипотенциальна. Заметим, что для бесконечных заряженных нитей потенциал на поверхности цилиндра — это разность двух бесконечных потенциалов.

Потенциал постоянен, но не нулевой. Для удовлетворения граничным условиям цилиндр должен иметь нулевой потенциал — потенциал заземленного цилиндра.

Если изменить линейную плотность нити заряда-изображения τ' на любую конечную величину, то потенциал на поверхности цилиндра изменится на бесконечную величину. Для изменения потенциала на конечную величину достаточно изменить τ' на бесконечно малую величину. Можно устремить линейную плотность заряда нити к нулю, а длину нити одновременно устремить к бесконечности так, что потенциал в некоторой точке рядом с нитью будет оставаться постоянным. Для нити с бесконечно малой линейной плотностью заряда напряженность поля везде равна нулю, а потенциал везде одинаковый. Будем считать, что это изменение τ' на бесконечно малую величину произведено. Тогда потенциал всех точек изменится на одинаковую константу, и потенциал на поверхности цилиндра можно сделать нулевым.

Следовательно, поле $\vec{E}$ снаружи заземленного цилиндрического проводника совпадает с полем $\vec{E}$ двух заряженных нитей, где параметры нити-изображения:

$$\begin{cases} \tau' = -\tau \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases}$$

Здесь τ' — линейная плотность заряда нити-изображения, b — расстояние от нити-изображения до оси цилиндра, R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от заряженной нити с линейной плотностью заряда τ до оси цилиндра.