

Экзамен. Энергия электрического поля в линейных диэлектриках.

Математические выкладки и конечный результат этого вопроса вполне аналогичны выкладкам и результату вопроса "Энергия электрического поля" в вакууме.

Энергия поля — это та же энергия взаимодействия зарядов $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$,

только выраженная через напряженность электрического поля. Напомним, что в присутствии диэлектриков суммирование ведется только по свободным зарядам.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot dq = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \rho \cdot dV$$

Подставим сюда выражение для объемной плотности свободных зарядов из равенства $\operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi} \cdot (\vec{\nabla}, \vec{D})$. Тогда

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \rho \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \cdot (\vec{\nabla}, \vec{D}) \right) \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \cdot (\vec{\nabla}, \vec{D}) \cdot dV.$$

Возьмем полученный интеграл по частям, перебросив производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя \vec{D} на другой сомножитель φ .

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \cdot (\vec{\nabla}, \vec{D}) \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi \cdot (\vec{D}, d\vec{S}) - \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{\nabla} \varphi, \vec{D}) \cdot dV$$

При стремлении объема к бесконечности интеграл по поверхности стремится к нулю. Докажем это позднее. Тогда

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int_{V=\infty} (\vec{\nabla} \varphi, \vec{D}) \cdot dV$$

Подставим сюда $\vec{\nabla} \varphi = -\vec{E}$ и получим

$$W = \int_{V=\infty} \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{8\pi} dV \quad \text{— энергия электрического поля в линейных}$$

диэлектриках. Доказывается для электростатического поля, предполагается для переменных электрических полей, все следствия из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно, формула для энергии поля справедлива и для переменных электрических полей.

$$w \equiv \frac{dW}{dV} = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{8\pi} \quad \text{— объемная плотность энергии электрического поля в}$$

линейных диэлектриках.

Если диэлектрик не только линеен, но и изотропен, то $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow$

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

Для нелинейной и (или) гистерезисной зависимости \vec{D} от \vec{E} :

$$dw = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}, d\vec{D}) \text{ — без доказательства.}$$

$$\text{В СИ: } w = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{2} \text{ и } w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}.$$

$$\text{Факультатив. } \oint_S \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть V — шар, $r \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \approx \frac{Q}{r} \\ D \approx \frac{Q}{r^2} \\ d\vec{S} \parallel \vec{D} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\oint_S \varphi(\vec{D}, d\vec{S}) \approx \oint_S \varphi \cdot D \cdot dS \approx \oint_S \frac{Q}{r} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dS = \frac{Q^2}{r^3} \cdot \oint_S dS = \frac{Q^2}{r^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi Q^2}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Экзамен. Электрические силы в диэлектриках.

Диполи стремятся к минимуму энергии $W = -(\vec{p}, \vec{E})$. Для этого они сначала поворачиваются вдоль поля $\vec{p} \uparrow \vec{E}$, а затем втягиваются в ту область пространства, где поле сильнее. В этом и состоит причина силы, действующей на диэлектрик, состоящий из диполей.

Примеры проявления таких сил: дым втягивается в электрическое поле, жидкий или твердый диэлектрик втягивается в заряженный конденсатор.

Рассмотрим нестрогую теорию сил в диэлектриках.

$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$ — сила, действующая на диполь одной молекулы, независимо от того, жесткий это диполь или диполь, наведенный электрическим полем.

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} \text{ — объемная плотность сил в диэлектрике.}$$

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = n \cdot \langle \vec{F} \rangle = n \cdot \langle (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E} \rangle$$

В последнем выражении заменим среднее от произведения на произведение средних значений

$$n \cdot \langle (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E} \rangle \approx n \cdot (\langle \vec{p} \rangle, \vec{\nabla}) \langle \vec{E} \rangle.$$

Эта замена не вполне правомерна, поэтому и теория на основе этой замены нестрогая.

Среднее значение напряженности по определению является напряженностью поля в диэлектрике:

$$\langle \vec{E} \rangle \equiv \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = n \cdot (\langle \vec{p} \rangle, \vec{\nabla}) \vec{E} = (n \cdot \langle \vec{p} \rangle, \vec{\nabla}) \vec{E} = (\vec{P}, \vec{\nabla}) \vec{E} = (\chi \vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Подставим выражение восприимчивости через проницаемость $\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ и

получим

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}.$$

Выражение для объемной плотности сил можно привести к более удобному виду. С этой целью рассмотрим двойное векторное произведение и преобразуем его по правилу "бац минус цап":

$$[\vec{E}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla})$$

В левой и правой части равенства производные берутся только от одной из двух напряженностей \vec{E} . Чтобы не перепутать, эта напряженность подчеркнута.

Левая часть равенства равна нулю, так как $[\vec{\nabla}, \vec{E}] \equiv \text{rot}(\vec{E}) = 0$ по теореме о циркуляции электростатического поля \vec{E} в дифференциальной форме. Тогда и правая часть равенства равна нулю:

$$\vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla}) = (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Сравнивая последнее равенство с выражением для объемной плотности сил в диэлектриках $\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\vec{E}, \vec{\nabla}) \vec{E}$, получим:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E})$$

Последнее выражение можно преобразовать с учетом

$$\vec{\nabla}(E^2) = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) + \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = 2\vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) \text{ и окончательно получить}$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2) \quad \text{— объемная плотность сил,}$$

действующих на диэлектрик в электростатическом поле.

$\text{grad}(E^2)$ направлен туда, куда быстрее всего возрастает E^2 .

Формула

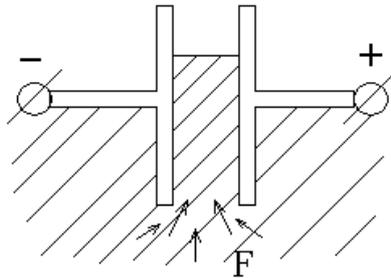
$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2)$$

показывает, что диэлектрик втягивается в электрическое поле.

В системе СИ:
$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2} \cdot \text{grad}(E^2).$$

Хотя это выражение получено с учетом равенства $\text{rot}(\vec{E}) = 0$, которое справедливо только для полей неподвижных зарядов, считается, что объемная плотность сил примерно такая же и для переменных электромагнитных полей вплоть до оптических частот. Применимость для световых полей определяется тем, что длина волны светового поля примерно в тысячу раз больше размера диполя молекулы. Для более медленных электромагнитных полей неравенство выполнено еще сильнее.

Для примера приведем поле сил, втягивающих жидкий диэлектрик в заряженный конденсатор.



Силы действуют там, где электрическое поле неоднородно.

Факультатив. Понятие о строгой теории сил в диэлектриках.

Рассмотрим производную от произведения

$$\vec{\nabla}((\varepsilon - 1)E^2) = E^2 \cdot \vec{\nabla}(\varepsilon - 1) + (\varepsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2) = E^2 \cdot \vec{\nabla}\varepsilon + (\varepsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2)$$

Тогда

$$(\varepsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \vec{\nabla}((\varepsilon - 1)E^2) - E^2 \cdot \vec{\nabla}\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \frac{1}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}((\varepsilon - 1)E^2) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}\varepsilon \quad \text{или, что то же самое:}$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2) = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad}((\varepsilon - 1)E^2) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon)$$

Два слагаемых в правой части равенства рассмотрим, как две разные силы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_1 = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad}((\varepsilon - 1)E^2) \\ \vec{f}_2 = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \end{array} \right.$$

Строгая теория сил в диэлектриках отличается только в первом слагаемом для силы:

$$\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \quad \text{— объемная плотность сил в}$$

строгой теории, где τ — плотность среды диэлектрика, производная по плотности среды рассматривается при постоянной температуре $T = \text{const}$.

В строгой теории в выражении для первой силы $(\varepsilon - 1)$ заменено на $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau$. Оба выражения примерно одинаковы, что следует из разложения диэлектрической проницаемости ε в ряд Тейлора по степеням плотности среды τ :

$$\varepsilon \approx 1 + \tau \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T + \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} \right)_{TT} + \dots \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - 1 \approx \tau \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T$$

Факультатив. Другое выражение сил в диэлектриках.

Покажем, что первое слагаемое в выражении

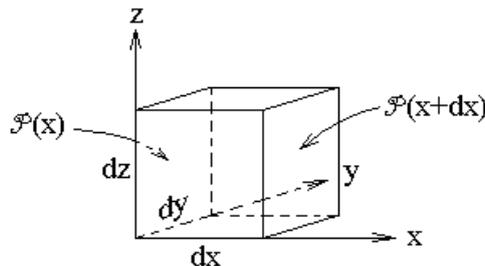
$$\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon)$$

эквивалентно давлению разному в разных точках диэлектрика.

Рассмотрим среду, давление \mathcal{P} в разных точках которой различно. Покажем, что это давление эквивалентно объемной плотности сил

$$\vec{f} = -\text{grad}(\mathcal{P}).$$

Рассмотрим маленький куб (или прямоугольный параллелепипед) с ребрами, направленными вдоль осей координат.



Рассмотрим давление на две грани перпендикулярные оси x . Площадь каждой грани равна $dy \cdot dz$. X -координаты граней равны x и $x+dx$. Сумма сил, действующих на эти грани со стороны давления, определяет x -проекцию силы, действующей на куб:

$$F_x = \mathcal{P}(x) \cdot dy \cdot dz - \mathcal{P}(x + dx) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Объемная плотность x -проекции силы:

$$f_x = \frac{F_x}{V} = \frac{-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$\vec{f} = -\vec{\nabla} \mathcal{P}$, что и требовалось доказать.

Тогда первое слагаемое

$$\vec{f}_I = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right)$$

в выражении $\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon)$ эквивалентно

давлению

$$\mathcal{P}_I = -\frac{1}{8\pi} \cdot \tau \cdot E^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T,$$

которое никуда не втягивает диэлектрик и для несжимаемого диэлектрика может быть отброшено. И действительно, если диэлектрик сдавить, то упругие силы в диэлектрике уравновесят давление. Следовательно, сила \vec{f}_I только растягивает $\mathcal{P}_I < 0$ диэлектрик, но никуда его не втягивает.

Если диэлектрик несжимаемый (жидкий или твердый), то силу \vec{f}_I можно не учитывать. В таком случае можно считать, что на диэлектрик действует только сила \vec{f}_{II} :

$$\vec{f}_{II} = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon.$$

Силу \vec{f}_{II} можно заменить эквивалентным давлением \mathcal{P}_{II} , приложенным к границам диэлектрика, если диэлектрик однородный и несжимаемый. Обсудим это подробнее.

Если диэлектрик однородный, то $\vec{\nabla} \varepsilon = 0$. Следовательно, $\vec{f}_{II} = 0$ везде, кроме границ диэлектрика, где ε испытывает скачок.

На границе диэлектрика $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \infty$, отсюда следует, что $\vec{\nabla} \varepsilon$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, $\vec{\nabla} \varepsilon = \infty$ и $\vec{f}_{II} = \infty$. Бесконечно большая объемная плотность сил в бесконечно тонком поверхностном слое диэлектрика эквивалентна поверхностной плотности сил или давлению на границу диэлектрика.

Найдем это давление.

Рассмотрим малый участок границы диэлектрика. Направим ось z перпендикулярно границе. Градиент диэлектрической проницаемости $\vec{\nabla} \varepsilon$ и объемная плотность сил \vec{f}_{II} также будут перпендикулярны границе.

Рассмотрим границу диэлектрика, как переходный слой конечной толщины h . Если ось z направлена из объема 1 в объем 2, то

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} &= \frac{F_{IIz}}{S} = \frac{\int_V f_{IIz} \cdot dV}{S} = \frac{\int_V f_{IIz} \cdot S \cdot dz}{S} = \int_V f_{IIz} dz = \\
&= \int_0^h f_{IIz} dz = \int_0^h \left(-\frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \right)_z \cdot dz = -\frac{1}{8\pi} \int_0^h E^2 \cdot (\text{grad}(\varepsilon))_z \cdot dz = \\
&= -\frac{1}{8\pi} \int_0^h E^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot dz = -\frac{1}{8\pi} \int_0^h E^2 d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon.
\end{aligned}$$

Зависимость подынтегрального выражения от диэлектрической проницаемости ε можно найти с учетом того, что при переходе через границу диэлектрика сохраняется тангенциальная составляющая поля E_τ , так как $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$, и сохраняется нормальная составляющая поля D_n , так как $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma = 0$. На границе нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда

$$\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (E_n^2 + E_\tau^2) \cdot d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon^2} + E_\tau^2 \right) \cdot d\varepsilon.$$

Интеграл может быть разбит на сумму двух интегралов. Величины D_n и E_τ не изменяются внутри переходного слоя границы диэлектрика и могут быть вынесены за пределы соответствующих интегралов. Тогда

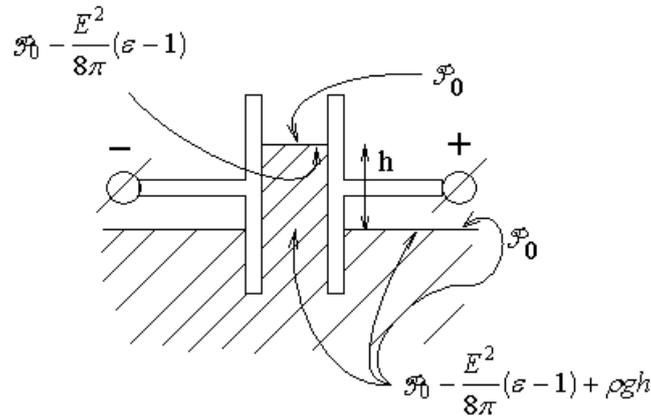
$$\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon^2} + E_\tau^2 \right) \cdot d\varepsilon = -\frac{D_n^2}{8\pi} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} - \frac{E_\tau^2}{8\pi} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\varepsilon.$$

Окончательно получаем:

$$\mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} = \frac{D_n^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + \frac{E_\tau^2}{8\pi} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Это давление приложено к границе двух диэлектриков и направлено в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Рассмотрим втягивание жидкого диэлектрика в заряженный конденсатор, считая, что есть только сила \vec{f}_{II} .



Пусть атмосферное давление равно \mathcal{P}_0 . На границе диэлектрика внутри заряженного конденсатора есть только тангенциальная составляющая напряженности электрического поля $E_\tau = E$. В таком случае к границе диэлектрика приложено давление $\mathcal{P}_H = \frac{E^2}{8\pi}(\epsilon - 1)$, которое тянет диэлектрик за его верхнюю границу вверх. Следовательно, под границей диэлектрика давление меньше атмосферного на величину \mathcal{P}_H . Под границей жидкого диэлектрика давление растет с глубиной h , как ρgh . Если h — высота подъема диэлектрика в конденсаторе, то внутри конденсатора давление на глубине h равно давлению снаружи конденсатора на той же высоте и равно $\mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\epsilon - 1) + \rho gh$. Это давление снаружи конденсатора будет как под границей диэлектрика, так и над его границей. Электрического поля снаружи конденсатора почти нет, поэтому нет и электрического давления на поверхность жидкости. То есть давление над поверхностью тоже $\mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\epsilon - 1) + \rho gh$, но с другой стороны — это атмосферное давление. Тогда

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\epsilon - 1) + \rho gh \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{8\pi}(\epsilon - 1) + \rho gh = 0 \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{E^2(\epsilon - 1)}{8\pi\rho g} \quad \text{— высота подъема жидкого диэлектрика в заряженном конденсаторе.}$$

$$\text{В системе СИ: } h = \frac{\epsilon_0 E^2(\epsilon - 1)}{2\rho g}.$$

Экзамен. Поляризация неполярных диэлектриков.

Неполярные диэлектрики состоят из молекул, которые не имеют жесткого дипольного момента.

Дипольный момент молекулы возникает только под действием электрического поля \vec{E} :

$\vec{p} = \alpha \vec{E}$, где α — поляризуемость молекулы.

На первом самом низком уровне строгости получим.

$$\vec{P} = n \cdot \langle \vec{p} \rangle = n\alpha \cdot \langle \vec{E} \rangle = n\alpha \vec{E}$$

Сравним это с $\vec{P} = \chi \vec{E}$ и получим, что $\chi = n\alpha$.

Подставим сюда выражение диэлектрической восприимчивости χ через диэлектрическую проницаемость ε :

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \text{ и получим:}$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = n\alpha \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon - 1 = 4\pi n\alpha$, здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, n — концентрация молекул, α — поляризуемость каждой молекулы.

Концентрация молекул n пропорциональна плотности среды τ . Тогда изменение диэлектрической проницаемости ε с изменением плотности среды происходит так, что отношение $\frac{\varepsilon - 1}{\tau}$ остается постоянным:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const.}$$
