Экзамен. Диэлектрики с особыми свойствами (продолжение)**.**

Факультативная вставка.

Электрострикция — квадратичная по электрическому полю деформация диэлектрика в отличие от линейной по полю деформации пьезоэлектриков.

Электреты — диэлектрики, долго сохраняющие поляризацию без внешнего электрического поля, например, пироэлектреты в нагретом состоянии помещают в электрическое поле и охлаждают.

Антисегнетоэлектрики имеют спонтанно-поляризованные элементарные ячейки, направления спонтанной поляризации в которых попарно антипараллельны.

Конец факультативной вставки.

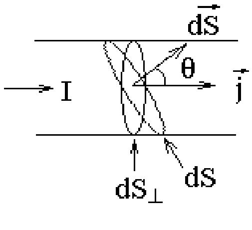
Электрический ток.

Экзамен. Сила тока, плотность тока, плотность поверхностного тока.

$I \equiv \dfrac{dq}{dt}$ — сила тока — это заряд, протекающий в единицу времени.

$j \equiv \dfrac{dI}{dS_{\perp}}$ — поверхностная плотность объемного тока — сила тока через единичную площадку перпендикулярную току. Для краткости будем говорить: плотность тока.

$i \equiv \dfrac{dI}{dl_{\perp}}$ — линейная плотность поверхностного тока — сила тока, текущего по поверхности и протекающего через единичный отрезок перпендикулярный току. Для краткости будем говорить: плотность поверхностного тока.



$dI = j \cdot dS_{\perp} = j \cdot dS \cdot \cos(\theta) = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$ =>

$dI = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$

$dI = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = j_n \cdot dS$ =>

$j_n = \dfrac{dI}{dS}$ — проекция плотности тока на нормаль к площадке.

Экзамен. Уравнение непрерывности или уравнение неразрывности.

Это уравнение следует из закона сохранения заряда.

Рассмотрим силу тока, вытекающего через границу S объема V :

$$\frac{dQ_0}{dt} = I = \oint\limits_S dI = \oint\limits_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right).$$

Здесь Q_0 — заряд, который вытекает. Если рассматривать вместо него заряд, который остается в объеме, то производная от заряда по времени поменяет знак. Тогда

$\oint\limits_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \frac{dQ}{dt} = 0$ — уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в интегральной форме. Здесь Q — заряд внутри замкнутой поверхности S.

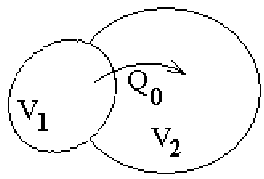
Разделим это равенство на объем, ограниченный поверхностью S и устремим объем к нулю. Тогда получим

$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ — уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в дифференциальной форме. Здесь частная производная по времени подчеркивает неизменность пространственных координат при дифференцировании по времени.

Факультативная вставка.

Как было отмечено выше, если рассматривать вместо вытекающего из объема V_1 заряда заряд, который остается в объеме, то производная от заряда по времени поменяет знак. Этот результат связан с законом сохранения заряда. Обсудим эту связь подробнее.

Обозначим область, в которую вытекают заряды, как объем V_2.



За границы объема $V_1 + V_2$ заряды не вытекают. Следовательно, по закону сохранения заряда в объеме $V_1 + V_2$ заряд сохраняется.

Если Q_1 и Q_2 заряды в объемах 1 и 2, то закон сохранения заряда:

$Q_1 + Q_2 = const$ => $\Delta\left(Q_1 + Q_2\right) = 0$ => $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2 = -Q_0$,

где $Q_0 = \Delta Q_2$ — заряд, который вытекает через границу S_1 объема V_1.

$\Delta Q_1 = -Q_0$ => $\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_0}{dt} = -\oint\limits_{S_1} \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)$ =>

$$\oint\limits_{S_1} \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \frac{dQ_1}{dt} = 0$$

Теперь в этом выражении можно опустить индекс 1. Тогда

$$\oint_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) + \frac{dQ}{dt} = 0$$ — уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в интегральной форме. Здесь Q — заряд внутри замкнутой поверхности S.

Конец факультативной вставки.

Уравнение непрерывности или уравнение неразрывности в дифференциальной форме:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Для постоянных токов $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Предполагается, что постоянные токи текли сколь угодно долго, тогда из $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ следует, что плотность заряда, изменяясь линейно во времени, достигает сколь угодно большой величины. Если не рассматривать бесконечные плотности заряда, то нужно считать, что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Тогда из уравнения неразрывности для постоянных токов получаем

$$div\left(\vec{j}\right) = 0$$

Для постоянных токов в интегральной форме получаем $\Phi_j = 0$ — поток плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю. Сколько линий плотности тока втекает в объем, столько и вытекает.

Линии плотности постоянных токов нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Линии плотности постоянных токов замкнуты.

Экзамен. Закон Ома.

$I \sim U$ — закон Ома. Сила тока через поперечное сечение проводника пропорциональна напряжению, приложенному к его торцам.

$U = RI$ — определение сопротивления проводника R.

Закон Ома выполняется не всегда, например, не выполняется для полупроводникового диода.

Факультативная вставка.

Для диода в направлении отпирания диода с хорошей точностью выполняется следующая связь между током I и напряжением U:

$$I = I_0\left(T\right) \cdot \left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1\right),$$

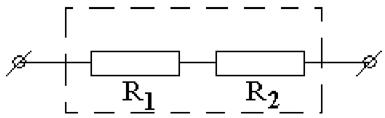
где T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, e — модуль заряда электрона.

Интересно, что зависимость $I_0\left(T\right)$ такова, что при постоянном токе через диод и изменении температуры диода напряжение на диоде приблизительно обратно пропорционально абсолютной температуре $U \sim \frac{1}{T}$.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Последовательное и параллельное соединение проводников.

Рассмотрим черный ящик, в котором последовательно соединены два резистора с сопротивлениями R_1 и R_2. Пусть мы не знаем, что внутри два резистора, и думаем, что резистор один. Измеряя напряжение и ток в схеме можно определить величину сопротивления этого резистора.



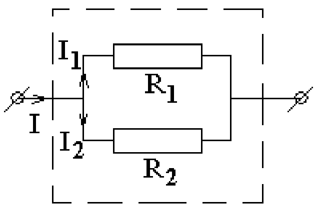
$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I \\ U = U_1 + U_2 \end{cases} \quad => \quad R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} = R_1 + R_2 \quad =>$$

$$R = R_1 + R_2$$

Аналогично для большего числа последовательно соединенных резисторов:

$R = \sum_i R_i$ — при последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются.

Рассмотрим теперь черный ящик, в котором два резистора соединены параллельно:



$$\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \quad => \quad \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad =>$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Аналогично для большего числа параллельно соединенных резисторов:

$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ — при параллельном соединении резисторов их проводимости складываются.

Проводимость — величина обратная сопротивлению.

Экзамен. Удельное сопротивление и удельная проводимость.

Рассмотрим длинный цилиндрический проводник, к торцам которого приложено электрическое напряжение.

Из симметрии задачи следует, что внутри проводника линии поля $\vec{E}$ направлены вдоль оси цилиндра.

Эквипотенциальные поверхности всегда направлены перпендикулярно градиенту потенциала и, следовательно, перпендикулярно напряженности $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Мысленно нарежем проводник этими эквипотенциальными поверхностями.

Получающиеся при этом проводники окажутся включенными последовательно друг другу.

Сопротивления при последовательном соединении складываются.

Общее сопротивление окажется пропорционально количеству последовательно включенных резисторов, а количество резисторов пропорционально общей длине цилиндра.

Следовательно, сопротивление цилиндра пропорционально его длине:

$R \sim l$.

Из симметрии задачи следует, что токи текут параллельно оси цилиндра.

Мысленно разобьем цилиндр проводника на множество более тонких цилиндров.

При этом токи не перетекают через границы между тонкими цилиндрами. Следовательно, можно считать, что тонкие цилиндры — это проводники, включенные параллельно друг другу.

Проводимости при параллельном соединении проводников складываются. Тогда общая проводимость окажется пропорциональной количеству проводников, которая в свою очередь пропорциональна площади сечения всего проводящего цилиндра:

$$\frac{1}{R} \sim S \qquad => \qquad R \sim \frac{1}{S}.$$

$$\begin{cases} R \sim l \\ R \sim \dfrac{1}{S} \end{cases} \qquad => \qquad R \sim \frac{l}{S}.$$

Равенство $R = \rho \dfrac{l}{S}$ является определением удельного сопротивления ρ. Здесь R — сопротивление проводника, l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения проводника.

Величина удельного сопротивления не зависит от размеров и формы проводника, а зависит только от его материала.

$\lambda \equiv \dfrac{1}{\rho}$ — определение удельной проводимости материала.

<u>Экзамен. Закон Ома в дифференциальной форме.</u>

$$R = \rho \frac{l}{S} \qquad => \qquad U = RI = \rho \frac{l}{S} I \qquad => \qquad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l} \qquad => \qquad j = \lambda E$$

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$ — закон Ома в дифференциальной форме. Здесь $\vec{j}$ — плотность тока, $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, λ — удельная проводимость.

Экзамен. Сторонние силы.

$div\left(\vec{j}\right) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ — уравнение неразрывности.

Для постоянных токов $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ => $div\left(\vec{j}\right) = 0$ =>

$\Phi_j = 0$ — поток плотности постоянных токов через любую замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно, линии постоянных токов замкнуты.

Рассмотрим интеграл $\oint\limits_l E_l dl$ вдоль замкнутой линии тока.

$$\begin{cases} d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j} \\ \vec{j} = \lambda \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \oint\limits_l E_l dl > 0$$

Это с одной стороны, а с другой стороны $\oint\limits_l E_l dl = 0$, согласно теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$. Казалось бы, для постоянных токов поле $\vec{E}$ нельзя считать электростатическим. Однако $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и это означает, что заряды не изменяются. При постоянных токах распределение зарядов неизменно. При неизменном распределении зарядов их поле — электростатическое поле.

Итак, мы получили противоречие $\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl > 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \end{cases}$. Это противоречие доказывает, что для существования постоянных токов необходимо наличие неэлектрических посторонних сил. Эти силы будем называть сторонними силами $\vec{F}_{стор}$.

$\vec{E}_{стор} \equiv \dfrac{\vec{F}_{стор}}{q}$ определение напряженности сторонних сил.

Тогда, обобщая закон Ома, получим:

$\vec{j} = \lambda\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right)$ — обобщенный закон Ома или закон Ома с учетом сторонних сил в дифференциальной форме.

Факультатив. Свинцовый аккумулятор — пример источника сторонних сил.

Рассмотрим две пластины. Одна пластина свинцовая Pb, другая покрыта окисью свинца PbO_2. На самом деле в свинцовом аккумуляторе используются две свинцовые пластины, но об этом чуть позже.

Между пластинами серная кислота и вода.

$$H_2SO_4 \Leftrightarrow 2H^+ + SO_4{}^{2-}$$

На каждой пластине идет химическая реакция. В результате этих реакций к пластинам идут заряды противоположных знаков. Движение этих зарядов замыкается через внешнюю по отношению к аккумулятору электрическую цепь. Если внешней цепи нет, то химические реакции идут до тех пор, пока электрическое поле зарядов на пластинах не останавливает течение реакций.

На свинцовой (Pb) пластине ионы $SO_4{}^{2-}$ вытягивают в раствор свинец, оставляя на пластине отрицательный заряд. Идет химическая реакция

$$Pb^{4+} + 2SO_4^{2-} \Leftrightarrow Pb(SO_4)_2.$$

На второй пластине из окиси свинца (PbO_2) ионы H^+ вытягивают в раствор кислород из молекул PbO_2, оставляя на пластине свинец и положительный заряд. Идет химическая реакция

$$PbO_2 + 4H^+ \Leftrightarrow Pb^{4+} + 2H_2O.$$

Эти реакции показывают, как аккумулятор разряжается.

Теперь обсудим, как заряжают аккумулятор.

Аккумулятор заряжают в два этапа.

1). Две свинцовые Pb пластины опускают в раствор серной кислоты H_2SO_4 в воде H_2O.

Кислота взаимодействует со свинцом:

$$Pb + 2H_2SO_4 \rightarrow 2H_2 + Pb(SO_4)_2$$

Из раствора выходит водород. В растворе остается вода и соль $Pb(SO_4)_2$.

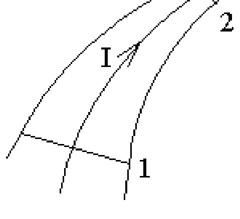
2). Затем через пластины и раствор пропускают постоянный ток.

При этом химические реакции на пластинах идут в обратном направлении по сравнению с тем, как это обсуждалось выше при разрядке аккумулятора.

На одной пластине выделяется свинец Pb, на другой пластине свинец окисляется до окиси свинца PbO_2. Аккумулятор заряжается.

<u>Экзамен. Закон Ома для участка цепи.</u>

(в интегральной форме и с учетом ЭДС)



Возьмем закон Ома в дифференциальной форме

$\vec{j} = \lambda \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{стор} \right)$, разделим его на удельную проводимость λ и получим

$\vec{E} + \vec{E}_{стор} = \dfrac{1}{\lambda} \vec{j}$.

Подействуем на это равенство оператором $\int\limits_1^2 \left(\bullet, d\vec{l} \right)$ и получим:

$$\int\limits_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l} \right) + \int\limits_1^2 \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l} \right) = \int\limits_1^2 \frac{1}{\lambda} \left(\vec{j}, d\vec{l} \right).$$

Здесь первый интеграл — это по определению напряжение между точками участка цепи 1 и 2:

$$U \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l} \right).$$

Второй интеграл называют электродвижущей силой или ЭДС:

$\mathcal{E} \equiv \int\limits_1^2 \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l} \right)$ — определение ЭДС — электродвижущей силы.

Третий интеграл можно преобразовать с учетом того, что $d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j}$:

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\vec{j}, d\vec{l} \right) = \int\limits_1^2 \frac{1}{\lambda} \cdot j \cdot dl = \int\limits_1^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{I}{S_\perp} \cdot dl = I \cdot \int\limits_1^2 \frac{dl}{\lambda \cdot S_\perp}.$$

Интеграл в правой части равенства представляет собой сумму сопротивлений последовательно включенных резисторов с длинами dl и площадями поперечного сечения $S_\perp$:

$R = \int\limits_1^2 \dfrac{dl}{\lambda \cdot S_\perp}$ — сопротивление участка цепи.

Тогда

$U + \mathcal{E} = RI$ — закон Ома для участка цепи.