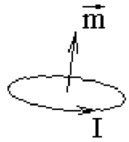
Экзамен. Магнитный диполь. Момент сил, действующих на виток с током в однородном магнитном поле.

$\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S}$ — определение магнитного дипольного момента тока I в контуре, ограничивающем площадку $\vec{S}$. Направление дипольного момента образует правый винт с направлением тока.



Факультативная вставка.

В системе СИ: $\vec{m} = I\vec{S}$.

Магнитный дипольный момент может быть выражен иначе:

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S} = \frac{I}{2c}\oint_l \left[\vec{r}, d\vec{l}\right] = \frac{1}{2c}\int_V \left[\vec{r}, \vec{j}\right] dV .$$

Конец факультативной вставки.

Докажем, что момент сил $\vec{M}$, действующих на рамку с током в магнитном поле $\vec{B}$ равен:

$$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right].$$

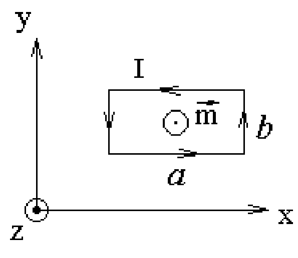
В системе СИ равенство выглядит также.

Это равенство аналогично равенству $\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$ в электростатике.

Докажем сначала для прямоугольной рамки с током.

Выберем направление оси z системы координат вдоль вектора $\vec{m}$ (перпендикулярно плоскости рамки), оси x и y повернем вокруг оси z и направим вдоль сторон рамки с током.

Обозначим длину рамки вдоль оси x за a, вдоль оси y — за b.

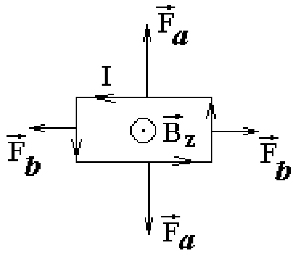


Произвольное магнитное поле $\vec{B}$ разложим на составляющие вдоль осей координат:

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z .$$

Докажем требуемое равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ для каждой отдельной компоненты поля $\vec{B}$.

Рассмотрим магнитное поле с одной составляющей $\vec{B} = \vec{B}_z$.



Направление и величина сил на рисунке определяются законом Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}, B \right]$.

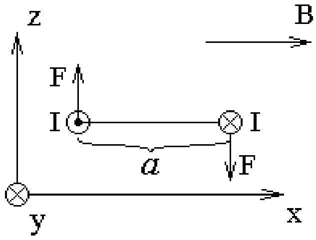
Из рисунка видно, что противоположно направленные силы попарно дают нулевой момент. Следовательно, $\vec{M} = 0$ для всех 4-х сил.

С другой стороны, $\left[\vec{m}, \vec{B}\right] = 0$, так как $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{B}$.

Следовательно, при $\vec{B} = \vec{B}_z$ условие $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ выполнено, так как каждая часть равенства равна нулю.

Рассмотрим теперь магнитное поле вдоль оси x.

$\vec{B} = \vec{B}_x$.



На отрезках рамки длиной a, которые направлены вдоль оси x и, соответственно, вдоль поля $\vec{B}$, сила Ампера равна нулю.

Сумма сил равна нулю. При этом условии момент сил не зависит от положения начала координат. Выберем начало координат в середине левого отрезка с током. Тогда плечо для силы Ампера, действующей на левый отрезок, равно нулю, и момент сил определяется только силой, действующей на правый отрезок. Момент силы $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ направлен вдоль оси y, так как вектор $\vec{r}$ направлен слева направо.

Это с одной стороны, а с другой стороны вектор $\left[\vec{m}, \vec{B}\right] = \left[\vec{m}_z, \vec{B}_x\right]$ также направлен вдоль оси y. Следовательно, $\vec{M} \uparrow\uparrow \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$.

Покажем, что эти векторы не только одинаково направлены, но и равны по величине.

Момент сил равен произведению силы на плечо

$M = aF$.

Подставим сюда выражение для силы из закона Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}, \vec{B} \right]$ откуда $F = \frac{I}{c} bB$. Тогда

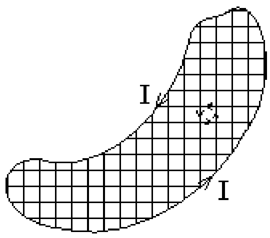
$$M = a\frac{I}{c} bB = \frac{I}{c} SB = \left|\vec{m}\right| B = \left\|\left[\vec{m}, \vec{B}\right]\right\|.$$

Следовательно, равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ доказано при $\vec{B} = \vec{B}_x$.

Аналогично доказывается, что $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ при $\vec{B} = \vec{B}_y$.

Складывая равенства $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ для трех составляющих вектора $\vec{B}$, получим, что равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ выполняется для любого вектора $\vec{B}$ и прямоугольной рамки с током.

Любой контур в плоскости можно приблизительно представить, как суперпозицию токов в малых прямоугольных рамках:



Складывая токи прямоугольных рамок, получим ток по краю контура. Для каждой i-ой прямоугольной рамки доказано, что

$$\vec{M}_i = \left[\vec{m}_i, \vec{B}\right].$$

Просуммируем это равенство по всем прямоугольным контурам, по всем i, и получим

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{m}_i, \vec{B}\right] = \sum_i \left[\frac{I}{c}\vec{S}_i, \vec{B}\right] = \left[\frac{I}{c}\sum_i \vec{S}_i, \vec{B}\right] = \left[\frac{I}{c}\vec{S}, \vec{B}\right] = \left[\vec{m}, \vec{B}\right].$$

Тогда

$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$, что и требовалось доказать.

Для поверхности неплоского контура будем считать равенство $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$ определением вектора суммарной поверхности, тогда равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ будет справедливо и для неплоского контура.

Экзамен. Энергия магнитного диполя в магнитном поле.

В электростатике:

$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$ — момент сил, действующих на диполь в электрическом поле.

$W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — энергия диполя в электрическом поле.

Эти две формулы в электростатике мы выводили независимо друг от друга. Однако энергия диполя в электрическом поле определяется ориентацией диполя, то есть зависит от его поворота.

Повернуть диполь стремится момент сил.

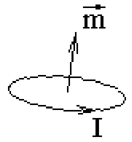
Следовательно, в электростатике формула для энергии однозначно определяется формулой для момента сил.

То есть из формулы $\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$ можно доказать $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$.

Заменим во всех формулах этого доказательства $\vec{p} \to \vec{m}$ и $\vec{E} \to \vec{B}$.

Тогда получиться, что из формулы $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ можно доказать $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$.

Следовательно, $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ — энергия магнитного диполя $\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S}$



Интересно, что магнитное поле не потенциально $rot\left(\vec{B}\right) \neq 0$, а магнитные силы потенциальны $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$.

Это возможно, так как сила Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c}\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$ не параллельна магнитному полю $\vec{B}$.

Экзамен. Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.

$\vec{F} = -\vec{\nabla} W = -\vec{\nabla}\left(-\left(\vec{m}, \vec{B}\right)\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ =>

$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ — сила, действующая на магнитный диполь $\vec{m} \equiv \frac{I}{c}\vec{S}$.

Для сравнения в электростатике $\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$, а при условии $rot\left(\vec{E}\right) = 0$ получаем $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$.

Факультатив. Векторный потенциал поля точечного магнитного диполя.

$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ — определение векторного потенциала для элемента тока $Id\vec{l}$, r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения.

Тогда для замкнутого контура с током векторный потенциал:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

С учетом того, что $d\vec{l}\,' = d\vec{r}\,'$ получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$ — векторный потенциал замкнутого контура с током.

Это точное выражение для векторного потенциала, а нас интересует приближенное выражение с учетом того, что расстояние от токов до точки наблюдения гораздо больше, чем размеры контура с током.

Выберем начало координат где-то в области магнитного диполя.

Пусть $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор элемента тока магнитного диполя,

$\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения векторного потенциала, создаваемого магнитным диполем.

Для точечного магнитного диполя $r' \ll r$.

Разложим $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ по степеням малого параметра $\vec{r}\,'$.

Сделаем это аналогично разложению по x одномерной функции $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \approx f(0) + x \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} \\ x \to \vec{r}\,' \\ f(x) \to \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla}' \left.\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right|_{\vec{r}\,'=0} \right)$$

Заметим, что для любой функции от $(\vec{r} - \vec{r}\,')$ справедливо равенство $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$, так как

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \cdot}{\partial x'} = \frac{\partial \cdot}{\partial (x - x')} \cdot \frac{\partial (x - x')}{\partial x'} = \frac{\partial \cdot}{\partial (x - x')} \cdot (-1) \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial (x - x')} \cdot \frac{\partial (x - x')}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial (x - x')} \cdot (+1) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Тогда

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla}' \left.\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right|_{\vec{r}\,'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla} \left.\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right|_{\vec{r}\,'=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}\,', \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right)$$

Здесь $\vec{\nabla}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, так как $\begin{cases} \varphi = \dfrac{q}{r} \\ \vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases}$. Тогда

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}\,', -\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\cdot\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right)$$

Подставим это в выражение для векторного потенциала контура с током $\vec{A}(\vec{r}) = \oint\limits_{l'} \dfrac{I}{c}\cdot\dfrac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ и получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{I}{c}\cdot\left\{\oint\limits_{l'}\frac{d\vec{r}\,'}{r} + \oint\limits_{l'}\frac{\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right)}{r^3}d\vec{r}\,'\right\} = \frac{I}{c}\cdot\frac{1}{r}\cdot\oint\limits_{l'}d\vec{r}\,' + \frac{I}{c}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right)d\vec{r}\,'$$

Здесь первый интеграл в правой части равенства равен нулю $\oint\limits_{l'}d\vec{r}\,' = 0$, так как интеграл $\oint\limits_{l'}d(\cdot) = 0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала и в частности для $\vec{r}\,'$. Тогда

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{I}{cr^3}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right)d\vec{r}\,'$$

Мы хотим выразить векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r})$ через магнитный дипольный момент $\vec{m} \equiv \dfrac{I}{c}\vec{S}$, где $\vec{S}$ — вектор площадки ограниченной контуром с током I.

С этой целью рассмотрим

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right] = \vec{M} = \oint\limits_{l'}d\vec{M} = \oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,',d\vec{F}\,'\right] = \oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,',\frac{I}{c}\left[d\vec{l}\,',\vec{B}\right]\right]$$

Здесь в последнем равенстве подставлено выражение для силы Ампера $d\vec{F}\,' = \dfrac{I}{c}\left[d\vec{l}\,',\vec{B}\right]$, действующей на элемент тока $Id\vec{l}\,'$, радиус-вектор которого равен $\vec{r}\,'$.

Учтем, что $d\vec{l}\,' = d\vec{r}\,'$, и получим

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right] = \oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,',\frac{I}{c}\left[d\vec{r}\,',\vec{B}\right]\right] = \frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left[\vec{r}\,',\left[d\vec{r}\,',\vec{B}\right]\right].$$

Двойное векторное произведение в правой части равенства преобразуем по правилу "бац минус цап" и получим

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right]=\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'} d\vec{r}\,'\left(\vec{r}\,',\vec{B}\right)-\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\vec{B}\left(\vec{r}\,',d\vec{r}\,'\right)=\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{B}\right)d\vec{r}\,'-\frac{I}{c}\vec{B}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',d\vec{r}\,'\right)$$

Второй интеграл в правой части равенства равен нулю. И действительно,

$$d\left(\vec{r}\,',\vec{r}\,'\right)=\left(d\vec{r}\,',\vec{r}\,'\right)+\left(\vec{r}\,',d\vec{r}\,'\right)=2\left(\vec{r}\,',d\vec{r}\,'\right) \quad => \quad \left(\vec{r}\,',d\vec{r}\,'\right)=\frac{1}{2}d\left(\vec{r}\,',\vec{r}\,'\right) \quad =>$$

$\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',d\vec{r}\,'\right)=\frac{1}{2}\cdot\oint\limits_{l'}d\left(\vec{r}\,',\vec{r}\,'\right)$, где последний интеграл равен нулю, так как интеграл $\oint\limits_{l'}d\left(\cdot\right)=0$ равен нулю для любой функции под знаком дифференциала.

Тогда в выражении для векторного произведения $\left[\vec{m},\vec{B}\right]$ останется только первый интеграл:

$$\left[\vec{m},\vec{B}\right]=\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{B}\right)d\vec{r}\,'$$

Это равенство справедливо для любого значения вектора $\vec{B}$, если считать, что поле $\vec{B}$ одинаковое во всех точках.

Хотя это равенство было получено с использованием закона Ампера $d\vec{F}=\frac{I}{c}\left[d\vec{l},\vec{B}\right]$, вектор $\vec{B}$ в равенстве $\left[\vec{m},\vec{B}\right]=\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{B}\right)d\vec{r}\,'$ может иметь любое значение, а значит, его можно сделать равным любому наперед заданному вектору, например, вектору $\vec{r}$.

Следовательно, в равенстве $\left[\vec{m},\vec{B}\right]=\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{B}\right)d\vec{r}\,'$ вектор $\vec{B}$ можно заменить на вектор $\vec{r}$. В результате получим

$$\left[\vec{m},\vec{r}\right]=\frac{I}{c}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right)d\vec{r}\,'.$$

Сравним это равенство с полученным выражением для векторного потенциала $\vec{A}\left(\vec{r}\right)\approx\frac{I}{cr^3}\cdot\oint\limits_{l'}\left(\vec{r}\,',\vec{r}\right)d\vec{r}\,'$ и получим

$\vec{A}=\frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3}$ — векторный потенциал точечного магнитного диполя, где $\vec{r}$ — вектор из диполя в точку наблюдения. Формулу без доказательства нужно знать <u>**к экзамену**</u>.

Заметим, что это равенство похоже на потенциал электрического диполя $\varphi=\frac{\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{r^3}$.

<u>Факультатив. Магнитное поле B точечного магнитного диполя.</u>

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) = rot\left(\frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3}\right) = \left[\vec{\nabla},\frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3}\right] = \left[\vec{\nabla},\left[\vec{m},\frac{\vec{r}}{r^3}\right]\right]$$

Правую часть равенства распишем по правилу "бац минус цап" и получим

$$\vec{B} = \vec{m}\left(\vec{\nabla},\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{\vec{r}}{r^3}\left(\vec{\nabla},\vec{m}\right).$$

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, так как $\left(\vec{\nabla},\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = div\left(\vec{E}_1\right)$, где $\vec{E}_1$ — напряженность поля единичного точечного заряда в начале координат, в точке $\vec{r} = 0$. По теореме Гаусса в дифференциальной форме $div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho$, а для единичного точечного заряда в начале координат имеем $\rho = 0$ во всех точках кроме точки $\vec{r} = 0$, следовательно, $div\left(\vec{E}_1\right) = 0$ во всех точках, кроме точки $\vec{r} = 0$, тогда и $\left(\vec{\nabla},\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$ во всех точках, кроме точки $\vec{r} = 0$.

Тогда магнитное поле диполя:

$$\vec{B} = -\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Раскроем правую часть равенства, как производную от произведения $\vec{r}$ на $\frac{1}{r^3}$:

$$\vec{B} = -\frac{1}{r^3}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\frac{1}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое правой части равенства:

$$\left(\vec{m},\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \left(m_x\frac{\partial}{\partial x} + m_y\frac{\partial}{\partial y} + m_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) =$$

$$= m_x\frac{\partial}{\partial x}x\vec{i} + m_y\frac{\partial}{\partial y}y\vec{j} + m_z\frac{\partial}{\partial z}z\vec{k} = m_x\vec{i} + m_y\vec{j} + m_z\vec{k} = \vec{m}$$

Тогда

$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} - \vec{r}\left(\vec{m},\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2\vec{\nabla}\frac{1}{r}.$$

Здесь $\vec\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec r}{r^3}$, так как $\begin{cases}\varphi=\dfrac{q}{r}\\ \vec E=q\dfrac{\vec r}{r^3}\\ \vec E=-\vec\nabla\varphi\end{cases}$. Тогда

$\vec\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdot\left(-\frac{\vec r}{r^3}\right)=-3\frac{\vec r}{r^5}$. Подставим это значение в выражение для магнитного поля $\vec B$ точечного магнитного диполя и получим:

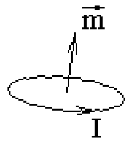
$$\vec B=-\frac{\vec m}{r^3}-\vec r\left(\vec m,-3\frac{\vec r}{r^5}\right)=3\frac{(\vec m,\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec m}{r^3}.$$

$\vec B=3\frac{(\vec m,\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec m}{r^3}$ — магнитное поле точечного диполя, где $\vec m\equiv\frac{I}{c}\vec S$ — магнитный дипольный момент, $\vec r$ — вектор из диполя в точку наблюдения. Эту формулу без доказательства нужно знать **<u>к экзамену</u>**. Заметим, что это выражение полностью совпадает с выражением для электрического поля, создаваемого электрическим диполем $\vec E=3\frac{(\vec p,\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec p}{r^3}$.

$\vec B=3\frac{(\vec m,\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec m}{r^3}+\frac{8}{3}\pi\cdot\vec m\cdot\delta(\vec r)$ магнитное поле точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя (без доказательства). Но $\vec E=3\frac{(\vec p,\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec p}{r^3}-\frac{4}{3}\pi\cdot\vec p\cdot\delta(\vec r)$.

<u>Магнитное поле в веществе.</u>
<u>Экзамен. Намагниченность и связанные токи.</u>

$\vec M\equiv\frac{d\vec m}{dV}$ — намагниченность или объемная плотность магнитного дипольного момента, где $\vec m\equiv\frac{I}{c}\vec S$ — магнитный дипольный момент.



Для электрического поля аналогично $\vec P\equiv\frac{d\vec p}{dV}$ — поляризация или объемная плотность электрического дипольного момента, где $\vec p\equiv\sum_i q_i\vec r_i$ — электрический дипольный момент.

Связанные токи, они же молекулярные токи, они же токи намагничения.

Связанные токи — внутриатомные и внутримолекулярные токи — токи с перемещением зарядов в пределах одной молекулы.

Токи проводимости или свободные токи — токи с макроскопическим перемещением зарядов — токи с перемещением зарядов много большим, чем размеры одной молекулы.

Будем обозначать:

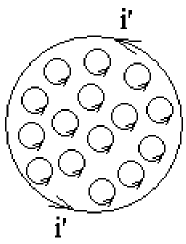
$I', \vec{j}', \vec{i}'$ — связанные токи;

$I, \vec{j}, \vec{i}$ — токи проводимости;

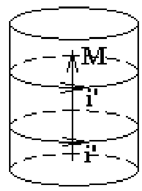
$\left(I'+I\right), \left(\vec{j}'+\vec{j}\right), \left(\vec{i}'+\vec{i}\right)$ — полные токи.

Рассмотрим цилиндр, намагниченный вдоль оси, то есть с объемной плотностью магнитного дипольного момента, направленной вдоль оси цилиндра.

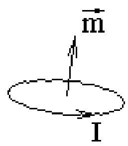
Вид с торца цилиндра со связанными токами:



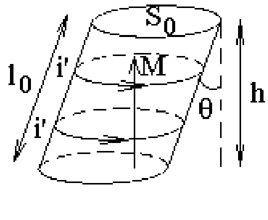
При сложении молекулярных токов получается ток, как бы идущий по боковой поверхности цилиндра — связанный ток.



Намагниченность цилиндра и связанные токи образуют правый винт, как и для магнитного момента каждого атома:



Рассмотрим теперь наклонный цилиндр, намагниченный перпендикулярно плоскости основания.



Чтобы найти связь между намагниченностью и связанными токами, выразим магнитный момент всего цилиндра двумя способами и приравняем эти два выражения.

$$\begin{cases} m = MV \\ m = \dfrac{I'}{c} S_0 \end{cases} \quad => \quad MV = \frac{I'}{c} S_0 \quad => \quad M \cdot S_0 h = \frac{i' l_0}{c} S_0 \quad =>$$

$$M \cdot \frac{h}{l_0} = \frac{i'}{c} \quad => \quad M \cdot \cos(\theta) = \frac{i'}{c} \quad =>$$

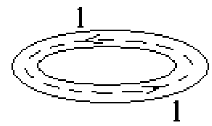
$M_\tau = \dfrac{i'}{c}$ — связь тангенциальной составляющей намагниченности и плотности поверхностных связанных токов на границе магнетик-вакуум.

На границе двух магнетиков:

$M_{2\tau} - M_{1\tau} = \dfrac{i'}{c}$, где $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}\,'}{i'}, \vec{n}_{1\to 2} \right]$.

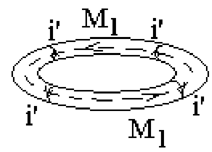
Скачок тангенциальной составляющей намагниченности образует правый винт с плотностью поверхностных связанных токов.

Рассмотрим замкнутый контур l, который целиком находится в намагниченном веществе. Пусть намагниченность вещества имеет различную величину в разных точках. Рассмотрим тонкую трубку вокруг контура в виде тора, который так же целиком находится внутри намагниченного вещества.



Рассмотрим M_l — составляющую намагниченности вдоль контура l. Забудем на время об остальных составляющих намагниченности.

Если тор намагничен вдоль контура l, то связанные токи будут течь по поверхности тора, охватывая намагниченность M_l по правилу правого винта.



Рассмотрим величину связанного тока, пронизывающего контур l, то есть протыкающего площадку, ограниченную контуром l.

Связанные токи протыкают площадку, ограниченную контуром l, пересекая линию внутренней окружности тора.

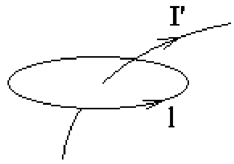
Для точек поверхности тора на этой линии $M_\tau = \dfrac{i'}{c}$ — это составляющая намагниченности вдоль этой линии, направленная по касательной к поверхности тора и перпендикулярно связанным токам.

Тогда $M_l \approx M_\tau = \dfrac{i'}{c}$ — составляющая магнитного поля вдоль контура l.

Найдем связанный ток, пронизывающий весь контур l:

$$I' = \oint_l dI' = \oint_l i' dl = \oint_l c M_l dl = c \oint_l M_l dl \qquad =>$$

$\oint_l M_l dl = \dfrac{I'}{c}$, где направление обхода контура l и направление пронизывающих контур связанных токов I' образуют правый винт.

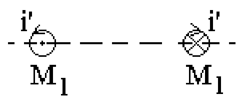


В системе СИ: $\oint_l M_l dl = I'$.

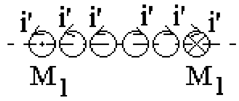
<u>Факультативная вставка.</u>

Докажем, что нет других связанных токов пронизывающих контур l, кроме токов, текущих по боковой поверхности тора.

Повернем плоскость рисунка так, чтобы плоскость контура l оказалась перпендикулярна плоскости рисунка.



Магнетик на площадке, ограниченной контуром, можно разбить на трубки (торы) других контуров.



Для новых трубок, сколько связанных токов втекает в площадку, ограниченную контуром l, столько и вытекает.

Кроме составляющей намагниченности M_l, остальные составляющие намагниченности создают связанные токи, которые так же имеют нулевой суммарный связанный ток через площадку, ограниченную контуром.

<u>Конец факультативной вставки.</u>