Факультатив. Индуктивность или коэффициент самоиндукции.

По аналогии с определением коэффициента взаимной индукции $\Phi_{ki} = L_{ki}\dfrac{I_i}{c}$ можно ввести коэффициент самоиндукции $\Phi_{ii} = L_{ii}\dfrac{I_i}{c}$. В этом равенстве рассматривается один i-й контур, поэтому индекс i можно опустить. Присутствие других контуров не влияет на величину коэффициента L_{ii}. Тогда

$\Phi = L\dfrac{I}{c}$ — определение индуктивности или коэффициента самоиндукции.

Нужно знать эту формулу к экзамену, хотя весь вопрос факультативный.

Данное определение индуктивности нестрогое.

Определение нестрогое, так как нет ни одной задачи, в которой по этой формуле можно было бы найти величину индуктивности точно. Проблема в том, что если провод тонкий, то индуктивность бесконечна, а если провод толстый, то непонятно, как провести контур, через который нужно вычислять поток магнитного поля. Контур проходит не совсем по оси провода.

Покажем, что для контура из тонкого провода индуктивность бесконечна.

Дело в том, что вблизи тонкого провода проходит бесконечный поток магнитного поля.

Если подойти к проводу очень близко на расстояние гораздо меньшее радиуса кривизны провода, то провод будет казаться прямым. Магнитное поле на расстоянии r от прямого провода с током $B = \dfrac{2I}{cr}$.

Пусть длина контура l_0.

Вычислим поток магнитного поля через тонкую полоску шириной r_0, касающуюся бесконечно тонкого провода с током.

$$\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) \approx \int\limits_S B \cdot dS \approx \int\limits_S \frac{2I}{cr} \cdot dS = \int\limits_0^{r_0} \frac{2I}{cr} \cdot l_0 dr = \frac{2I\,l_0}{c} \cdot \int\limits_0^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{2I\,l_0}{c} \cdot \ln(r)\Big|_0^{r_0} = \infty$$

Интеграл расходится на нижнем пределе, так как $\ln(r) \xrightarrow[r \to 0]{} -\infty$.

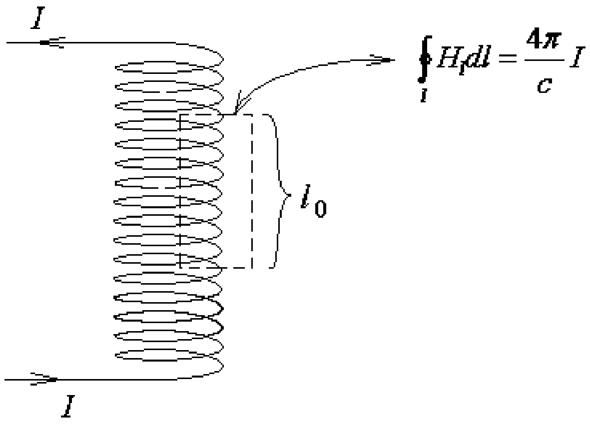
Итак, $\Phi_B \to \infty$ и, следовательно, $L \to \infty$ при стремлении диаметра провода к нулю, так как $\Phi = L\dfrac{I}{c}$.

Более строгое определение индуктивности будет позднее дано факультативно через энергию магнитного поля.

Экзамен. Индуктивность длинного соленоида с плотной намоткой.

Алгоритм решения поставленной задачи: $I \to H \to B \to \Phi \to L$.

Рассмотрим теорему о циркуляции поля $\vec{H}$ для прямоугольного пунктирного контура:



Магнитное поле снаружи длинного соленоида мало, следовательно, вклад в циркуляцию поля $\vec{H}$ дает только вертикальный отрезок длиной l_0 внутри соленоида. Тогда

$Hl_0 = \frac{4\pi}{c} N_0 I$, где N_0 — число витков на отрезке соленоида длиной l_0, $N_0 I$ — ток, пронизывающий пунктирный контур интегрирования.

$N_0 = n l_0$, где n — число витков на единице длины соленоида, тогда

$$Hl_0 = \frac{4\pi}{c} n l_0 I \quad => \quad B = H = \frac{4\pi}{c} nI \quad =>$$

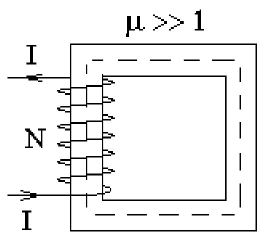
$\Phi = N \cdot BS = N \cdot \frac{4\pi}{c} nI \cdot S = L\frac{I}{c}$, где N — общее число витков в соленоиде, n — число витков на единице длины соленоида S — площадь поперечного сечения соленоида, BS — поток поля $\vec{B}$ через один виток. Тогда индуктивность соленоида:

$$L = 4\pi\, nNS = \frac{4\pi N^2 S}{l}.$$

В системе СИ для индуктивности $4\pi \to \mu_0$ и $L = \mu_0 nNS$.

<u>Экзамен. Индуктивность катушки с замкнутым сердечником.</u>

Алгоритм решения задачи: $I \to H \to B \to \Phi \to L$.



Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{H}$ по пунктирному контуру вдоль оси сердечника.

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

Магнитное поле направлено вдоль оси сердечника и одинаковое во всех точках сердечника, если площадь поперечного сечения сердечника везде одинаковая. Тогда

$Hl = \frac{4\pi}{c} NI$, где NI — сумма токов проводимости, пронизывающих пунктирный контур интегрирования. Тогда

$$H = \frac{4\pi\, NI}{cl} \qquad => \qquad B = \mu H = \frac{4\pi\mu\, NI}{cl} \qquad =>$$

$$\Phi = N \cdot BS = \frac{4\pi\mu\, N^2 S}{l} \cdot \frac{I}{c} = L\frac{I}{c} \qquad =>$$

$L = \frac{4\pi\mu\, N^2 S}{l}$, где l — длина сердечника, N — число витков катушки, S — площадь поперечного сечения сердечника.

Здесь нельзя заменить $\frac{N}{l} \to n$, так как, если обмотка не по всей длине сердечника, то $\frac{N}{l} \neq n$.

В системе СИ: $L = \frac{\mu_0 \mu\, N^2 S}{l}$ или $4\pi \to \mu_0$.

<u>Экзамен. Механическая работа магнитных сил при перемещении витка с током в магнитном поле.</u>

(без учета работы ЭДС индукции)

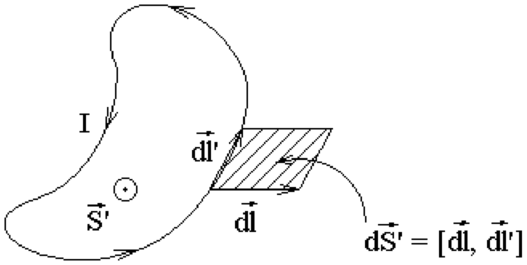
В названии вопроса подчеркивается, что рассматривается механическая работа, так как кроме этой работы работу совершает ЭДС индукции, которая возникает в контуре с током при его перемещении в магнитном поле. Нас интересует только механическая работа, которую совершают силы Ампера.

Пусть $d\vec{l}$ — перемещение элемента контура $d\vec{l}\,'$. Тогда

$$dA = \oint_{l'} \left(d\vec{F}\,', d\vec{l} \right) = \oint_{l'} \left(\frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}\,', \vec{B} \right], d\vec{l} \right) = \frac{I}{c} \cdot \oint_{l'} \left(\left[d\vec{l}, d\vec{l}\,' \right], \vec{B} \right).$$

Здесь $d\vec{F}\,'$ — сила Ампера, действующая на элемент контура $d\vec{l}\,'$. В последнем равенстве сделана циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении векторов, которая не изменяет величины смешанного произведения.

$\left[d\vec{l}, d\vec{l}\,' \right] = d\vec{S}\,'$ — изменение вектора площадки, ограниченной контуром с током, так как:



Тогда

$$dA = \frac{I}{c} \cdot \oint\limits_{l'} \left(\vec{B}, d\vec{S}'\right) = \frac{I}{c} \cdot \oint\limits_{l'} d\Phi_B .$$

Здесь $\oint\limits_{l'} d\Phi_B$ — сумма изменений потока магнитного поля при перемещении всех элементов контура. Эта сумма равна изменению потока $d\Phi_B$ для всего контура. Тогда

$$dA = \frac{I}{c} \cdot d\Phi_B$$

Здесь dA — работа магнитных сил при перемещении витка с током I, $d\Phi_B$ — изменение потока поля $\vec{B}$ через поверхность, которая своими краями опирается на контур с током I.

Поток может изменяться по двум причинам.

1). Перемещение контура в неизменном магнитном поле. При этом совершается работа магнитных сил.

2). Изменение магнитного поля и потока магнитного поля при неподвижном контуре. При этом работа не совершается.

Формула $dA = \frac{I}{c} \cdot d\Phi_B$ справедлива для изменения потока только в первом случае.

В системе СИ: $dA = I \cdot d\Phi_B$.

<u>Экзамен. Механическая работа магнитных сил взаимодействия системы токов без учета взаимодействия каждого контура с самим собой.</u>

Как и в предыдущем вопросе, работа ЭДС индукции в каждом контуре с током не учитывается.

Пусть dA_{ki} — работа, совершаемая магнитными силами над k-ым контуром со стороны магнитного поля тока i-го контура.

Будем считать, что $k \neq i$. Работу dA_{ii} рассмотрим отдельно в следующем вопросе. Итак $k \neq i$. Используя формулу $dA = \frac{I}{c} \cdot d\Phi_B$, получим

$$dA_{ki} = \frac{I_k}{c} \cdot d\Phi_{ki} = \frac{I_k}{c} \cdot d\left(L_{ki} \cdot \frac{I_i}{c}\right).$$

Формально $d\left(L_{ki}\cdot\dfrac{I_i}{c}\right)=\dfrac{I_i}{c}\cdot dL_{ki}+L_{ki}\cdot d\dfrac{I_i}{c}$, как дифференциал от произведения. Однако, слагаемое $L_{ki}\cdot d\dfrac{I_i}{c}$ означает изменение тока I_i и вместе с ним магнитного поля без перемещения k-го контура. Как было замечено в предыдущем вопросе, работа при этом не совершается, поэтому нужно отбросить слагаемое $L_{ki}\cdot d\dfrac{I_i}{c}$ и оставить только $\dfrac{I_i}{c}\cdot dL_{ki}$. Следовательно

$$dA_{ki}=\frac{I_k}{c}\cdot\frac{I_i}{c}\cdot dL_{ki}$$

Казалось бы, работа взаимодействия системы токов будет равна $dA=\sum\limits_{i,k}dA_{ki}=\sum\limits_{i,k}\dfrac{I_kI_i}{c^2}\cdot dL_{ki}$, однако на самом деле работа вдвое меньше.

Рассмотрим подробнее.

L_{ki} может изменяться и за счет перемещения k-ого контура (обозначим такое изменение, как d_kL_{ki}) и за счет перемещения i-ого контура (обозначим такое изменение, как d_iL_{ki}). Тогда

$dL_{ki}=d_kL_{ki}+d_iL_{ki}$ — изменение коэффициента взаимной индукции при перемещении обоих контуров.

Работа при перемещении k-го контура в поле i-го контура dA_{ki} связана с изменением коэффициента взаимной индукции L_{ki} только за счет перемещения k-го контура, тогда

$dA_{ki}=\dfrac{I_k}{c}\cdot\dfrac{I_i}{c}\cdot d_kL_{ki}$ вместо прежнего выражения $dA_{ki}=\dfrac{I_k}{c}\cdot\dfrac{I_i}{c}\cdot dL_{ki}$.

Рассмотрим сумму двух слагаемых

$$dA_{ki}+dA_{ik}=\frac{I_kI_i}{c^2}d_kL_{ki}+\frac{I_iI_k}{c^2}d_iL_{ik}.$$

С учетом $L_{ik}=L_{ki}$ получим

$$dA_{ki}+dA_{ik}=\frac{I_kI_i}{c^2}d_kL_{ki}+\frac{I_kI_i}{c^2}d_iL_{ki}=\frac{I_kI_i}{c^2}\cdot\left(d_kL_{ki}+d_iL_{ki}\right)=\frac{I_kI_i}{c^2}\cdot dL_{ki}$$

=>

$$dA_{ki}+dA_{ik}=\frac{I_kI_i}{c^2}\cdot dL_{ki}$$

Просуммируем это равенство по всем значениям индексов i и k, таких что $i\neq k$, и получим

$$\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}dA_{ki}+\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}dA_{ik}=\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\frac{I_kI_i}{c^2}\cdot dL_{ki}.$$

Здесь в левой части равенства каждая из двух сумм равна dA. Тогда

$dA = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} \frac{I_k I_i}{c^2}\cdot dL_{ki}$ — механическая работа взаимодействия системы токов без учета работы каждого контура над самим собой.

Факультатив. Механическая работа магнитных сил контура с током над самим собой при деформации контура.

Антипараллельные токи отталкиваются, поэтому контур с током стремится растянуться в окружность. Если ему позволить, то он совершит положительную работу.

Мысленно разобьем контур с током I на сумму N токов $I_i = \frac{I}{N}$. Пусть эти токи полностью тождественны и каждый из них занимает один и тот же объем — весь объем провода.

Покажем, что $\sum_{i=1}^{N} A_{ii} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\cdot\left[d\vec{l},\vec{B}\right] \quad => \quad dF_i \sim B_i I_i$$

Но $B_i \sim I_i \sim \frac{1}{N}$, тогда

$$dF_i \sim B_i I_i \sim \frac{1}{N^2} \quad => \quad A_{ii} \sim dF_i \sim \frac{1}{N^2} \quad =>$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ii} = N A_{ii} \sim \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Тогда для системы тождественных токов при $N\to\infty$ можно пренебречь работой самовоздействия каждого тока и найти работу по формуле из предыдущего вопроса:

$$dA \approx \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} \frac{I_k I_i}{c^2} dL_{ki}$$

Здесь все слагаемые одинаковые, так как токи тождественны, тогда

$$dA = \frac{1}{2}N\left(N-1\right)\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki} = \frac{1}{2}N\left(N-1\right)\frac{\frac{I}{N}\cdot\frac{I}{N}}{c^2}dL \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{I^2}{c^2}\cdot dL \quad =>$$

$dA = \frac{1}{2}\cdot\frac{I^2}{c^2}\cdot dL$ — работа контура с током I над самим собой, dL — изменение индуктивности контура при его деформации.

Факультатив. Механическая работа взаимодействия системы токов с учетом работы каждого контура над самим собой.

$$dA = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \frac{I_k I_i}{c^2} dL_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{i} \frac{I_i^2}{c^2} dL_{ii}$$

Здесь первое слагаемое — работа взаимодействия системы токов без учета работы каждого контура над самим собой, второе слагаемое — работа каждого контура над самим собой.

Объединяя оба слагаемых в одну сумму, получим

$$dA = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{I_k I_i}{c^2} \cdot dL_{ki} .$$

<u>Факультатив. Магнитная энергия взаимодействия системы токов.</u>

(с учетом работы ЭДС индукции)

Пусть W — магнитная энергия системы токов.

При уменьшении магнитной энергии системы токов эта энергия расходуется на механическую работу магнитных сил и на работу $\mathcal{E}_k I_k dt$ ЭДС индукции в каждом контуре. ЭДС индукции черпают энергию из магнитной энергии системы токов. Работа ЭДС индукции расходуется на Ленц-Джоулево тепло в соответствии с законом Джоуля-Ленца $N = \mathcal{E}I + UI = \mathcal{E}I$.

$$-dW = dA + \sum_k \mathcal{E}_k I_k dt$$

Поменяем знаки в равенстве и подставим сюда выражение для работы dA из предыдущего вопроса. Тогда получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{I_k I_i}{c^2} dL_{ki} - \sum_k \mathcal{E}_k I_k dt .$$

Подставим сюда выражение для ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{I_k I_i}{c^2} dL_{ki} - \sum_k \left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi_k}{dt} \right) I_k dt .$$

Сократим dt в числителе и знаменателе, тогда

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{I_k I_i}{c^2} dL_{ki} - \sum_k \left(-\frac{1}{c} \cdot d\Phi_k \right) I_k .$$

Подставим сюда выражение для потока через коэффициент взаимной индукции $\Phi_k = \sum_i L_{ki} \frac{I_i}{c}$ и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{I_k I_i}{c^2} dL_{ki} + \sum_k \frac{I_k}{c} \cdot d\left(\sum_i L_{ki} \frac{I_i}{c} \right).$$

Разложим $d\left(L_{ki} \frac{I_i}{c} \right)$, как дифференциал от произведения и получим

$$dW=-\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki}+\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki}+\sum_{k,i}\frac{I_k}{c}L_{ki}d\frac{I_i}{c}.$$

Первые две суммы имеют разные знаки. Объединим эти две суммы в одну и получим

$$dW=\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki}+\sum_{k,i}\frac{I_k}{c}L_{ki}d\frac{I_i}{c}.$$

Разобьем правую сумму на две тождественные суммы с точностью до замены $i\leftrightarrow k$ и получим

$$dW=\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki}+\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k}{c}L_{ki}d\frac{I_i}{c}+\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_i}{c}L_{ki}d\frac{I_k}{c}.$$

Объединим две правые суммы с учетом того, что $\frac{I_k}{c}d\frac{I_i}{c}+\frac{I_i}{c}d\frac{I_k}{c}=d\frac{I_k I_i}{c^2}$ и получим

$$dW=\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}dL_{ki}+\frac{1}{2}\sum_{k,i}L_{ki}d\frac{I_k I_i}{c^2}.$$

Эти две суммы тоже можно объединить в одну сумму, как дифференциал от произведения L_{ki} на $\frac{I_k I_i}{c^2}$, тогда

$$dW=\frac{1}{2}\sum_{k,i}d\left(L_{ki}\frac{I_k I_i}{c^2}\right)\qquad\Rightarrow$$

$W=\sum_{k,i}\frac{L_{ki}I_k I_i}{2c^2}$ — магнитная энергия взаимодействия системы токов. Эту формулу нужно запомнить к экзамену, а ее вывод помнить не нужно.

Если контур один, например, катушка индуктивности, то

$W=\frac{LI^2}{2c^2}$ — энергия магнитного поля соленоида с током. Эту формулу можно рассматривать, как определение индуктивности L, если энергию W удастся найти другим способом. Этот способ будет рассмотрен в следующем вопросе.

Формулу $W=\frac{LI^2}{2c^2}$ нужно помнить к экзамену без ее вывода.

В системе СИ: $W=\frac{LI^2}{2}$.

Факультатив. Энергия магнитного поля.

Это та же магнитная энергия токов, только выраженная через поле, а не через токи.

$$W=\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}L_{ki}=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\cdot\left(\sum_i L_{ki}\frac{I_i}{c}\right)=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\cdot\left(\sum_i\Phi_{ki}\right)=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\Phi_k$$

Подставим сюда полученное раньше выражение для потока $\Phi_B=\int_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=\int_S\left(rot\left(\vec{A}\right),d\vec{S}\right)=\oint_l\left(\vec{A},d\vec{l}\right)$ и получим

$$W=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\oint_{l_k}\left(\vec{A},d\vec{l}_k\right).$$

Заменим здесь элемент тока $Id\vec{l}$ на $\vec{j}dV$, тогда

$$W=\frac{1}{2}\sum_k\int_{V_k}\left(\vec{A},\frac{\vec{j}_k}{c}\right)dV_k \qquad =>$$

$$W=\frac{1}{2}\int_V\left(\vec{A},\frac{\vec{j}}{c}\right)dV.$$

Подставим сюда плотность токов проводимости $\vec{j}$ из равенства $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$, откуда $\frac{\vec{j}}{c}=\frac{1}{4\pi}\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]$. Тогда

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_V\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)dV.$$

Возьмем интеграл по частям. Перебросим производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя $\vec{H}$ на другой $\vec{A}$ и получим

$$W=\frac{1}{8\pi}\oint_S\left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right)-\frac{1}{8\pi}\int_V\left(\underline{\vec{A}},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)dV$$

Здесь в правом интеграле производную $\vec{\nabla}$ нужно брать от подчеркнутого выражения $\vec{A}$. Левый интеграл по поверхности стремится к нулю при стремлении объема, ограниченного поверхностью, к бесконечности. В правом интеграле поменяем местами сомножители векторного произведения с изменением знака интеграла и сделаем циклическую перестановку векторов в смешанном скалярно векторном произведении. Тогда

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_{V=\infty}\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)dV$$

Здесь $\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]=rot\left(\vec{A}\right)=\vec{B}$, тогда

$W=\int_{V=\infty}\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}dV$ — энергия магнитного поля. Эту формулу нужно знать к экзамену, но ее вывод помнить не нужно.

Тогда $w=\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$ — объемная плотность энергии магнитного поля.

В изотропной среде $\vec{B}=\mu\vec{H}$ и $w=\dfrac{\mu H^2}{8\pi}$.

В самом общем случае нелинейной или гистерезисной зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ справедлива следующая формула

$$dW=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$$

без доказательства.

Факультатив. $\oint\limits_S \xrightarrow[V\to\infty]{} 0$.

Докажем, что $\oint\limits_S\left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right)\xrightarrow[V\to\infty]{}0$.

Пусть S — сфера с очень большим радиусом. Тогда из любой точки на поверхности S все токи выглядят, как один точечный магнитный диполь. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} H\sim\dfrac{1}{r^3} \\ A\sim\dfrac{1}{r^2} \\ S\sim r^2 \end{array}\right\} \qquad => \qquad \oint\limits_S \sim\frac{1}{r^3}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

Факультатив. Строгое определение индуктивности.

$$W=\frac{LI^2}{2c^2}=\int\limits_{V=\infty}\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}dV \qquad =>$$

$L\equiv\dfrac{c^2}{4\pi I^2}\cdot\displaystyle\int\limits_{V=\infty}\left(\vec{B},\vec{H}\right)\cdot dV$ — индуктивность контура L не зависит от величины тока I в контуре, так как магнитные поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ пропорциональны току I.

Аналогично можно определить коэффициент взаимной индукции:

$L_{ki}\equiv\dfrac{c^2}{4\pi I_i I_k}\cdot\displaystyle\int\limits_{V=\infty}\mu\left(\vec{H}_k,\vec{H}_i\right)\cdot dV$, где $\vec{H}_k$ и $\vec{H}_i$ — напряженности магнитного поля, создаваемые токами в k-м и i-м контурах.