Факультатив. Сравнение формул для энергии электрического и магнитного полей.

Электричество	Магнетизм
$W=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\frac{q_k q_i}{r_{ki}}$ (в вакууме)	$W=\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}L_{ki}$
$\frac{1}{r_{ki}}=\frac{1}{\lvert\vec{r}_k-\vec{r}_i\rvert}$	$L_{ki}=\oint_{l_k}\oint_{l_i}\frac{\left(d\vec{l}_k,d\vec{l}_i\right)}{\lvert\vec{r}_k-\vec{r}_i\rvert}$ (в вакууме)
$W=\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ (сумма по свободным зарядам)	$W=\frac{1}{2}\sum_i\frac{I_i}{c}\Phi_i$ (сумма по токам проводимости)
$W=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi\cdot dV$ (по свободным зарядам)	$W=\frac{1}{2c}\int_V\left(\vec{j},\vec{A}\right)\cdot dV$ (по токам проводимости)
$w=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$	$w=\frac{\mu H^2}{8\pi}$
$w=\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}$	$w=\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$
$dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$	$dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$

Экзамен. Гипотеза Максвелла о токах смещения.

Не путайте токи смещения со связанными токами намагниченных сред.

Рассмотрим дивергенцию равенства $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Дивергенция левой части равенства равна нулю:

$$div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)=\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=0.$$

Дивергенция правой части не равна нулю при $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$:

$$div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)=\frac{4\pi}{c}\cdot\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\neq 0.$$

Чтобы обобщить уравнение $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ на случай $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$ можно предположить, что

$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}$, где $\vec{X}$ — необходимая поправка к уравнению магнитостатики.

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X} \qquad =>$$

$$0=div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)+div\left(\vec{X}\right).$$

Учтем, что $div\left(\vec{j}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и получим

$$0=-\frac{4\pi}{c}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)$$

Учтем теперь, что $4\pi\rho=div\left(\vec{D}\right)$ и получим

$$0=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(div\left(\vec{D}\right)\right)}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)=div\left(\vec{X}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0 \qquad .$$

Из того, что дивергенция некоторого поля равна нулю, вовсе не следует, что само поле равно нулю. Например, $div\left(\vec{B}\right)=0$, что не означает равенства нулю магнитного поля $\vec{B}$.

Максвелл сделал предположение, что $\vec{X}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$ =>

$\vec{X}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, которое не обязательно следует из того, что $div\left(\vec{X}\right)=div\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$. Таким образом Максвелл получил:

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Максвелл ввел понятие токов смещения $\vec{j}_{см}\equiv\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, тогда

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)$$

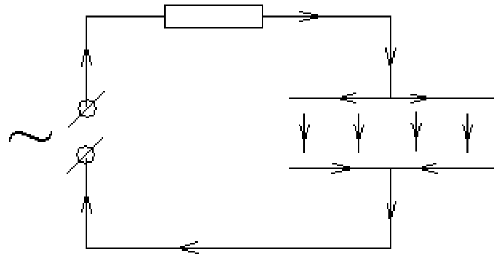
Токи смещение, потому что они выражаются через вектор электрического смещения $\vec{D}$.

Аналогично $\mathcal{E}_{инд}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$ — ЭДС индукции выражается через вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right) \\ div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=0 \end{cases} \quad => \quad div\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)=0 \quad => \quad \Phi_{\vec{j}+\vec{j}_{см}}=0 \quad —$$

поток вектора $\vec{j}+\vec{j}_{см}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Тогда линии суммы токов проводимости и токов смещения замкнуты (не рвутся).

Например, в следующей схеме линии токов проводимости замыкаются линиями токов смещения внутри конденсатора.



<u>Экзамен. Система уравнений Максвелла.</u>

(один из основных вопросов курса)

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

— система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Для решения задач обычно удобнее использовать те же уравнения Максвелла только в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ \oint\limits_l E_l dl = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ \oint\limits_l H_l dl = \dfrac{4\pi}{c} I + \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \end{cases}$$

Прокомментируем каждое из 4-х уравнений.

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D = 4\pi Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема не может быть доказана, но Максвелл предположил, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$. Заметим, что закон Фарадея содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ содержит частную производную от потока $\Phi_B=\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ по времени. Дело в том, что изменение потока при движущемся контуре дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд}=\mathcal{E}\equiv\oint\limits_l\left(\vec{E}_{стор},d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца $\vec{F}_Л$, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью $\vec{E}_{стор}=\frac{\vec{F}_Л}{q}=\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$, но не дает вклад в циркуляцию $\oint\limits_l\left(\vec{E},d\vec{l}\right)$ поля $\vec{E}$. В циркуляцию дает вклад только частная производная по времени от потока $\Phi_B=\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$.

Третье уравнение $\Phi_B=0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $\oint\limits_l H_l dl=\frac{4\pi}{c}I+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла.

Чтобы уравнения имело смысл решать относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить их так называемыми материальными связями:

$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности:

$$div\left(\vec{j}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

В некоторых случаях уравнения можно дополнить законом Ома $\vec{j}=\lambda\vec{E}$, если он выполнятся, и если токи не заданы явным образом.

В системе СИ: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

В системе СИ: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \\ div\left(\vec{j}\right) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = \lambda \vec{E} \end{cases}$.

Факультативная вставка.

Система уравнений Максвелла избыточна. В ней есть лишние уравнения.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right) = \left(\vec{E}, \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right]\right) = \left(\vec{E}, 0\right) = 0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении $\left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0 = div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right) = div\left(-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} div\left(\vec{B}\right) \qquad =>$$

$-\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} div\left(\vec{B}\right) = 0$ => $div\left(\vec{B}\right) = const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ не изменяется со временем.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right) = 0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно,

$div\left(\vec{B}\right)=0$.

Аналогично из уравнения $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ можно получить, что $div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho$.

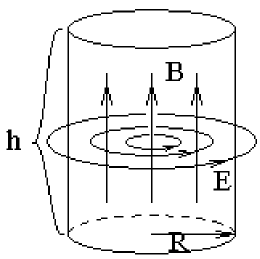
Конец факультативной вставки.

Экзамен. Токи Фуко.

Токи Фуко — это те же токи индукции только в сплошном проводнике, а не в проводящем контуре, как обычные токи индукции.

Рассмотрим проводящий цилиндр в однородном переменном магнитном поле $B=B_0\cdot\cos\left(\omega t\right)$, которое направлено вдоль оси цилиндра.

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля



$rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ <=> $\oint\limits_l E_l dl=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}$ =>

$E\cdot 2\pi r=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r^2 B\right)$ =>

$E=-\frac{r}{2c}\cdot\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{r}{2c}\cdot\frac{\partial\left(B_0\cdot\cos\left(\omega t\right)\right)}{\partial t}=\frac{B_0\omega}{2c}\cdot r\cdot\sin\left(\omega t\right)$=>

$E=\frac{B_0\omega}{2c}\cdot r\cdot\sin\left(\omega t\right)$.

Это электрическое поле вызывает токи Фуко

$j=\lambda E=\frac{\lambda B_0\omega}{2c}\cdot r\cdot\sin\left(\omega t\right)$.

В системе СИ: $j=\lambda E=\frac{\lambda B_0\omega}{2}\cdot r\cdot\sin\left(\omega t\right)$.

Интересно рассмотреть среднюю мощность ленц-джоулева тепла, идущего на нагрев цилиндра.

Пусть $\langle v\rangle$ — среднее по времени и по объему значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла.

$\nu = \left(\vec{j}, \vec{E}\right) = \lambda E^2 = \dfrac{\lambda \omega^2 B_0^2}{4c^2} r^2 \sin^2\left(\omega t\right)$ — объемная плотность мощности в соответствии с законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Усреднение по времени сомножителя синус в квадрате дает: $\left\langle \sin^2\left(\omega t\right) \right\rangle_t = \dfrac{1}{2}$. И действительно, $\sin$ и $\cos$ отличаются только сдвигом фаз на $\dfrac{\pi}{2}$, тогда средние значения их квадратов равны, а сумма средних значений квадратов равна единице, так как $\sin^2\left(\omega t\right) + \cos^2\left(\omega t\right) = 1$.

Тогда

$\left\langle \nu \right\rangle_t = \dfrac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8c^2} r^2$ — среднее по времени значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла. Осталось усреднить эту величину по объему цилиндра.

$$\left\langle \nu \right\rangle = \int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t \frac{dV}{V} = \frac{\int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t dV}{V}$$

Для вычисления интеграла мысленно разобьем объем цилиндра цилиндрическими поверхностями с близкими радиусами, тогда

$$\int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t dV = \int\limits_0^R \left\langle \nu \right\rangle_t h \cdot 2\pi r \, dr = \int\limits_0^R \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8c^2} r^2 h \cdot 2\pi r \, dr =$$

$$= \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4c^2} \cdot \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4c^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16c^2} R^4 \qquad =>$$

$$\left\langle \nu \right\rangle = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t dV = \frac{1}{h \cdot \pi R^2} \cdot \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16c^2} R^4 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{16c^2} R^2 \sim R^2 \qquad =>$$

чем больше радиус цилиндра R, тем сильнее нагрев в единице объема.

Качественно такой результат можно объяснить тем, что в случае большого радиуса цилиндра токам Фуко есть, где разбежаться.

Сердечник трансформатора делают наборным из большого числа тонких пластин, чтобы уменьшить потери на нагрев сердечника токами Фуко.

Дело в том, что если в первичную обмотку трансформатора подать переменное напряжение, то в сердечнике возникает переменное магнитное поле и токи Фуко.

В наборном сердечнике им трудно разбежаться.

В системе СИ: $\left\langle \nu \right\rangle = \dfrac{\lambda {B_0}^2 \omega^2}{16} R^2$

<u>Экзамен. Вектор Пойнтинга.</u>

(вектор Умова — Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw = d\left(\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}\right) = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D},d\vec{E}\right) + \left(\vec{E},d\vec{D}\right)\right\}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине. И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} \qquad => \qquad D_k = \sum_i \varepsilon_{ki}E_i \qquad =>$$

$$\left(\vec{D},d\vec{E}\right) = \sum_k D_k dE_k = \sum_k \left(\sum_i \varepsilon_{ki}E_i\right) dE_k = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki}E_i dE_k$$

$$\left(\vec{E},d\vec{D}\right) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d\left(\sum_k \varepsilon_{ik}E_k\right) = \sum_{k,i} \varepsilon_{ik}E_i dE_k$$

С учетом $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$ получаем $\left(\vec{D},d\vec{E}\right) = \left(\vec{E},d\vec{D}\right)$. Тогда

$$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right).$$

Аналогично для энергии магнитного поля $dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$.

$dw = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E},d\vec{D}\right) + \left(\vec{H},d\vec{B}\right)\right\}$ — изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем исходная формула $w = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$. Формула $dw = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E},d\vec{D}\right) + \left(\vec{H},d\vec{B}\right)\right\}$ справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\right\}$, куда в правую часть производные по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad =>$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} = c\cdot rot\left(\vec{H}\right) - 4\pi\vec{j} \\ \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\cdot rot\left(\vec{E}\right) \end{cases} \qquad =>$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, c\cdot rot\left(\vec{H}\right) - 4\pi\vec{j}\right) + \left(\vec{H}, -c\cdot rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \qquad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E},\vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) + \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \qquad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E},\vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{H}}\right]\right) + \left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{E}}\right]\right)\right\}$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$.

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{E}},\vec{H}\right]\right) + \left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\underline{\vec{H}}\right]\right)\right\}.$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной $\vec{\nabla}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$\underline{-\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\vec{S}\right)}$, где $\underline{\vec{S} \equiv \dfrac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]}$ — вектор Пойнтинга. Эти два равенства нужно помнить к экзамену.

Из равенства $-\dfrac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\vec{S}\right)$ виден физический смысл вектора Пойнтинга $\vec{S}$. Чтобы его понять рассмотрим объем, в котором нет потерь на ленц-джоулево тепло, то есть $\left(\vec{j},\vec{E}\right)=0$. Тогда получим равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$. Рассмотрим другое, но очень похожее равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\left(\vec{j}\right)=0$. Это равенство следует, из закона сохранения заряда. Если объемная плотность заряда уменьшается, то заряд вытекает из объема, так что $\vec{j}$ — плотность потока заряда, то есть заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току заряда. Равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$ с учетом закона сохранения энергии можно прочитать аналогично. Если объемная плотность энергии уменьшается, то энергия вытекает из объема, так что $\vec{S}$ — плотность потока энергии, то есть энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току энергии.

<u>Факультативная вставка.</u>

В системе СИ: $\vec{S}\equiv\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Равенство $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ можно уточнить с учетом возможных сторонних сил с напряженностью $\vec{E}_{стор}$.

Рассмотрим закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил:

$$\nu=\left(\vec{j},\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right) \quad => \quad \left(\vec{j},\vec{E}\right)=\nu-\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) \quad =>$$

$$\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right)-\frac{\partial w}{\partial t}=\nu+div\left(\vec{S}\right)$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i-\frac{\partial W}{\partial t}=N+\oint_S\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right],d\vec{S}\right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуются на нагрев (ленц-джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь $\mathcal{E}_i$ — любые ЭДС, кроме ЭДС индукции, работа которых учитывается изменением энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы также следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

Заметим, что для одного фотона

$$\left.\begin{aligned} W&=mc^2\\ p&=mc\end{aligned}\right\} \quad => \quad p=\frac{W}{c}=\frac{h\nu}{c}.$$

Из равенств $\begin{cases} \vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right] \\ p = \dfrac{W}{c} \end{cases}$ следует, что

$\dfrac{\vec{S}}{c} = \dfrac{1}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ — плотность потока импульса.

Конец факультативной вставки.