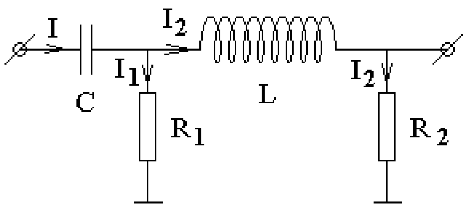
Факультатив. Пример 3.



На схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения с амплитудой U_0. Нужно найти напряжение на выходе схемы, как функцию времени.

Для трех неизвестных токов I, I_1, I_2 напишем два уравнения Кирхгофа для контуров и одно уравнение для узла:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases},$$

Здесь I — входной ток схемы, I_1 — сила тока через сопротивление R_1, I_2 — сила тока через катушку индуктивности L и сопротивление R_2.

$I = \dot{q}$, где q — заряд на конденсаторе.

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ \dot{q} = I_1 + I_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы в ответе получить напряжение на выходе схемы нам понадобиться узнать только ток I_2. Поэтому нам будет удобно выражать и подставлять в другие уравнения другие неизвестные: q и I_1. Переменную I_1 можно выразить из любого из трех уравнений, а переменную q можно выразить только из первого уравнения. Вот и выразим $q = CU_0 - R_1 C I_1$.

Подставим в оставшиеся уравнения и получим

$$\begin{cases} 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ -R_1 C\dot{I}_1 = I_1 + I_2 \end{cases}.$$

Теперь I_1 можно выразить только из нового первого (бывшего второго) уравнения $I_1 = \frac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \frac{R_2}{R_1}I_2$. Тогда получим дифференциальное уравнение для единственной переменной I_2

$$-LC\ddot{I}_2 - R_2C\dot{I}_2 = \frac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \frac{R_2}{R_1}I_2 + I_2 \qquad =>$$

$$\ddot{I}_2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1C}\right)\cdot\dot{I}_2 + \frac{R_1+R_2}{R_1LC}\cdot I_2 = 0$$

Подставим сюда $I_2 = Ae^{\lambda t}$ и получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1C}\right)\lambda + \frac{R_1+R_2}{R_1LC} = 0.$$

Его решения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1C}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1C}\right)^2 - \frac{R_1+R_2}{R_1LC}}.$$

Общее решение дифференциального уравнения для тока I_2 имеет вид

$$I_2 = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}.$$

Произвольные константы интегрирования A_1 и A_2 можно найти из условий: $\begin{cases} q(0) = 0 \\ I_2(0) = 0 \end{cases}$. Чтобы найти A_1 и A_2 нам нужно знать I_2 и $\dot{I}_2$ в нулевой момент времени. Подставим $q(0) = 0$ в первое уравнение системы (1) и получим $I_1(0) = \frac{U_0}{R_1}$. Подставим это значение и $I_2(0) = 0$ во второе уравнение системы (1) и получим $0 = LI_2(0) + 0 - U_0$. Откуда $\dot{I}_2(0) = \frac{U_0}{L}$. Тогда

$$\begin{cases} I_2(0) = 0 \\ \dot{I}_2(0) = \frac{U_0}{L} \end{cases}.$$

Подставим в эти условия общее решение $I_2 = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}$ для I_2 и получим

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 = \frac{U_0}{L} \end{cases} \qquad => \qquad \begin{cases} A_1 = \frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ A_2 = -\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{cases}$$

Подставим эти значения произвольных констант интегрирования в общее решение $I_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$ и получим

$$I_2 = \frac{U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) \qquad =>$$

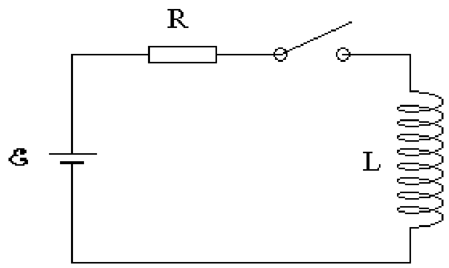
$$U_{вых} = R_2 I_2 = \frac{R_2 U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)$$

Заметим, что $U_{вых}(t)$ — вещественная функция даже при комплексных λ_1 и λ_2, так как в этом случае λ_1 и λ_2 — комплексно сопряженные величины.

Если λ_1 и λ_2 вещественные, то напряжение на выходе схемы — разность двух затухающих экспонент. Если λ_1 и λ_2 комплексные, то напряжение на выходе схемы — произведение затухающей экспоненты на синусоиду.

Экзамен. Экстраток размыкания.

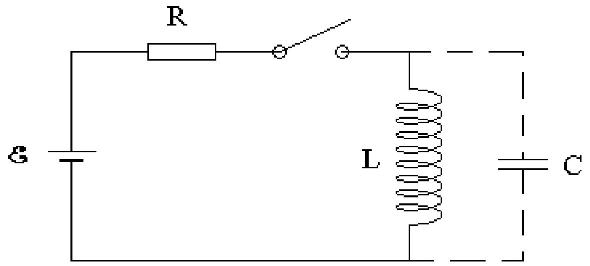
Рассмотрим схему, в которой последовательно включены постоянная ЭДС $\mathcal{E}$, резистор R, ключ и катушка индуктивности L.



Ключ долгое время был замкнут, и в цепи шел ток $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, потому что для постоянного тока напряжение на индуктивности $U_L = L\dot{I}$ равно нулю.

При размыкании ключа ток в индуктивности должен скачком измениться до нуля, но при этом на индуктивности возникает бесконечное напряжение $U_L = L\dot{I}$. Это напряжение пробивает ключ. Напряженность пробоя E_0 = 30 кВ/см. Ток пробоя называют экстратоком размыкания.

Чтобы оценить, при каких условиях наступает пробой ключа в реальной схеме, нужно учесть паразитные емкости между витками индуктивности. Можно считать, что параллельно катушке индуктивности включен конденсатор с очень малой емкостью C.



После размыкания ключа в контуре из индуктивности и емкости возникают электрические колебания. В начальный момент в катушке течет ток $I_{\max} = I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Напряжение на катушке, как и на конденсаторе почти нулевое. В катушке индуктивности при этом запасена энергия магнитного поля. Ток катушки заряжает конденсатор. При максимальном напряжении на конденсаторе ток равен нулю, и вся энергия превращается в энергию электрического поля конденсатора. Тогда

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU_{\max}^2}{2} \quad => \quad U_{\max} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_{\max}.$$

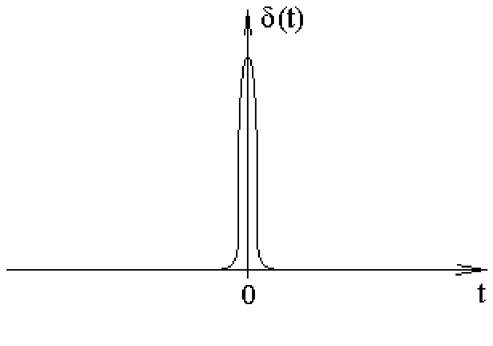
Емкость C — мала, следовательно, $U_{\max}$ — велико; $\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \rho$ — так называемое волновое сопротивление колебательного контура.

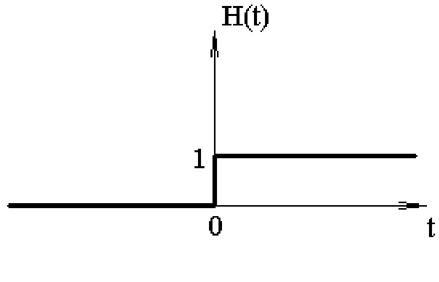
Факультатив. Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе схемы от времени.

Единичная ступенька напряжения в начале координат или функция Хевисайда $H(t)$ связана с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$ соотношениями:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' \qquad <=> \qquad \delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$$

Напомним, что дельта-функция Дирака — это очень узкий и одновременно очень высокий пик вначале координат, площадь под графиком которого равна единице $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.





Рассмотрим какую-либо конкретную линейную схему. Если напряжение на входе — единичная ступенька $U_{вх}(t)=H(t)$, то мы умеем решать такую задачу.

Пусть ее решение — некоторая функция $F(t)$: $U_{вых}(t)=F(t)$

Схема линейная, поэтому если

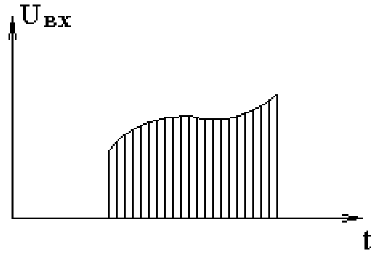
$U_{вх}(t)=\delta(t)=\dfrac{dH(t)}{dt}$, то

$U_{вых}(t)=\dfrac{dF(t)}{dt}\equiv G(t)$ — функция Грина для данной задачи.

Функция Грина — отклик на дельта-функцию Дирака. В нашем случае — отклик электрической схемы на дельта-функцию Дирака на входе схемы.

Если $U_{вх}(t)=\delta(t-t_0)$, то $U_{вых}(t)=G(t-t_0)$.

Произвольная зависимость напряжения на входе схемы может быть представлена интегралом, как большая сумма узких прямоугольников, каждый из которых похож на дельта-функцию Дирака с некоторым весом.



Рассмотрим один из прямоугольников около точки $t=t_0$. Высота прямоугольника $U_{вх}(t_0)$, ширину обозначим, как dt_0. Тогда площадь прямоугольника $U_{вх}(t_0)dt_0$. Площадь под дельта-функцией равна единице, следовательно, рассматриваемый прямоугольник, как функция времени t примерно равен $U_{вх}(t_0)dt_0\,\delta(t-t_0)$.

Вся функция $U_{вх}(t)$ может быть представлена, как сумма таких прямоугольников:

$$U_{вх}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt_0$$

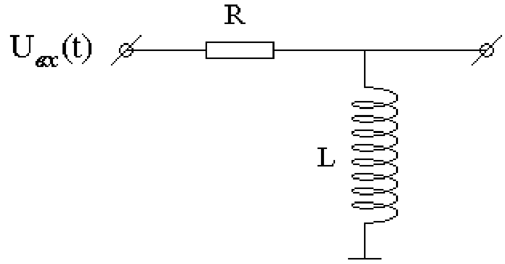
Если напряжение на входе — сумма дельта функций $\delta(t-t_0)$, то напряжение на выходе — сумма функций Грина $G(t-t_0)$ с теми же весовыми множителями $U_{вх}(t_0)dt_0$:

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\,G(t-t_0)\,dt_0\,.$$

Это и есть решение для напряжения на выходе схемы $U_{вых}(t)$ при произвольной зависимости входного напряжения $U_{вх}(t)$ от времени.

Здесь $G(t)=\dfrac{dF(t)}{dt}$, $F(t)$ — реакция схемы на единичную ступеньку напряжения на входе $U_{вх}(t)=H(t)$.

Рассмотрим, например, реакцию RL-цепочки на единичную ступеньку напряжения:



Как мы выяснили раньше в вопросе "Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения" напряжение на выходе схемы для единичной ступеньки на входе:

$$F(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\cdot H(t) \qquad => \qquad G(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\delta(t)-\frac{R}{L}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot H(t),$$

— функция Грина для данной задачи, полученная как производная от произведения.

Следовательно

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\left\{\delta(t-t_0)-\frac{R}{L}\,e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}H(t-t_0)\right\}dt_0\,.$$

Интеграл распадается на сумму двух интегралов, первый из которых можно взять в явном виде, а во втором оставить пределы интегрирования только по области, в которой отлична от нуля функция Хевисайда. Тогда

$$U_{вых}(t)=U_{вх}(t)-\frac{R}{L}\int\limits_{0}^{+\infty} U_{вх}(t-t')\,e^{-\frac{R}{L}t'}\,dt', \text{ где } t'=t-t_0.$$

<u>Экзамен. Комплексные токи и напряжения.</u>

Комплексные токи и напряжения вводят для рассмотрения гармонически изменяющихся токов и напряжений. Комплексные токи и напряжения позволяют заменить дифференциальные уравнения Кирхгофа для токов комплексными алгебраическими уравнениями Кирхгофа.

Рассмотрим вещественное напряжение:

$U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_0)$, где U_0 — вещественная амплитуда, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза.

Будем называть соответствующим комплексным напряжением величину:

$\widetilde{U}(t)=U_0 e^{i(\omega t+\varphi_0)}$, где волной сверху $\widetilde{U}$ будем обозначать, что величина комплексная.

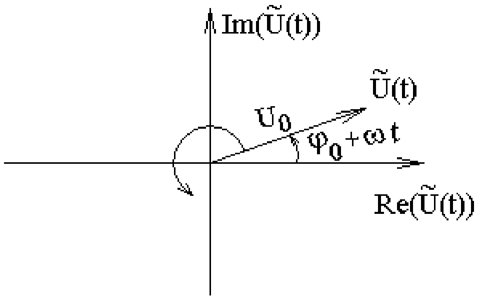
Тогда $\quad U(t)=\mathrm{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)$

$\widetilde{U}=U_0 e^{i(\omega t+\varphi_0)}=U_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t}=\widetilde{U}_0 e^{i\omega t}$, где

$\widetilde{U}_0 \equiv U_0 e^{i\varphi_0}$ — комплексная амплитуда напряжения, U_0 — вещественная амплитуда, φ_0 — начальная фаза или фаза в нулевой момент времени.

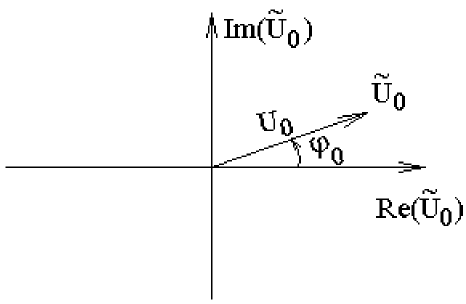
$\widetilde{U}(t)=\widetilde{U}_0 e^{i\omega t}$

Гармонически изменяющееся напряжение можно изобразить на комплексной плоскости напряжений.



Напряжение, которое есть на самом деле, — это вещественное напряжение равное проекции комплексного напряжения на вещественную ось $\mathrm{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)=U(t)$.

Комплексная амплитуда напряжения тоже может быть изображена на комплексной плоскости — плоскости комплексных амплитуд. В отличие от комплексного напряжения комплексная амплитуда не изменяется во времени и не вращается на комплексной плоскости.



Аналогично комплексным напряжениям вводятся комплексные токи.

$I(t)=I_0\cos(\omega t+\psi_0)$ — вещественный ток.

$\tilde{I}(t)=I_0 e^{i(\omega t+\psi_0)}$ — соответствующий ему комплексный ток.

$I(t)=\mathrm{Re}\left(\tilde{I}(t)\right)$

$\tilde{I}(t)=I_0 e^{i(\omega t+\psi_0)}=I_0 e^{i\psi_0} e^{i\omega t}=\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ $\qquad$ =>

$\tilde{I}_0 \equiv I_0 e^{i\psi_0}$ — комплексная амплитуда тока, I_0 — вещественная амплитуда тока, ψ_0 — начальная фаза тока или фаза в нулевой момент времени.

$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$

Экзамен. Эффективное напряжение.

Эффективное значение переменного напряжения любой формы равно по величине постоянному напряжению, которое также нагревает резистор, как и рассматриваемое переменное напряжение.

Мощность Ленц-Джоулева тепла $N = \frac{U^2}{R}$. Согласно определению эффективного напряжения

$$\langle N \rangle = \left\langle \frac{U^2}{R} \right\rangle = \frac{U_{эфф}^2}{R} \qquad =>$$

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle.$$

Аналогично для тока $N = I^2 R$ =>

$$I_{эфф}^2 \equiv \left\langle I^2(t) \right\rangle.$$

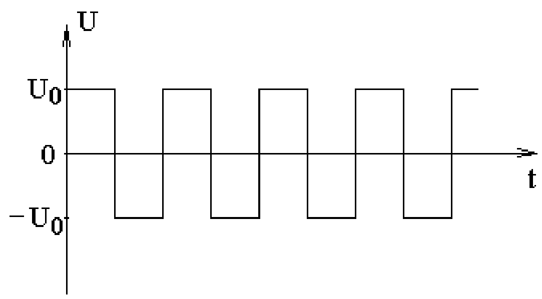
Для гармонически изменяющихся напряжений $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle = U_0^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle = U_0^2 \, \frac{1}{2} \qquad =>$$

$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично для гармонически изменяющегося тока: $I_{эфф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

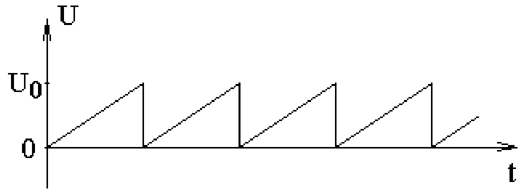
Рассмотрим напряжение (или ток) в форме меандра — прямоугольных импульсов со скважность равной двум $\frac{T}{\tau} = 2$, где T — период, τ — длительность импульса положительной полярности.



Для меандра:

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \right\rangle = U_0^2 \qquad => \qquad U_{эфф} = U_0.$$

Для пилообразного напряжения



$$U^2_{эфф} = \left\langle U^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_0 \frac{t}{T} \right)^2 dt = \frac{U_0^2}{T^3}\int_0^T t^2 dt = \frac{U_0^2}{3} \qquad =>$$

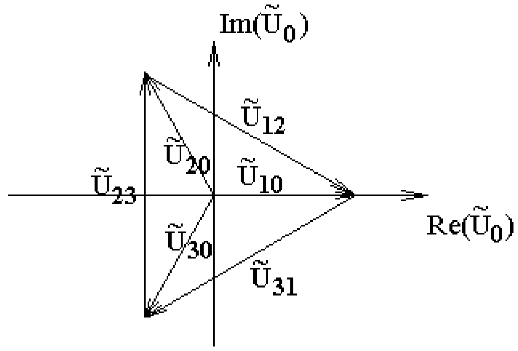
$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$$

Бытовое напряжение сети переменного тока 220 Вольт — это эффективное значение напряжения.

<u>Экзамен. Трехфазное напряжение.</u>

Трехфазное напряжение обычно выводится на специальный трехфазный электрический щит с четырьмя клеммами. На три клеммы подано напряжение трех фаз относительно общего провода, который подключен к четвертой клемме. Где-то далеко от щита нулевой провод соединен с землей, то есть заземлен.

Напряжение каждой из трех фаз имеет одинаковую амплитуду, но эти напряжения сдвинуты по фазе на угол $\frac{2\pi}{3}$ друг относительно друга. На следующем рисунке изображена плоскость комплексных амплитуд.



Здесь три вектора из начала координат — это комплексные амплитуды трех фаз. Эти векторы развернуты друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{3}$. Концы этих трех векторов связаны еще тремя векторами — комплексными амплитудами напряжений между фазами.

Из рисунка видно, что амплитуда напряжения между фазами $\left|\widetilde{U}_{23}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{12}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{31}\right|$ в $\sqrt{3}$ больше, чем амплитуда напряжения одной фазы $\left|\widetilde{U}_{10}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{20}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{30}\right|$.

Подключаясь к клеммам трехфазного электрического щитка можно использовать всё трехфазное напряжение или напряжение между двумя фазами (между клеммами двух фаз) или напряжение одной фазы (между клеммой фазы и клеммой общего провода).

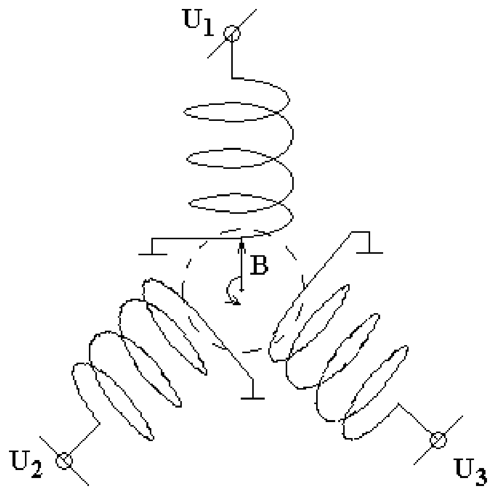
Для трехфазной сети переменного тока есть два стандарта.

1). Сеть 220/127 Вольт. Это сеть с эффективным напряжением 127 Вольт каждой фазы относительно нулевого провода. Эффективное напряжение между фазами —220 Вольт. Бытовые приборы в такой сети включаются между двумя фазами.

2). Сеть 380/220 Вольт. В этой сети эффективное напряжение каждой фазы — 220 Вольт, напряжение между фазами — 380 Вольт. Бытовые приборы включаются между фазой и нулевым проводом.

Факультатив. Асинхронный трехфазный электродвигатель.

Двигатель имеет три неподвижных статорных обмотки, на которые подают три фазы трехфазного напряжения.



В пунктирной области между обмотками образуется вращающееся магнитное поле $\vec{B}$, так как магнитное поле достигает максимального значения сначала в одной обмотке, затем во второй, затем в третьей.

В эту область вращающегося магнитного поля помещают ротор электродвигателя. Ротор вращается так, что ось вращения ротора перпендикулярна плоскости рисунка.

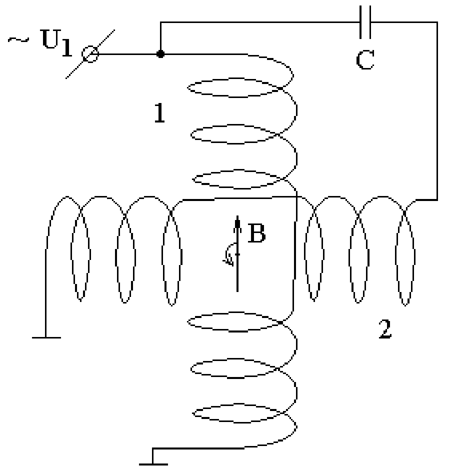
На роторе электродвигателя закреплена короткозамкнутая роторная обмотка.

Для простоты будем считать, что роторная обмотка — это один виток провода. Виток ротора расположен перпендикулярно плоскости рисунка, и ось его вращения тоже расположена перпендикулярно плоскости рисунка, так что ось вращения ротора лежит в плоскости его витка.

В области ротора вращается магнитное поле, создаваемое статорными обмотками. Виток ротора стремится поворачиваться за магнитным полем, чтобы сохранять неизменной величину потока магнитного поля $\vec{B}$ через рамку обмотки. Это происходит по правилу Ленца, согласно которому ток индукции в роторной обмотке имеет такое направление, что силы Ампера, действующие на ток индукции, стремятся устранить причину возникновения тока индукции — изменение магнитного потока через рамку роторной обмотки.

Электродвигатель, совершая полезную работу, вращает вал с некоторым усилием. Вращаясь под механической нагрузкой, ротор понемногу отстает от магнитного поля, поэтому двигатель называется асинхронным.

Факультатив. Однофазный электродвигатель.



Роторная обмотка короткозамкнутая.

Одну из двух статорных обмоток электродвигателя включают последовательно с конденсатором. Конденсатор сдвигает фазу тока второй статорной обмотки относительно фазы тока первой обмотки. Лучше всего было бы сдвинуть фазу на $\frac{\pi}{2}$.

Вращающееся магнитное поле при этом не совсем постоянно по амплитуде, поэтому однофазный двигатель создает меньший момент сил.

Экзамен. Комплексное сопротивление — импеданс.

Импеданс или комплексное сопротивление по определению равно отношению комплексного напряжения к комплексному току:

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}.$$

Заметим, что импеданс также равен отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\tilde{U}_0 e^{i\omega t}}{\tilde{I}_0 e^{i\omega t}} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}$$

Найдем импеданс для каждого элемента линейной схемы: для резистора, конденсатора и катушки индуктивности.

Для резистора:

$U = RI$ => $\tilde{U} = R\tilde{I}$ => $\tilde{Z}_R = R$

Для конденсатора:

$$q = CU \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = I = C\dot{U} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{I} = C\dot{\tilde{U}} = C\frac{d}{dt}\left(\tilde{U}_0 e^{i\omega t}\right) = C\tilde{U}_0\frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = i\omega C\tilde{U}_0 e^{i\omega t} = i\omega C\tilde{U} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Для катушки индуктивности:

$$U = L\dot{I} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{U} = L\dot{\tilde{I}} = L\frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_0 e^{i\omega t}\right) = L\tilde{I}_0\frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = i\omega L\tilde{I}_0 e^{i\omega t} = i\omega L\tilde{I} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{Z}_L = i\omega L$$

Соберем вместе все три выражения для импедансов и получим:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_R = R \\ \tilde{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C} \\ \tilde{Z}_L = i\omega L \end{cases}.$$

Комплексные сопротивления вместе с комплексными напряжениями и комплексными токами позволяют вместо дифференциальных уравнений Кирхгофа составлять комплексные уравнения Кирхгофа для токов.

Факультативная вставка.

По ходу рассмотрения этого вопроса мы из соотношений для вещественных величин написали аналогичные соотношения для комплексных величин, например из соотношения $U = L\dot{I}$ мы получили $\tilde{U} = L\dot{\tilde{I}}$. Возникает вопрос. Почему это можно сделать?

Из вещественного равенства $U = L\dot{I}$ следует комплексное равенство $\tilde{U} = \widetilde{\left(L\dot{I}\right)}$. В правой части равенства константу L можно вынести за скобки. Тогда $\tilde{U} = L\tilde{\dot{I}}$. Теперь чтобы доказать, что $\tilde{U} = L\dot{\tilde{I}}$, нам осталось доказать, что $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$.

Рассмотрим левую часть равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$:

$$I = I_0\cos\left(\omega t + \psi_0\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = -\omega I_0\sin\left(\omega t + \psi_0\right) = \omega I_0\cos\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\dot{I}} = \omega I_0 e^{i\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Рассмотрим теперь правую часть равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \psi_0) \qquad => \qquad \tilde{I} = I_0 \, e^{i(\omega t + \psi_0)} \qquad =>$$

$$\dot{\tilde{I}} = i\omega I_0 \, e^{i(\omega t + \psi_0)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega I_0 \, e^{i(\omega t + \psi_0)} = \omega I_0 \, e^{i\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Таким образом, мы получили одинаковое выражение для правой и левой частей равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$, следовательно, равенство доказано.

Конец факультативной вставки.