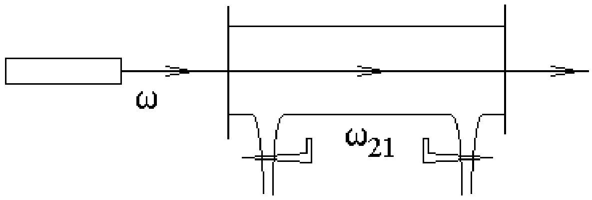
Светоиндуцированный дрейф. Разделение изотопов.

Рассмотрим следующую оптическую схему. Пусть монохроматическое излучение лазера с частотой ω проходит через кювету с газовой смесью двух изотопов.



Линии поглощения изотопов несколько сдвинуты по частоте друг относительно друга. Пусть частота излучения лазера лежит в пределах доплеровского контура линии поглощения одного из двух изотопов с центром на частоте ω_{21}.

Пусть для определенности частота лазера выше частоты поглощающего перехода $\omega > \omega_{21}$. Тогда $V_z = \dfrac{\omega - \omega_{21}}{k} > 0$. Это означает, что излучение лазера поглощают молекулы, летящие в направлении луча. Поглощая свет и переходя в возбужденное состояние, молекулы разбухают, так как в возбужденном состоянии молекула имеет бо̀льшие размеры, чем в невозмущенном состоянии. Большие молекулы чаще сталкиваются, так как имеют бо̀льшую площадь поперечного сечения.

Рассмотрим два набора молекул одного и того же изотопа, но с противоположными значениями лучевой скорости. Пусть один из двух наборов молекул с лучевой скоростью $V_z > 0$ взаимодействует со светом. Молекулы из этого набора летят вдоль лазерного луча, чаще сталкиваются и поэтому сильнее тормозятся. Следовательно, центр масс двух наборов молекул начинает смещаться навстречу лазерному лучу.

В результате поглощающий свет изотоп скапливается около окна кюветы, расположенного ближе к лазеру. Второй изотоп выдавливается из этой области в ту часть кюветы, которая расположена дальше от лазера.

Через один из кранов, расположенных в концах кюветы, можно откачать смесь, обогащенную одним из двух изотопов.

Поляризация среды.

Поляризация — это электрический дипольный момент единицы объема.

При взаимодействии среды со световым полем в молекулах среды возникает дипольный момент, осциллирующий на частоте световой волны. Именно этот дипольный момент и связанная с ним поляризация среды на частоте световой волны нас и будут интересовать

$\vec{P} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dV}$, где $\vec{P}$ — поляризация среды, $\vec{p} \equiv \sum\limits_i q_i \vec{r}_i$ — дипольный момент системы зарядов $\{q_i\}$, расположенных в точках с радиус-векторами $\{\vec{r}_i\}$.

$\vec{P} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{V_z} dV_z$, где $\vec{P}_{V_z}$ — распределение поляризации по лучевой скорости молекул, $\vec{P}_{V_z} dV_z$ — поляризация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$.

$\vec{P} = N_0 \cdot \langle \vec{p} \rangle$, где N_0 — концентрация молекул, $\langle \vec{p} \rangle$ — среднее значение дипольного момента одной молекулы.

Рассмотрим поляризацию молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$:

$\vec{P}_{V_z} dV_z = N_{0_{V_z}} dV_z \cdot \langle \vec{p}(V_z) \rangle$, где $N_{0_{V_z}} dV_z$ — концентрация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$, $\langle \vec{p}(V_z) \rangle$ — средний дипольный момент этих молекул, который может зависеть от лучевой скорости V_z.

Для любой физической величины $\langle F \rangle = Sp\left(\hat{\rho}\hat{F}\right) = \sum\limits_{n,k} \rho_{kn} F_{nk}$. Тогда

$$\langle p \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{p}) = \sum_{n,k} \rho_{kn} p_{nk} = \rho_{12} p_{21} + \rho_{21} p_{12} = p(\rho_{12} + \rho_{21}) = 2p\,\mathrm{Re}(\rho_{21}),$$

где $\langle p \rangle$ — среднее значение проекции дипольного момента молекулы на единичный вектор поляризации световой волны, p в правой части равенства — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны (дипольный момент перехода).

При взаимодействии двухуровневой среды с монохроматическим световым полем в приближении вращающейся волны недиагональный элемент матрицы плотности имеет вид:

$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi}$, где $\varphi \equiv \omega t - kz - \varphi_0$ — фаза световой волны, $\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2} \cdot \dfrac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega}$.

Тогда

$$\langle p \rangle = p(\rho_{12} + \rho_{21}) = p\left(\overset{*}{\rho_{21}} + \rho_{21}\right) = 2p\,\mathrm{Re}\left(i\frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= pR(\rho_{11} - \rho_{22}) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Тогда

$$P_{V_z} = N_{0_{V_z}} \langle p \rangle = N_{0_{V_z}} pR\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2},$$

где $\begin{cases} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \\ \varphi = -\varphi_0 + \omega t - kz \\ N_{0_{V_z}} = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi} U} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ p = \int \psi_1^* \left(\vec{p}, \vec{e}\right) \psi_2 dV \\ \vec{p} = \sum\limits_i q_i \vec{r}_i \\ \vec{E}(t) = \mathcal{E}_0 \vec{e} \cdot \cos(\varphi) \end{cases}$.

Получается, что поляризация среды пропорциональна амплитуде светового поля $P \sim \mathcal{E}_0$, но сдвинута по фазе относительно осцилляций светового поля.

Для описания такой поляризации вводят в рассмотрение комплексную восприимчивость среды.

Сначала введем комплексную напряженность $\tilde{E}(t)$ световой волны, соответствующую вещественной напряженности $E(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\varphi)$:

$\tilde{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cdot e^{-i\varphi}$.

Тогда $E(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}(t)\right) = \dfrac{\tilde{E}(t)}{2} + к.с.$

$\tilde{P} = \tilde{\chi}\tilde{E}(t)$ — определение комплексной восприимчивости $\tilde{\chi}$, как коэффициента пропорциональности между комплексной поляризацией $\tilde{P}$ и комплексной напряженностью $\tilde{E}(t)$.

Выразим комплексное число $\tilde{\chi}$ через два вещественных числа χ' и χ'':

$\tilde{\chi} = \chi' + i\chi''$.

Выразим вещественную поляризацию среды, осциллирующую с частотой световой волны, через вещественную и мнимую части комплексной восприимчивости среды.

$$P = \mathrm{Re}\left(\tilde{P}\right) = \frac{\tilde{P}}{2} + к.с. = \frac{\tilde{\chi}\tilde{E}(t)}{2} + к.с. = \frac{1}{2}\left(\chi' + i\chi''\right)\mathcal{E}_0 e^{-i\varphi} + к.с. =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\chi' + i\chi''\right)\mathcal{E}_0\left(\cos(\varphi) - i\cdot\sin(\varphi)\right) + к.с. = \mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi) + \chi''\sin(\varphi)\right).$$

$P = \mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi) + \chi''\sin(\varphi)\right)$.

Соответствующее равенство для распределений:

$P_{V_z} = \mathcal{E}_0\left(\chi'_{V_z}\cos(\varphi) + \chi''_{V_z}\sin(\varphi)\right)$.

Сравним это выражение с полученным ранее выражением

$$P_{V_z} = N_{0_{V_z}} pR\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)\frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Оба равенства справедливы для любого момента времени и, следовательно, для любой фазы φ. В таком случае можно приравнять коэффициенты при косинусе φ и при синусе φ этих двух выражений для P_{V_z}.

Тогда с учетом $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ получим

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = \dfrac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

Здесь

$$\begin{cases} \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \dfrac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right) \\ G = \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right) \\ R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \\ \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \end{cases}.$$

Следующее равенство

$$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi)$$

является определением синфазной P_c и квадратурной P_s амплитуд поляризации среды. Тогда с учетом равенства $P = \mathcal{E}_0\left(\chi'\cos(\varphi) + \chi''\sin(\varphi)\right)$ следует

$$\begin{cases} P_c = \chi'\mathcal{E}_0 \\ P_s = \chi''\mathcal{E}_0 \end{cases}.$$

Обратное воздействие среды на волну. Дифференциальные уравнения для амплитуды поля или укороченные волновые уравнения.

Излучение диполей среды изменяет проходящую мимо световую волну. Это изменение проявляется в поглощении света и изменении скорости распространения света в среде. Изменения в проходящей световой волне возникают в результате интерференции света переизлученного диполями молекул и проходящей мимо световой волны. В этом и состоит обратное воздействие среды на волну.

Вместо сложения волн излучения диполей изменение световой волны в среде можно вывести из системы уравнений Максвелла. Что мы и сделаем.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

без свободных зарядов $\rho=0$ и без токов проводимости $\vec{j}=0$.

Тогда получим:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=0 \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Рассмотрим два выражения для ротора ротора $\vec{E}$.

С одной стороны, возьмем ротор от второго уравнения и подставим в правую часть вместо ротора $\vec{B}$ выражение для ротора $\vec{H}$ из четвертого уравнения. Напомним, что в оптике $\mu=1$ и $\vec{B}=\vec{H}$. Тогда получим

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{B}\right)=-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}.$$

А с другой стороны по правилу "бац минус цап":

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right).$$

Здесь $\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)=div\left(\vec{E}\right)=\frac{1}{\varepsilon}div\left(\vec{D}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}=0$, тогда

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=-\vec{E}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)=-\Delta\vec{E}.$$

Объединяя оба выражения для $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)$, получим:

$$\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=0 \tag{4.1}$$

Если подставить $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ в уравнение (4.1), то получим волновое уравнение для поля $\vec{E}$:

$$\Delta\vec{E}-\frac{\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{4.2}$$

Сравнивая уравнение (4.2) с определением волнового уравнения в математике:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

получим величину фазовой скорости световых волн $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Сравнивая величину скорости с определением показателя преломления $V = \frac{c}{n}$, получаем

$n = \sqrt{\varepsilon}$, точнее $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, но в оптике $\mu \approx 1$.

Тогда $\varepsilon = n^2$ => $\vec{D} = n^2 \vec{E}$

Векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ можно связать друг с другом и несколько иначе:

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, где $\vec{P}$ — поляризация среды или объемная плотность дипольного момента, осциллирующая на световой частоте.

Разобьем поляризацию на два слагаемых $\vec{P} = \vec{P}_{нерез} + \vec{P}_{рез}$:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{нерез} + 4\pi\vec{P}_{рез}.$$

Здесь $\vec{P}_{рез}$ — резонансный вклад в поляризацию или вклад двух уровней энергии, связанных переходом близким по частоте к частоте света; $\vec{P}_{нерез}$ — нерезонансный вклад в поляризацию среды от остальных переходов.

По аналогии с формулой $\vec{D} = n^2\vec{E}$ запишем $\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{нерез} = n_0^2\vec{E}$, где n_0 — показатель преломления среды вдали от рассматриваемой линии поглощения. Тогда

$$\vec{D} = n_0^2\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{рез}.$$

Чтобы не тянуть за собой во всех формулах нижний индекс у поляризации будем во всех последующих формулах вместо $\vec{P}_{рез}$ писать просто $\vec{P}$, подразумевая под $\vec{P}$ вклад в поляризацию только от рассматриваемого перехода среды.

Подставим $\vec{D} = n_0^2\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{рез}$ в уравнение (4.1), заменим $\vec{P}_{рез}$ на $\vec{P}$ и получим

$$\Delta\vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \qquad (4.3)$$

Это — уравнение Даламбера или волновое уравнение с источниками поля.

Далее из этого уравнения мы хотим получить дифференциальное уравнение для амплитуды светового поля через амплитуду поляризации. Эти уравнения для амплитуд и называются укороченными волновыми уравнениями.

Будем рассматривать уравнение (4.3) для комплексных $\vec{E}$ и $\vec{P}$. Для линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси z, и линейно поляризованную вдоль оси y. Тогда $\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{e}_y$. Для краткости записи отбросим векторные обозначения, и будем рассматривать только y проекции векторов.

Чтобы отличать комплексные величины от вещественных величин будем писать волну над комплексными величинами.

$E = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)$ и $P = \mathrm{Re}\left(\tilde{P}\right)$.

Перепишем уравнение (4.3) для комплексных величин:

$$\Delta\tilde{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} \qquad (4.4)$$

Будем искать решение в виде

$\tilde{E} = \tilde{E}_0(t,z) \cdot e^{-i\varphi}$, где ось z направлена вдоль направления распространения световой волны $\varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0$ — фаза световой волны и будем рассматривать фазу, как фазу волны распространяющейся с фазовой скоростью $\frac{c}{n_0}$, а не со скоростью $\frac{c}{n}$, как на самом деле. Соответственно

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_0\nu} = \frac{\omega}{\frac{c}{n_0}} = \frac{n_0\omega}{c}$ — нерезонансное волновое число вместо $k = \frac{n\omega}{c}$.

Несоответствие k_0 настоящему k спрятано в зависимости амплитуды света $\tilde{E}_0$ от z координаты.

Аналогично будем считать

$\tilde{P} = \tilde{P}_0(t,z) \cdot e^{-i\varphi}$, где $\varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0$.

Получим теперь из уравнения (4.4) связь комплексных амплитуд $\tilde{E}_0$ и $\tilde{P}_0$.

В уравнение надо подставить вторые производные, для которых введем более компактные обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} \equiv \tilde{E}'' \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{E}} \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{P}} \end{cases}$$

Выразим эти производные через амплитуды поля и поляризации и подставим в уравнение (4.4).

Дифференцируя по z выражение $\tilde{E} = \tilde{E}_0(t,z) \cdot e^{-i\varphi}$, получим $\tilde{E}' = \tilde{E}_0' e^{-i\varphi} + ik_0 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}$. Тогда

$$\tilde{E}'' = \tilde{E}_0'' e^{-i\varphi} + 2ik_0 \tilde{E}_0' e^{-i\varphi} - k_0^2 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}.$$

Аналогично:

$$\ddot{\tilde{E}} = \ddot{\tilde{E}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega \dot{\tilde{E}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}$$

и

$$\ddot{\tilde{P}} = \ddot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega \dot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2 \tilde{P}_0 e^{-i\varphi}.$$

Подставим все три выражения в уравнение (4.4), в котором $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, так как световая волна распространяется вдоль оси z, поэтому нет зависимости от координат x и y и вторые производные по ним равны нулю. После подстановки производных в уравнение (4.4) сократим это уравнение на $e^{-i\varphi}$ и получим:

$$\tilde{E}_0'' + 2ik_0 \tilde{E}_0' - k_0^2 \tilde{E}_0 - \frac{n_0^2}{c^2} \ddot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2} 2i\omega \dot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2} \omega^2 \tilde{E}_0 = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{\tilde{P}}_0 - \frac{8\pi i\omega}{c^2} \dot{\tilde{P}}_0 - \frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \tilde{P}_0 \tag{4.5}$$

Слагаемые $-k_0^2 \tilde{E}_0$ и $+\dfrac{n_0^2}{c^2} \omega^2 \tilde{E}_0$ в сумме равны нулю, так как $k_0 = \dfrac{n_0 \omega}{c}$.

Сократим эти два слагаемых в уравнении (4.5).

Амплитуды $\tilde{E}_0$ и $\tilde{P}_0$ — медленные функции координат и времени. Тогда высокими производными от амплитуд можно пренебречь по сравнению с низкими производными. Оставим в уравнении (4.5) только наибольшие слагаемые $\tilde{P}_0$, $\dot{\tilde{E}}_0$, $\tilde{E}_0'$ для амплитуд $\tilde{E}_0$ и $\tilde{P}_0$, отбросим более высокие производные и получим:

$$2ik_0 \tilde{E}_0' + 2i \frac{n_0^2}{c^2} \omega \dot{\tilde{E}}_0 = -\frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \tilde{P}_0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2ik_0} \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c} \dot{\tilde{E}}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \tag{4.6}$$

Это и есть укороченное волновое уравнение или уравнение для комплексных амплитуд поля и поляризации.

Получим другую форму уравнения.

Рассмотрим выражение для дифференциала комплексной амплитуды светового поля $\tilde{E}_0$, как функции координаты z и времени t:

$$d\tilde{E}_0 = \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial z} dz + \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial t} dt = \tilde{E}_0' dz + \dot{\tilde{E}}_0 dt$$

Разделим это равенство на дифференциал координаты dz и получим:

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{dt}{dz} \cdot \dot{\tilde{E}}_0 .$$

Пусть $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$, тогда

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c} \dot{\tilde{E}}_0 \tag{4.7}$$

Это совпадает с левой частью уравнения (4.6).

Какой смысл приравнивания $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$?

При этом условии мы берем производную $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$, как бы сидя верхом на гребне световой волны, которая распространяется со скоростью $\frac{c}{n_0}$. Это так называемая полная производная, она аналогична, например, производной $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ в рассмотренных ранее уравнениях для матрицы плотности, где $\frac{d\rho_{11}}{dt}$ — полная производная в системе отсчета атома или как бы сидя верхом на атоме.

Выражение $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$ — производная, которая показывает, что происходит с амплитудой световой волны по мере распространения волны вдоль оси z.

Подставим (4.7) в (4.6) и получим

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \tag{4.8}$$

Это то же самое укороченное волновое уравнение, что и (4.6), но в другой форме.

Получим теперь аналоги комплексных уравнений (4.6) и (4.8) в вещественном виде.

Вместо одной комплексной амплитуды $\tilde{P}_0$ рассмотрим две вещественные амплитуды P_c и P_s. Здесь P_c — синфазная по отношению к световому полю амплитуда, а P_s — квадратурная амплитуда поляризации, сдвинутая по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно фазы светового поля.

$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi) = \mathrm{Re}\left(\left(P_c + iP_s\right) \cdot e^{-i\varphi}\right)$, тогда комплексная амплитуда поляризации выражается через две вещественные амплитуды следующим образом:

$$\tilde{P}_0 = P_c + iP_s .$$

Аналогичное выражение получаем для напряженности светового поля:

$\tilde{E}_0 = E_c + iE_s$.

Подставим эти выражения в уравнения (4.6) и (4.8). В каждом из полученных комплексных уравнений можно приравнять друг другу вещественные части и мнимые части. В результате получим укороченные волновые уравнения в вещественном виде:

$$\begin{cases} E_c' + \dfrac{n_0}{c}\dot{E}_c = -2\pi\dfrac{\omega}{n_0 c}P_s \\ E_s' + \dfrac{n_0}{c}\dot{E}_s = +2\pi\dfrac{\omega}{n_0 c}P_c \end{cases}$$ из уравнения (4.6) и

$$\begin{cases} \dfrac{dE_c}{dz} = -\dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_s \\ \dfrac{dE_s}{dz} = +\dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_c \end{cases}$$ из уравнения (4.8).

Рассмотрим частный случай применения укороченных волновых уравнений для прохождения света через оптически тонкий слой среды толщиной Δz.

$\tilde{E}_{0_{вых}} = \tilde{E}_{0_{вх}} + \dfrac{d\tilde{E}_0}{dz}\Delta z$, где $\tilde{E}_{0_{вых}}$ — амплитуда света на выходе из среды, $\tilde{E}_{0_{вх}}$ — амплитуда на входе.

На входе $\begin{cases} E_c = \mathcal{E}_0 \\ E_s = 0 \end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} E_{c_{вых}} = \mathcal{E}_0 - \dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_s \cdot \Delta z \\ E_{s_{вых}} = \dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}P_c \cdot \Delta z \end{cases}$$ — световое поле на выходе из слоя среды,

где

$$\begin{cases} P_c = \int P_{c_{V_z}}\, dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi'_{V_z}\, dV_z \\ P_s = \int P_{s_{V_z}}\, dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi''_{V_z}\, dV_z \end{cases},$$

и в свою очередь

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases},$$

как это было показано в вопросе о поляризации среды.

Здесь

$p = \int \psi_1^* \cdot (\vec{p}, \vec{e}) \cdot \psi_2 \cdot dV$ — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны.

$N_0(V_z) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi} U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$ — распределение концентрации по лучевой скорости молекул.

$U = \sqrt{\frac{2k_Б T}{m}}$ — наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре T, $k_Б$ — постоянная Больцмана.

$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right)$, где

$G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)$ — фактор насыщения, $R = \frac{p\mathscr{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета атома относительно частоты перехода.

<u>Показатель преломления и коэффициент поглощения среды.</u>

$$\begin{cases} \tilde{P} = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E} \\ \tilde{P} = \tilde{P}_0 \cdot e^{-i\varphi} \\ \tilde{E} = \tilde{E}_0 \cdot e^{-i\varphi} \end{cases} \qquad =>$$

$\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$ — комплексная восприимчивость $\tilde{\chi}$ является не только коэффициентом пропорциональности между комплексной поляризацией $\tilde{P}$ и комплексной напряженностью световой волны $\tilde{E}$, но и является коэффициентом пропорциональности между амплитудами комплексной поляризации и комплексной напряженности световой волны.

Подставим $\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$ в укороченное волновое уравнение $\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0$ и получим

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} \tilde{E}_0 .$$

Решение этого дифференциального уравнения — экспонента:

$$\tilde{E}_0(z) = \mathscr{E}_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} z} = \mathscr{E}_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \chi' z} e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c} \chi'' z} .$$

Сравним это решение с ожидаемым выражением:

$$\tilde{E}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{i(k-k_0)z}\, e^{-\frac{\aleph}{2}z}.$$

Обсудим, почему это выражение ожидаемое.

Сомножитель $e^{-\frac{\aleph}{2}z}$ связан с определением коэффициента поглощения $\aleph$ через интенсивность света I:

$$\begin{cases} I = I_0\, e^{-\aleph z} \\ I \sim E_0^2 \end{cases} \quad => \quad E_0 \sim e^{-\frac{\aleph}{2}z}.$$

Сомножитель $e^{i(k-k_0)z}$ в выражении для $\tilde{E}_0(z)$ связан с тем, что реальная скорость света в среде $\frac{c}{n}$ заменена нами при выводе укороченных волновых уравнений скоростью $\frac{c}{n_0}$, что соответствует замене $k = \frac{n\omega}{c}$ на $k_0 = \frac{n_0\omega}{c}$.

Вместо $\tilde{E} \sim e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)}$ мы при выводе укороченных волновых уравнений использовали формулу $\tilde{E} \sim \tilde{E}_0\, e^{-i(\omega t - k_0 z - \varphi_0)}$. Сравнивая обе формулы получим, что

$$\tilde{E}_0 \sim e^{i(k-k_0)z}.$$

Тогда, сравнивая два выражения для $\tilde{E}_0(z)$

$$\begin{cases} \tilde{E}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c}\chi' z}\, e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c}\chi'' z} \\ \tilde{E}_0(z) = \mathcal{E}_0\, e^{i(k-k_0)z}\, e^{-\frac{\aleph}{2}z} \end{cases}, \text{ получим:}$$

$$\begin{cases} k - k_0 = \dfrac{2\pi\omega}{n_0 c}\chi' \\ \aleph = \dfrac{4\pi\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}.$$

С учетом $n = k\frac{c}{\omega}$ первое уравнение можно изменить, тогда

$$\begin{cases} n - n_0 = \dfrac{2\pi}{n_0}\chi' \\ \aleph = \dfrac{4\pi\omega}{n_0 c}\chi'' \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \chi' = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi'_{V_z}\, dV_z \\ \chi'' = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi''_{V_z}\, dV_z \end{cases} \quad \text{и}$$

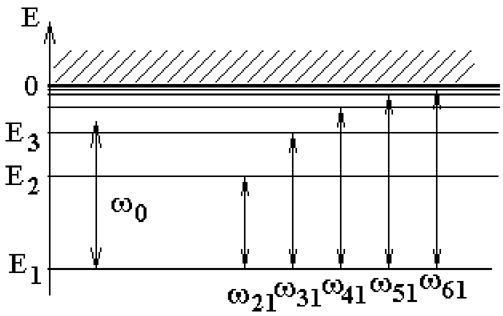
$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\dfrac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar} \cdot \dfrac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}, \text{ где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21},$$

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \left(1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right)\right), \text{ где}$$

$$G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right) \text{ — фактор насыщения, } R = \frac{p\mathscr{E}_0}{\hbar} \text{ — частота Раби,}$$

Неравенство $n_0 > 1$ в области прозрачности среды, как влияние хвостов высокочастотных линий поглощения.

Рассмотрим свет с частотой ω_0 в области прозрачности среды. Пусть молекулы среды находятся на нижнем уровне энергии. Оказывается, что справа от частоты ω_0 много линий поглощения ω_{n1}, то есть неравенство $\omega_0 < \omega_{n1}$ бывает часто, а слева от частоты ω_0 линий поглощения мало, то есть неравенство $\omega_{n1} < \omega_0$ бывает редко. Это видно из рисунка



.

Если линия поглощения ω_{n1} находится справа от частоты света ω_0, то расстройка Ω частоты света относительно частоты перехода отрицательная

$$\omega_0 < \omega_{nk} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_0 - \omega_{nk} < 0 \quad \Rightarrow \quad \chi' \sim \left(-\frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}\right) > 0 \quad \Rightarrow$$

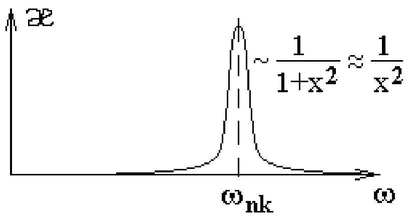
$$n - n_0 = \frac{2\pi}{n_0}\chi' > 0 \quad \Rightarrow \quad n - n_0 > 0$$

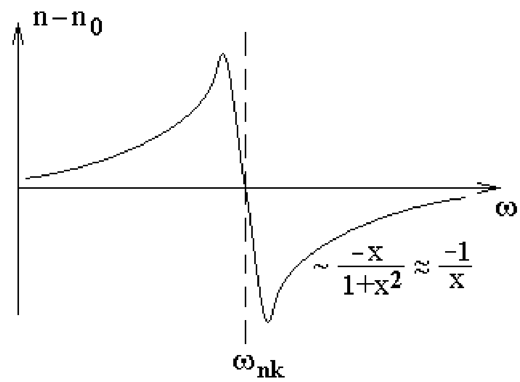
То есть рассматриваемая линия поглощения ω_{n1} дает положительную добавку к показателю преломления.

Поскольку линий поглощения справа от частоты света всегда много, и их вклады в показатель преломления положительны, сам показатель преломления в области прозрачности среды оказывается больше, чем в вакууме:

$n_0 > 1$.

При большом частотном удалении от линии поглощения коэффициент поглощения убывает пропорционально $\frac{1}{x^2}$, а добавка к коэффициенту поглощения убывает гораздо медленнее, пропорционально $\frac{1}{x}$, где $x=\frac{\Omega}{\Gamma}$ — безразмерная частотная расстройка. Поведение обеих величин в зависимости от частоты света изображено на нижеследующих рисунках.





Относительно быстрый спад коэффициента поглощения приводит к тому, что в частотной области, где поглощения практически нет и коэффициент поглощения равен нулю, показатель преломления заметно отличается от единицы.

<u>Понятие о дисперсионном соотношении Крамерса — Кронига.</u>

Сигнал на выходе устройства не может появиться раньше, чем на его входе.

Пусть электрическое (или оптическое) устройство имеет комплексный коэффициент передачи $\tilde{K}(\omega)$, где

$$\tilde{U}_{вых_\omega}=\tilde{K}(\omega)\cdot\tilde{U}_{вх_\omega}.$$

Пусть $U_{вх}(t)=\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Тогда

$$\tilde{U}_{вх_\omega}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\cdot U(t)\cdot dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\cdot\delta(t)\cdot dt=\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega\cdot 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot dt=\frac{1}{2\pi}$$

Тогда

$$\tilde{U}_{вых_\omega}=\tilde{K}(\omega)\cdot\tilde{U}_{вх_\omega}=\frac{1}{2\pi}\tilde{K}(\omega) \qquad =>$$

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\cdot\tilde{U}_{вых_\omega}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\cdot\tilde{K}(\omega)\cdot d\omega.$$

Сигнал на выходе схемы не может появиться раньше, чем сигнал появляется на входе, тогда $U_{вых}(t)=0$ при $t<0$, так как $U_{вх}(t)=\delta(t)=0$ при $t<0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{K}(\omega) \cdot d\omega = 0 \text{ при } t < 0.$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики любой схемы связаны приведенным выше интегральным соотношением.

В оптике коэффициент передачи тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$ определяется комплексной поляризуемостью молекул $\tilde{\alpha}(\omega)$, то есть коэффициентом пропорциональности между комплексным дипольным моментом молекулы $\tilde{p}(\omega)$ и комплексной напряженностью светового поля $\tilde{E}(\omega)$:

$\tilde{p}(\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$, где $\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha' + i\alpha''$.

С дипольным комплексным моментом молекул $\tilde{p}$ связана комплексная поляризация среды $\tilde{P} = N_0 \tilde{p}$, где N_0 — концентрация молекул.

Из вещественности $P(t)$ и $E(t)$ можно доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega) \\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega) \end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл $\int \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$, в котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерсу и Кронигу, используя условие $\tilde{\alpha}(\omega) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0$, удалось взять интеграл по вычетам и доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(\omega_0) = \dfrac{2}{\pi} \mathcal{P} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\omega \alpha''(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \alpha''(\omega_0) = -\dfrac{2\omega_0}{\pi} \mathcal{P} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{cases}.$$

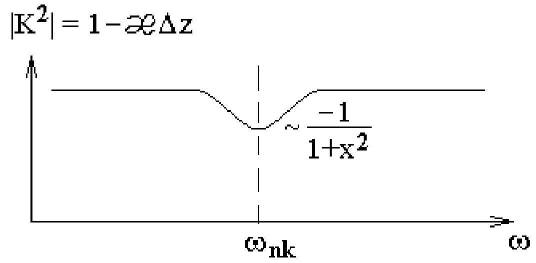
Здесь $\mathcal{P}\int$ — интеграл в смысле главного значения. Эти интегральные связи между $\alpha'(\omega)$ и $\alpha''(\omega)$ означают, что интегрально связаны зависимость коэффициента поглощения от частоты света и зависимость показателя преломления от частоты света. Для оптически тонкого слоя:

$$\begin{cases} \alpha' \sim \chi' \sim (n - n_0) \\ \alpha'' \sim \chi'' \sim \aleph \end{cases}.$$

В свою очередь от добавки к показателю преломления и от коэффициента поглощения зависит комплексный коэффициент передачи оптически тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$:

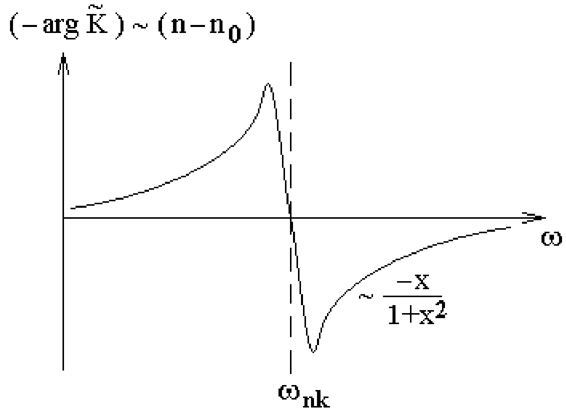
$$\begin{cases} \left|\tilde{K}^2\right| = 1 - \aleph \cdot \Delta z \\ -\arg\left(\tilde{K}\right) \sim \left(n - n_0\right) \end{cases}.$$

Так если амплитудный коэффициент пропускания имеет провал лоренцевской формы



,

то показатель преломления имеет добавку в виде всплеска дисперсионной формы:



.

Если форма провала не совсем лоренцевская, то и форма всплеска не совсем дисперсионная.

Скоростные уравнения или уравнения баланса.

Скоростные уравнения — это приближение, которое получается из условия

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$$

и уравнений для матрицы плотности в приближении вращающейся волны:

$$
\begin{cases}
\dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) \\
\dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right), \\
\dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega\tilde{\rho}_{21} + \Gamma\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

где

$R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

$p = \int\limits_{V=\infty} \psi_1^*\left(\vec{p},\vec{e}\right)\psi_2 dV$ — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны,

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света относительно частоты перехода в системе отсчета молекулы,

$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi}$ — недиагональный элемент матрицы плотности,

$\varphi = \omega t - kz - \varphi_0$ — фаза световой волны.

Нас в дальнейшем будет интересовать взаимодействие двух световых волн со средой. Если световые волны встречные, то в системе отсчета молекулы две волны будут иметь разные частоты, даже если в лабораторной системе отсчета частоты одинаковы. В таком случае в системе отсчета молекулы амплитуда суммарного светового поля испытывает биения, поэтому условие $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ не выполнено даже для стационарных явлений с двумя световыми волнами.

Однако при условии слабого светового поля, когда $G \ll 1$, так называемые когерентные нестационарные эффекты в наблюдаемых величинах усредняются, и скоростные уравнения дают хорошее приближение.

Подставим $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ в третье уравнение системы (5.1) и получим

$$\tilde{\rho}_{21} = i\frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} \qquad =>$$

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{21}^* - \tilde{\rho}_{21} = -i\frac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right) \cdot \frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \qquad =>$$

$$i\frac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) = \frac{R^2\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)}{2\Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right), \text{ где}$$

$$\mathscr{L}(x) \equiv \frac{1}{1 + x^2} \text{ — лоренцевский контур} \qquad =>$$

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11}+\gamma_1\rho_{11}=\gamma_1\rho_{11}^0-\dfrac{R^2}{2\Gamma}(\rho_{11}-\rho_{22})\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{\rho}_{22}+\gamma_2\rho_{22}=\gamma_2\rho_{22}^0+\dfrac{R^2}{2\Gamma}(\rho_{11}-\rho_{22})\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

Умножим систему на распределение концентрации по лучевой скорости $N_{0_{V_z}}$ и получим

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}}+\gamma_1 N_{1_{V_z}}=\gamma_1 N_{1_{V_z}}^0-\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}\right)\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2_{V_z}}+\gamma_2 N_{2_{V_z}}=\gamma_2 N_{2_{V_z}}^0+\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}\right)\cdot\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases} \quad (5.2)$$

Это почти скоростные уравнения, осталось заменить величину R^2 на более традиционное выражение.

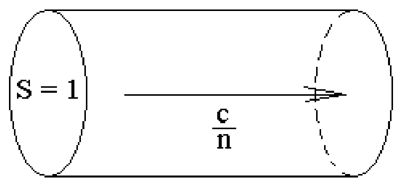
Для получения нового вида уравнений нам понадобятся две новые величины: J и σ.

Введем в рассмотрение J — плотность потока фотонов. Эта величина связана с интенсивностью света I, которая представляет собой плотность потока энергии светового поля. Тогда

$$J\equiv\frac{I}{h\nu},$$

где $I\equiv\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени, $\vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга.

Рассмотрим цилиндр со световым полем, объемная плотность которого w, а фазовая скорость — $\dfrac{c}{n}$.



Пусть площадь сечения цилиндра равна единице, а длина — $\dfrac{c}{n}$. Тогда объем цилиндра равен их произведению $\dfrac{c}{n}$, а энергия светового поля в этом объеме равна $w\dfrac{c}{n}$. Вся эта энергия в единицу времени пройдет через единичную площадку. Следовательно,

$$I = \langle w \rangle \frac{c}{n}.$$

Объемную плотность энергии w можно выразить через амплитуду светового поля $\mathcal{E}_0$. И действительно

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{ \left(\vec{D}, \vec{E}\right) + \left(\vec{B}, \vec{H}\right) \right\}.$$

В оптике $\mu = 1$ и $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$ в бегущей световой волне, тогда

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{ \left(\vec{D}, \vec{E}\right) + \left(\vec{B}, \vec{H}\right) \right\} = \frac{1}{8\pi}\left\{ \varepsilon E^2 + \mu H^2 \right\} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon E^2 = \frac{n^2 E^2}{4\pi}.$$

$$E = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad => \quad \left\langle E^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \quad =>$$

$$\langle w \rangle = \frac{n^2 \mathcal{E}_0{}^2}{8\pi}.$$

Тогда

$$J = \frac{I}{h\nu} = \langle w \rangle \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{nc\mathcal{E}_0{}^2}{8\pi\hbar\omega}.$$
