

### Нобелевская премия по физике 2019 года.

Половину премии получил Джеймс Пиблс за теоретические открытия в космологии. Он был одним из тех, кто предсказал существование реликтового излучения. В Википедии в статье о реликтовом излучении я не нашел фамилию Пиблс, хотя, с другой стороны, уважаемый человек, американец :)... В журнале УФН за 1990 год, Том 160, вып. 2, стр. 323 есть переводная статья на русском языке "Космическая книга" Пиблс с соавторами о современных моделях Вселенной.

Вторую половину получили швейцарские астрофизики Мишель Майор и Дидье Кело за открытие в 1995 году экзопланеты (планеты, которая является спутником другой звезды, не Солнца). К настоящему моменту обнаружено более 4000 экзопланет.

### Скоростные уравнения или уравнения баланса (продолжение).

Оказывается, что в этом выражении нужно заменить  $n \rightarrow n_0$ .

Такая странность имеет две причины.

Во-первых, часть энергии светового поля принято считать энергией, запасенной в среде. Дело в том, что  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , где поляризация  $\vec{P}$  имеет два слагаемых: резонансное  $\vec{P}_{рез}$  и нерезонансное  $\vec{P}_{нерез}$ . Резонансный вклад связан с тем, что молекула может поглощать или излучать свет, только одновременно находясь на двух уровнях энергии. Следовательно, резонансный вклад в поляризацию неразрывно связан с частичным заселением возбужденного уровня энергии. По этой причине соответствующую энергию рассматривают, как энергию среды, а не как энергию светового поля. Тогда обозначим вектор электрического смещения без резонансного вклада в поляризацию, как

$$\vec{D}_0 = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{нерез} = n_0^2\vec{E}, \text{ что аналогично } \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} = n^2\vec{E}.$$

Соответственно объемная плотность энергии  $\langle w_0 \rangle = \frac{n_0^2 \varepsilon_0^2}{8\pi}$ .

Кроме того, рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы договорились рассматривать свет, как будто он распространяется со скоростью  $\frac{c}{n_0}$ , а не  $\frac{c}{n}$ .

В результате

$$J = \langle w_0 \rangle \cdot \frac{c}{n_0} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{n_0 c \varepsilon_0^2}{8\pi \hbar \omega}.$$

Введем теперь в рассмотрение новую величину  $\sigma$  — сечение поглощения, которая по своему физическому смыслу должна быть равна площади тени молекулы. Через сечение поглощения  $\sigma$  может быть выражен коэффициент поглощения  $\aleph$ .

Коэффициент поглощения определяется зависимостью изменения интенсивности света по мере его распространения в поглощающей среде:

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\aleph z}$$

С учетом равенства  $J \equiv \frac{I}{h\nu}$  получим

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\aleph z}.$$

-----

$(N_1 - N_2)$  — эффективная концентрация поглощающих свет молекул, так как при одинаковых заселенностях верхнего и нижнего уровней энергии число переходов снизу вверх равно числу вынужденных переходов сверху вниз, и поглощение света отсутствует.

$(N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$  — число этих как бы поглощающих свет молекул в объеме  $S \cdot dz$ .

$\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$  — площадь тени этих молекул.

$\frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S}$  — относительная площадь тени или вероятность

поглощения фотона на длине  $dz$ .

$\left| \frac{dJ}{J} \right|$  — тоже вероятность поглощения для фотона на длине  $dz$ .

Тогда

$$\frac{dJ}{J} = - \frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dJ}{J} = -\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot dz \quad \Rightarrow$$

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot z}.$$

Сравним это выражение с другим:  $J(z) = J(0) \cdot e^{-\aleph z}$  и получим

$$\aleph = (N_1 - N_2) \cdot \sigma.$$

-----

В случае неоднородного уширения спектральной линии  $\Gamma \ll kU$  величины  $\aleph, \sigma, N_1, N_2$  зависят от лучевой скорости  $V_z$ , так как частота света в системе от счета молекулы  $\omega' = \omega - kV_z$  зависит от  $V_z$ .

Поглощение среды складывается из поглощения молекул с разными лучевыми скоростями

$$\aleph = \int_{-\infty}^{+\infty} \aleph_{V_z} dV_z.$$

Соотношение  $\aleph = (N_1 - N_2) \cdot \sigma$  можно записать для молекул, лучевая скорость которых лежит в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ :

$$\aleph_{V_z} dV_z = \left( N_{1V_z} dV_z - N_{2V_z} dV_z \right) \cdot \sigma(V_z) \quad \Rightarrow$$

$$\aleph_{V_z} = (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma(V_z) = \frac{\aleph_{V_z}}{N_{1V_z} - N_{2V_z}}.$$

Рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы получили, что поглощение среды пропорционально мнимой части комплексной восприимчивости среды  $\aleph_{V_z} = \frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi_{V_z}''$ , тогда

$$\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi_{V_z}''}{N_{1V_z} - N_{2V_z}}.$$

Рассматривая влияние монохроматической световой волны на среду, мы получили выражение для мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\chi_{V_z}'' = \frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} = \frac{p^2 (N_{1V_z} - N_{2V_z})}{\hbar \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\chi_{V_z}''}{N_{1V_z} - N_{2V_z}} = \frac{p^2}{\hbar \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Подставим это отношение в формулу для сечения поглощения

$$\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi_{V_z}''}{N_{1V_z} - N_{2V_z}} \text{ и получим}$$

$$\sigma(V_z) = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar cn_0 \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Здесь  $\sigma_0 = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar cn_0 \Gamma}$  — амплитуда сечения поглощения,  $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$

— расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего переходы.

Из формулы  $\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$  следует, что форма линии поглощения каждой молекулы — лоренцевский контур с шириной  $2\Gamma$ , где  $\Gamma$  — скорость затухания недиагонального элемента матрицы плотности, она же — скорость затухания поляризации среды.

-----

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \cdot J &= (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{n_0 c \varepsilon_0^2}{8\pi \hbar \omega} = \\ &= (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \frac{4\pi \omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{n_0 c \varepsilon_0^2}{8\pi \hbar \omega} = \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right). \end{aligned}$$

Сравним это выражение с полученными ранее почти скоростными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{N}_{1V_z} + \gamma_1 N_{1V_z} = \gamma_1 N_{1V_z}^0 - \frac{R^2}{2\Gamma} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2V_z} + \gamma_2 N_{2V_z} = \gamma_2 N_{2V_z}^0 + \frac{R^2}{2\Gamma} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

и получим скоростные уравнения в окончательном виде:

$$\begin{cases} \dot{N}_{1V_z} + \gamma_1 N_{1V_z} = \gamma_1 N_{1V_z}^0 - (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \\ \dot{N}_{2V_z} + \gamma_2 N_{2V_z} = \gamma_2 N_{2V_z}^0 + (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \end{cases}$$

Здесь сечение поглощения  $\sigma$  зависит от лучевой скорости  $V_z$  в соответствии с формулой:

$$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right), \quad \text{где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \text{ — расстройка частоты, а}$$

$$\text{амплитуда сечения } \sigma_0 = \frac{4\pi \omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}.$$

### **Физический смысл скоростных уравнений.**

Рассмотрим второе уравнение из системы скоростных уравнений, пренебрегая затуханием и накачкой, и на время забудем о зависимости рассматриваемых величин от лучевой скорости  $V_z$ . Тогда

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2) \sigma J.$$

Здесь правую часть равенства можно преобразовать:

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2) \sigma J = \aleph J = -\frac{dJ}{dz} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{N}_2 = -\frac{dJ}{dz}.$$

Здесь  $\dot{N}_2$  — число переходов с нижнего уровня на верхний уровень в единицу времени в единице объема,

$\left(-\frac{dJ}{dz}\right)$  — насколько в единицу времени на единице длины и единице площади влетает фотонов больше, чем вылетает.

Тогда скоростные уравнения отражают тот факт, что скорость потери фотонов равна скорости оптических переходов с нижнего уровня энергии на верхний уровень.

Скоростные уравнения — это условие баланса энергий или равенства числа поглощенных фотонов числу переходов снизу вверх.

По этой причине скоростные уравнения называются также уравнениями баланса.

-----

Уравнения баланса энергий вполне очевидны, и их можно записать без привлечения дифференциальных уравнений для матрицы плотности.

Как же тогда могло оказаться, что балансные уравнения выполняются неточно, а являются результатом приближения  $\dot{\rho}_{21} = 0$ ?

Скоростные уравнения действительно выполняются неточно. Дело в том, что кроме баланса энергий при выводе уравнений баланса была использована формула  $\aleph = (N_1 - N_2)\sigma$ , в которой подразумевается, что поглощение света пропорционально разности заселенностей, что на самом деле справедливо только в случае независимой от времени амплитуды светового поля.

В общем случае коэффициент поглощения пропорционален мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\aleph \sim \chi'' ,$$

а вот мнимая часть комплексной восприимчивости среды пропорциональна разности заселенностей  $\chi'' \sim (N_1 - N_2)$  только в стационарном случае, когда амплитуда светового поля не зависит от времени.

Дело в том, что разность заселенностей не гарантирует наличия дипольного момента среды, который появляется под действием светового поля только с некоторым запаздыванием по времени. Пока нет дипольного момента, комплексная восприимчивость равна нулю, как коэффициент пропорциональности между нулевой поляризацией среды и световым полем. Поглощение света средой связано с интерференцией переизлученного молекулами света и света проходящего мимо молекул. Пока нет переизлученного света, нет и поглощения света.

### Импульс предвестник.

Итак, при быстром включении светового поля диполи молекул раскачиваются не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени. Подробнее это явление мы рассмотрим в конце курса в вопросе "Оптические нутации".

В первый момент при включении света в среде нет осциллирующих молекулярных диполей, тогда нет и их излучения, нет изменения амплитуды проходящего света в результате интерференции проходящей волны и волны переизлученной диполями среды, нет даже показателя преломления среды, вызванного далекими крыльями дисперсионных контуров линий поглощения.

В результате в первый момент после быстрого включения света свет распространяется в среде без поглощения и со скоростью света в пустоте.

Рассмотрим слой среды, для которого  $\aleph z \approx 200$ . Тогда на выходе из среды интенсивность света составляет малую часть  $e^{-\aleph z} \approx e^{-200}$  интенсивности света на входе в слой среды. Для сравнения число протонов в видимой части Вселенной — это величина порядка  $e^{200}$ . То есть ни одного фотона на выходе из среды не будет. Однако на опыте, если свет на входе в кювету включают быстро, то на выходе появляется короткий световой импульс — импульс предвестник, который проходит среду без поглощения и со скоростью света в пустоте. Если свет слабый  $R = \frac{p\epsilon_0}{\hbar} < \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  — спектральная ширина линии поглощения, то ширина импульса предвестника примерно равна  $\frac{1}{\aleph \cdot z \cdot \Delta\omega} \approx \frac{1}{200 \cdot \Delta\omega}$ .

### **Два качественных описания взаимодействия света со средой.**

Возможны два описания "на пальцах" взаимодействия света с веществом. Эти два описания нельзя смешивать друг с другом, иначе получатся заведомо ошибочные результаты.

Первый способ описания использует формализм матрицы плотности. В этом формализме свет поглощают все молекулы среды, и каждая молекула одновременно находится и на нижнем уровне энергии перехода и на верхнем уровне. В стационарном случае способность поглощать свет каждой молекулы пропорциональна разности заселенностей ( $N_1 - N_2$ ). Этот способ описания более правильный.

Второй способ описания в формализме скоростных уравнений. Этот способ менее точный, но более наглядный, более простой для понимания. Этот второй способ описания является хорошим приближением в стационарном случае, когда амплитуда световой волны не зависит от времени. В формализме скоростных уравнений одна часть молекул находится на нижнем уровне энергии, концентрация этих молекул равна заселенности нижнего уровня  $N_1$ , другая часть молекул находится на верхнем уровне энергии, и их концентрация  $N_2$ . При этом эффективная концентрация поглощающих молекул равна  $N_1 - N_2$ . Способность каждой молекулы поглощать свет не зависит от заселенностей уровней, а зависит только от расстройки частоты света относительно частоты перехода. Способность поглощать свет каждой молекулой пропорциональна сечению поглощения  $\sigma = \sigma_0 \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$ .

Если же перепутать оба формализма, то можно предположить, что способность поглощать свет каждой молекулой пропорциональна  $N_1 - N_2$ , и число поглощающих молекул пропорционально  $N_1 - N_2$ . Тогда получается, что

поглощение света пропорционально  $(N_1 - N_2)^2$ , что неверно, так как на самом деле поглощение пропорционально  $N_1 - N_2$ .

### **Резонанс насыщения поглощения слабой пробной волны сильной встречной волной.**

Резонанс насыщения поглощения иногда называют обращенным провалом Лэмба.

Рассмотрим явление качественно без формул.

Сильная световая волна перебрасывает молекулы с нижнего уровня на верхний и с верхнего на нижний. В результате переходов под действием света уменьшается разность заселенностей уровней:

$$(N_1 - N_2) \searrow.$$

Поглощение слабой встречной волны пропорционально этой разности заселенностей:

$\aleph \sim (N_1 - N_2)$ , и, следовательно, поглощение убывает или, как говорят, насыщается.

Насыщается поглощение, так как сильная волна просветляет среду не только для слабой встречной волны, но и для самой себя. Поглощение уменьшается так, что интенсивность поглощенного света стремится к некоторой константе, при стремлении интенсивности падающей на среду световой волны к бесконечности, когда частота Раби больше как однородной ширины спектральной линии  $R > 2\Gamma$ , так и неоднородной (доплеровской) ширины  $R > 2kU$ .

Нас будет интересовать случай неоднородно уширенной линии поглощения, когда лоренцевская ширина линии поглощения каждой молекулы  $2\Gamma$  гораздо меньше доплеровской ширины  $2kU$  спектральной линии поглощения среды. То есть  $\Gamma \ll kU$ .

В случае неоднородного уширения спектральной линии насыщение поглощения сильной световой волны с частотой  $\omega_1$  наступает не для всех молекул, а только для тех, для которых сдвинутая эффектом Доплера частота света совпадает с частотой поглощающего перехода:

$$\omega_1 - kV_{1z} = \omega_{21}.$$

Как говорят, эти молекулы находятся в резонансе со световым полем.

Встречная световая волна с частотой  $\omega_2$  поглощается молекулами с лучевой скоростью  $V_{2z}$  такой, что

$$\omega_2 + kV_{2z} = \omega_{21}.$$

Доплеровский сдвиг частоты  $+kV_{2z}$  имеет другой знак для встречной волны по сравнению со сдвигом для сильной волны  $-kV_{1z}$ .

Просветление среды сильной световой волной для слабой встречной волны происходит в том случае, когда обе волны поглощаются одним и тем же набором молекул:

$$V_{1z} = V_{2z}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_{1z} = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_{2z} = \omega_{21} \\ V_{1z} = V_{2z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \omega_{21} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Рассмотрим задачу количественно в приближении скоростных уравнений.

Проведем рассмотрение в два этапа.

1). На первом этапе рассмотрим изменение среды под действием сильной световой волны.

2). На втором этапе рассмотрим уменьшение поглощения слабой волны средой измененной сильной волной.

Начнем рассмотрение со второй части.

Пусть  $\aleph_2$  — коэффициент поглощения слабой световой волны.

$$\begin{aligned} \aleph_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \aleph_{2V_z} dV_z = \int_{-\infty}^{+\infty} (N_{1V_z} - N_{2V_z}) \cdot \sigma_2(V_z) \cdot dV_z = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} \cdot (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)) \cdot \sigma_2(V_z) \cdot dV_z. \end{aligned}$$

Подставим сюда

$$\begin{cases} N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G_1}{1 + G_1} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1 + G_1}} \right) \right), \\ \sigma_2(V_z) = \sigma_0 \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \end{cases}$$

где второе равенство является решением 1-го этапа задачи и описывает изменение среды сильной световой волной. Подставим и получим

$$\aleph_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \cdot (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \left( 1 - \frac{G_1}{1 + G_1} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1 + G_1}} \right) \right) \cdot \sigma_0 \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \cdot dV_z.$$

Здесь  $\Omega_1$  — частотная расстройка первой световой волны в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего перехода,  $\Omega_2$  — расстройка встречной слабой волны,  $G_1$  — фактор насыщения или безразмерная мощность сильной световой волны.



$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1 - kV_z - \omega_{21} \\ \Omega_2 = \omega_2 + kV_z - \omega_{21} \\ G_1 = \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \cdot \frac{R_1^2}{2\Gamma} \\ R_1 = \frac{p\epsilon_{01}}{\hbar} \end{cases}$$

Здесь  $R_1$  — частота Раби для сильной световой волны.

В предельном случае неоднородного уширения спектральной линии  $\Gamma \ll kU$  интеграл для коэффициента поглощения слабой волны  $\aleph_2$  можно взять.

В выражении

$$\aleph_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \cdot (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \left( 1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1+G_1}} \right) \right) \cdot \sigma_0 \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \cdot dV_z$$

сомножитель  $\mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right)$  играет роль дельта-функции Дирака, так как при

условии  $\Gamma \ll kU$  оказывается, что лоренцевский контур  $\mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right)$  — это узкий пик, как функция от  $V_z$ .

В той области значений лучевой скорости, в которой  $\mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right)$  заметно

отличается от нуля  $\Omega_2 \approx 0$ , другой сомножитель  $e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$  можно считать почти постоянной величиной, которую можно вынести за знак интеграла.

$$\Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 + kV_z - \omega_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_z = \frac{\omega_{21} - \omega_2}{k} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \approx e^{-\left( \frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU} \right)^2}$$

Тогда

$$\aleph_2 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} e^{-\left( \frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU} \right)^2} \cdot (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \sigma_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1+G_1}} \right) \right) \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \cdot dV_z$$

Оставшийся интеграл можно разбить на два слагаемых:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x) dx = \pi$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx \quad \text{— свертка двух лоренцевских контуров разной}$$

ширины.

В математике сверткой  $(f \circ \varphi)$  двух функций  $f$  и  $\varphi$  называют следующий интеграл:

$$(f \circ \varphi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x) \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

Для вычисления свертки двух Лоренцев нужно подынтегральную функцию разложить на простые дроби:

$$\frac{1}{1+(x-y)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{A(x-y)+B}{1+(x-y)^2} + \frac{C\frac{x}{a}+D}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

где  $A, B, C, D$  — неизвестные функции от  $y$  и от  $a$ .

Каждый из 4-х получающихся интегралов при вычислении свертки двух Лоренцев можно взять. В результате получается

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx = \pi(B+aD) = \frac{\pi a}{1+a} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{y}{1+a}\right),$$

где  $B$  и  $D$  — функции от  $y$  и от  $a$ .

Свертка двух Лоренцев — это Лоренц суммарной ширины.

Подставим интегралы

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x) dx = \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx = \pi \frac{a}{1+a} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{y}{1+a}\right) \end{array} \right.$$

в выражение для коэффициента поглощения пробной световой волны и получим

$$\mathfrak{K}_2 = 4\pi^2 \cdot \frac{\frac{3}{2} \omega_2 p^2 N_0 (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{c \hbar n_0 k U} \cdot e^{-\left(\frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot \left( 1 - \frac{G_1}{(1+G_1 + \sqrt{1+G_1})} \cdot \frac{(1 + \sqrt{1+G_1})^2 \Gamma^2}{(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_{21})^2 + (1 + \sqrt{1+G_1})^2 \Gamma^2} \right).$$

Здесь  $\omega_1$  — частота сильной световой волны,  $\omega_2$  — частота слабой встречной световой волны,  $G_1 = \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \cdot \frac{R_1^2}{2\Gamma}$  — фактор насыщения или безразмерная мощность сильной световой волны,  $R_1 = \frac{P\epsilon_{01}}{\hbar}$  — частота Раби для сильной световой волны.

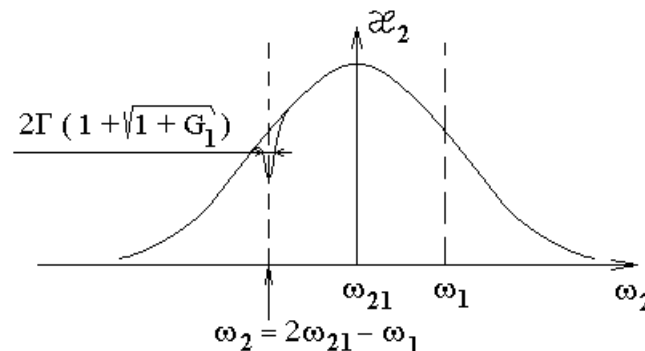
Резонанс просветления среды — это отрицательная добавка к коэффициенту поглощения световой волны.

Ширина резонанса при изменении  $\omega_1$  и постоянном значении  $\omega_2$  или при изменении  $\omega_2$  и постоянном значении  $\omega_1$  равна:

$$\Delta\omega = 2\Gamma \left( 1 + \sqrt{1 + G_1} \right).$$

Ширина резонанса просветления среды равна сумме ширины провала Беннетта в шкале частот, который выжигает сильная световая волна, и ширины сечения поглощения слабой встречной волны. Контур суммарной ширины получается в результате свертки Лоренцев провала Беннетта и сечения поглощения.

Резонанс насыщения поглощения возникает при условии  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$ .



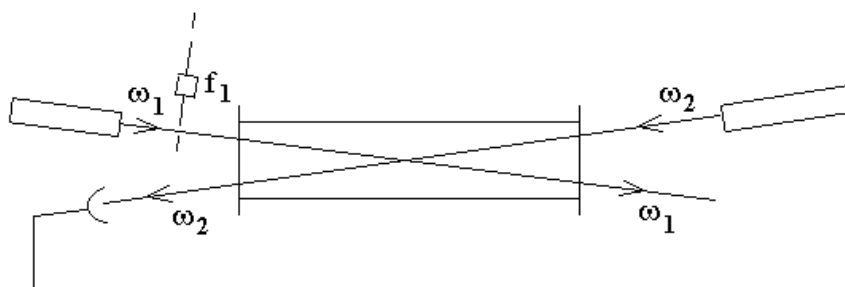
Еще раз коротко о механизме формирования резонанса насыщения поглощения. Сильная волна перебрасывает молекулы с одного уровня энергии на другой, уменьшая, таким образом, разность заселенностей  $(N_1 - N_2)$ . Поглощение слабой волны пропорционально этой разности  $\mathfrak{N} \sim (N_1 - N_2)$ . Просветление среды происходит в том случае, когда две встречных волны поглощаются одним и тем же набором молекул с лучевой скоростью  $V_z$ :

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_z = \omega_{21} \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}.$$

### **Варианты спектроскопии насыщения поглощения.**

#### **1). Встречные волны разной частоты.**

Оптическая схема опыта представлена на следующем рисунке:



Подразумевается, что угол между встречными волнами очень мал.

Прерыватель, он же модулятор, представляет собой вращающийся диск с прорезями, через которые проходит излучение лазера 1.

Фототок приемника излучения слабой волны с частотой  $\omega_2$  модулирован на частоте  $f_1$  прерываний света сильной волны  $\omega_1$  только в том случае, если две световые волны нелинейно взаимодействуют в среде кюветы. Фототок модулирован на частоте  $f_1$ , если при включении луча  $\omega_1$  изменяется поглощение луча  $\omega_2$ .

-----

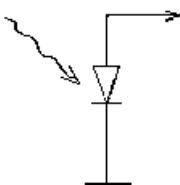
Обсудим теперь некоторые технические детали эксперимента.

В качестве приемника излучения света используется фотодиод, фоторезистор или ФЭУ — фотоэлектронный умножитель.

-----

Чаще всего используется фотодиод, поэтому рассмотрим три варианта включения фотодиода в электрическую схему.

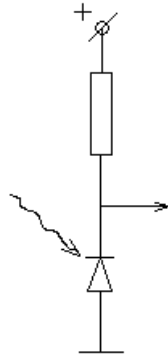
1). Режим фото ЭДС



При указанной полярности включения фотодиода под действием света на выходе образуется положительное напряжение  $U_{вых} > 0$ . В контакте  $p-n$  перехода есть двойной электрический слой, который создает контактную разность потенциалов и не пускает основные носители тока диффундировать из одного полупроводника в другой полупроводник. Под действием фотона внутри контактного слоя образуется пара электрон-дырка. Под действием поля в контактном слое электрон и дырка движутся так, что частично нейтрализуют заряды двойного электрического слоя. Контактная разность потенциалов уменьшается, это и есть напряжение с фотодиода.

Преимущество схемы — малые шумы. Недостаток — нелинейная зависимость напряжения на выходе от интенсивности света.

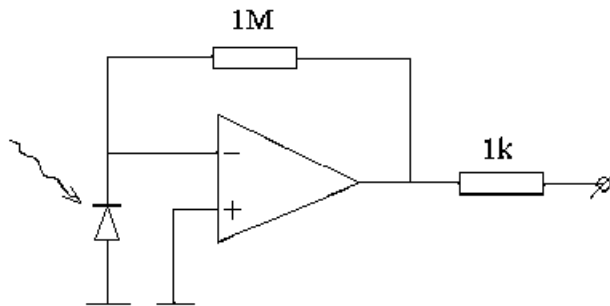
2). Режим включения с внешним источником напряжения.



Напряжение на выходе схемы линейно минусует с ростом интенсивности света.

Преимущество схемы — линейность и большая чувствительность (высокий коэффициент передачи). Недостаток схемы — большие шумы.

3). Режим короткого замыкания.



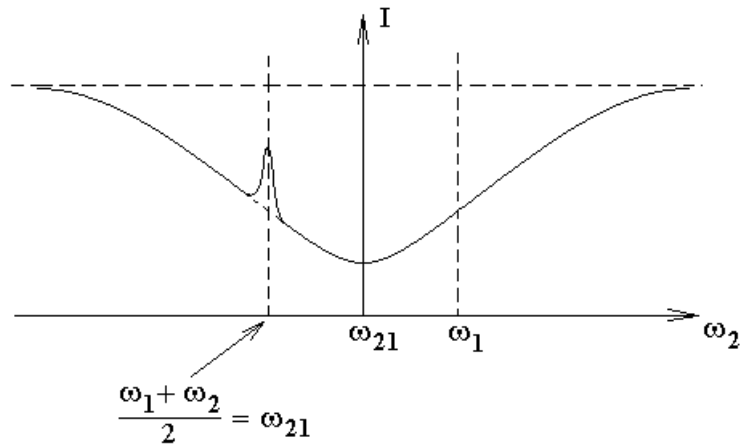
Преимущества схемы — высокая линейность, малые шумы, высокий коэффициент передачи. При указанной полярности включения фотодиода под действием света на выходе операционного усилителя образуется положительное напряжение  $U_{вых} > 0$ .

-----

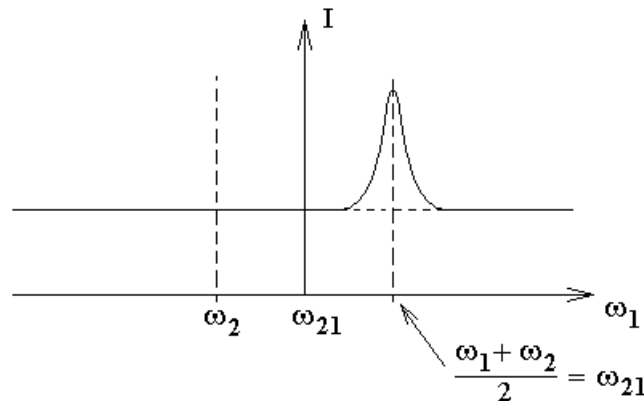
Рассмотрим зависимость интенсивности света на приемнике от частоты сильной волны  $\omega_1$  и от частоты слабой встречной волны  $\omega_2$  для начала без модуляции на частоте  $f_1$  лазерного луча сильной волны  $\omega_1$ .

Пусть частота пробной волны  $\omega_2$  медленно изменяется. Тогда зависимость интенсивности света на приемнике от времени и, соответственно, от частоты  $\omega_2$  будет иметь вид широкого доплеровского контура линии поглощения (подразумевается, что  $\Gamma \ll kU$ ) и узкого лоренцевского пика просветления среды на частоте, для которой выполняется условие

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}.$$

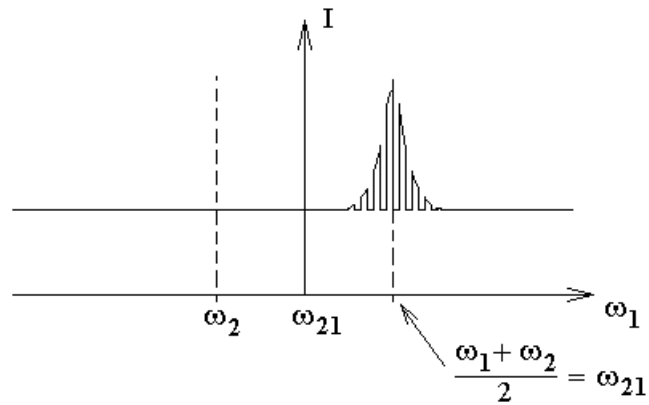


Теперь рассмотрим вариант регистрации резонанса, если частота пробной волны фиксирована  $\omega_2 = const$ . Тогда при изменении частоты насыщающей волны  $\omega_1$  интенсивность света на приемнике не изменяется до тех пор, пока не будет выполнено условие  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$ , при котором обе встречные волны поглощаются одним и тем же набором молекул:



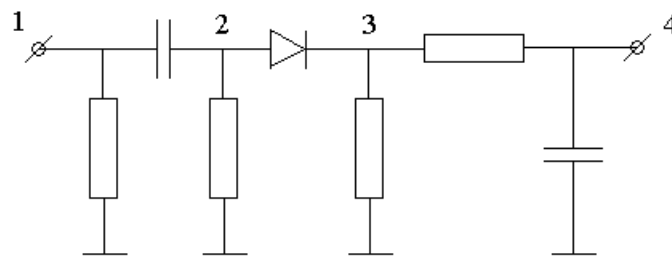
Здесь изображен более широкий резонанс только для большей наглядности следующего рисунка.

Если в этом втором варианте регистрации включить модуляцию сильной световой волны, то при линейном сканировании во времени частоты  $\omega_1$  сильной волны зависимость интенсивности на приемнике от времени будет иметь следующий вид:

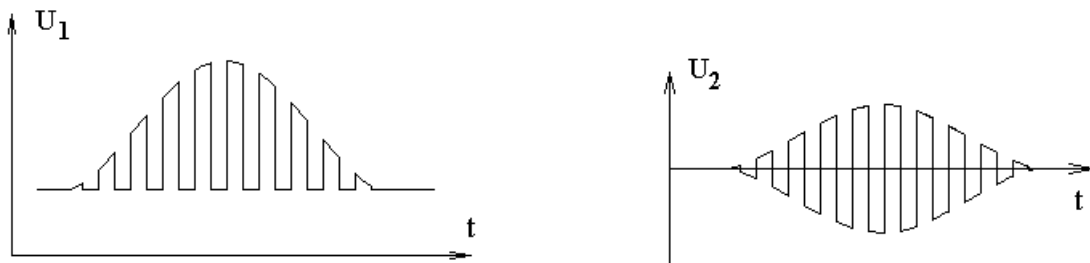


Обычно резонанс просветления среды очень мал и составляет один процент или еще меньше от величины постоянной подложки — засветки приемника. При этом даже незначительные шумы подложки существенно затрудняют регистрацию резонанса. Как говорят, резонанс тонет в шумах. В таком случае возникает задача выделения огибающей резонанса и исключения подложки из электрического сигнала фотоприемника.

Рассмотрим два способа выделения огибающей фототока.  
1-ый способ.

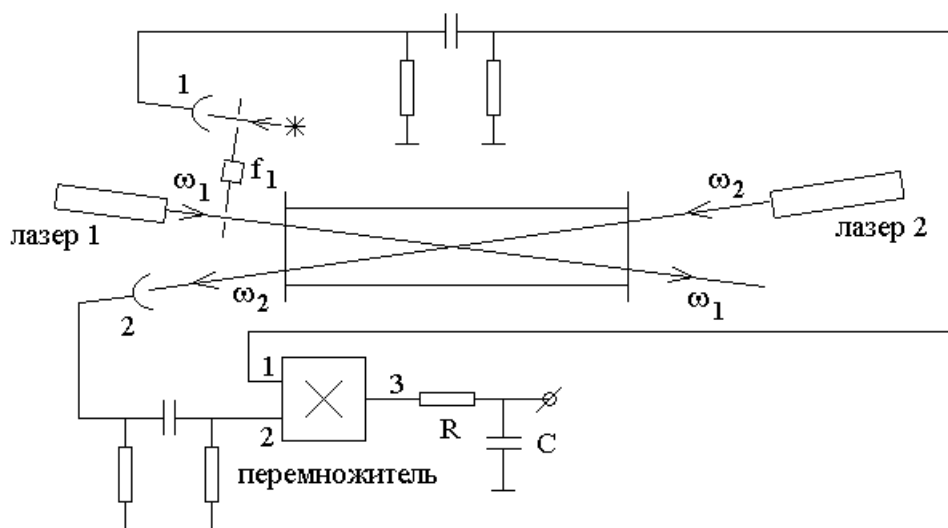


Рассмотрим напряжение, как функцию времени (при линейном сканировании частоты любого из лазеров) в четырех точках, указанных на рисунке. Обозначим эти напряжения, как  $U_1, U_2, U_3, U_4$ .





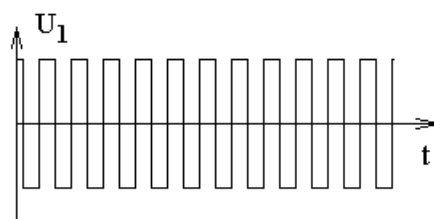
2-ой способ выделения огибающей — это синхронное детектирование сигнала.



Синхронное детектирование сигнала происходит на аналоговом перемножителе сигналов. Перемножитель — это микросхема с двумя входами и одним выходом, не считая выводов питания и коррекции.

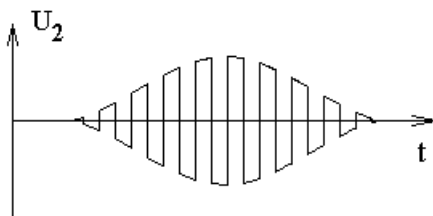
На первый вход перемножителя поступает сигнал с фотоприемника 1, на который попадает свет от лампы накаливания, проходящий через прерыватель, который модулирует свет лампы с частотой  $f_1$ . С этой же частотой модулируется насыщающая световая волна  $\omega_1$  излучения лазера 1. Прерыватель, он же модулятор, представляет собой вращающийся диск с прорезями, через которые проходит с одной стороны от мотора свет лампы накаливания, а с другой стороны излучение лазера 1.

Напряжение с фотоприемника 1 после отсечения конденсатором постоянной составляющей поступает на вход 1 перемножителя в качестве опорного сигнала. Зависимость напряжения опорного сигнала от времени имеет следующий вид:

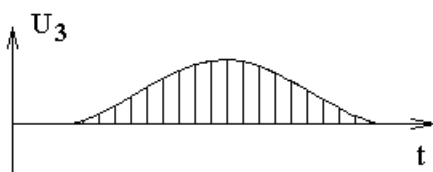




На второй вход перемножителя через конденсатор, отсекающий постоянную составляющую, поступает полезный сигнал с фотоприемника 2. Этот сигнал на частоте модуляции  $f_1$  появляется, только когда сильная световая волна  $\omega_1$  просветляет среду для слабой встречной волны  $\omega_2$ . Напряжение на втором входе перемножителя, как функция времени, имеет следующий вид:

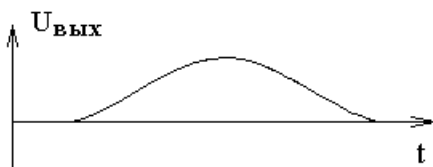


Для простоты анализа будем считать, что опорное напряжение принимает значения  $\pm 1$ . Тогда при перемножении с полезным сигналом отрицательные значения этого сигнала умножаются на  $-1$  и становятся положительными. В результате зависимость напряжения на выходе перемножителя, как функция времени, имеет следующий вид:



Здесь на фронтах опорных прямоугольников остаются острые пики к нулевому значению напряжения. Эти пики связаны с тем, что фронты опорных прямоугольников не бесконечно крутые, и когда фронт прямоугольника проходит через ноль, произведение опорного и сигнального напряжений тоже равно нулю.

Чтобы убрать пики отрицательной полярности после перемножителя сигнал пропускают через сглаживающую  $RC$ -цепочку. В результате напряжение на выходе схемы, как функция времени, имеет следующий вид:



Синхронное детектирование, как второй способ выделения огибающей полезного сигнала, имеет два преимущества по сравнению с первым способом.

1. Синхронное детектирование позволяет отличить просветление среды от затемнения среды. Эта возможность представляет интерес, так как при взаимодействии двух световых волн с двумя связанными переходами возможно

затемнение среды вместо ее просветления. Этот вопрос будет подробно обсуждаться в 4-ом варианте спектроскопии насыщения поглощения.

2. Синхронное детектирование позволяет получить более высокое отношение сигнал/шум путем уменьшения частотной полосы сигнала. Дело в том, что среднеквадратичное напряжение шумов пропорционально квадратному корню из частотной полосы сигнала  $U_{шумов} \sim \sqrt{\Delta f}$ . При синхронном детектировании полоса частот сигнала  $\Delta f$  связана с постоянной  $RC$ -цепочки на выходе системы регистрации (смотри рисунок)  $\Delta f = \frac{1}{2\pi RC}$ .

Увеличивая, например, емкость конденсатора  $C$ , можно неограниченно уменьшать полосу частот  $\Delta f$  и шумовое напряжение  $U_{шумов}$ . Правда при этом время регистрации сигнала увеличивается пропорционально постоянной времени  $RC$ .

При обычном детектировании сигнала уменьшение полосы частот нужно производить до детектирования, так как на диоде, как и на любом нелинейном элементе, сигналы разных частот перемешиваются. В результате  $RC$ -цепочка, расположенная после диода, не может эффективно уменьшать шумовое напряжение.

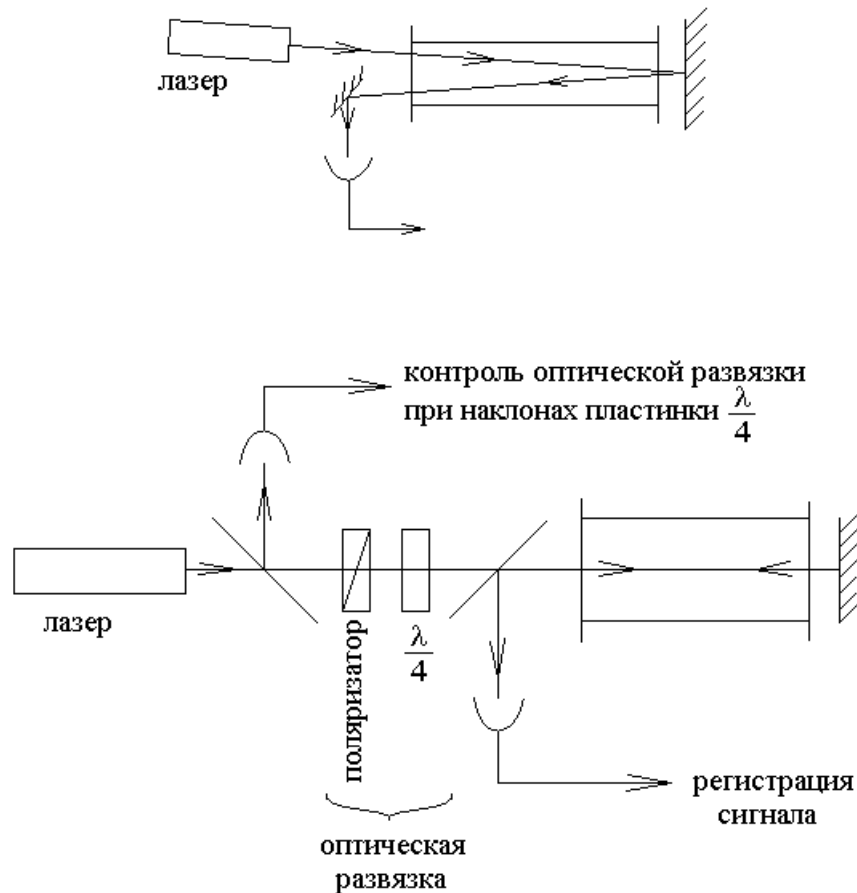
При обычном детектировании между приемником света и предложенной схемой детектирования ставят резонансный усилитель, который уменьшает полосу частот сигнала.

Уменьшение полосы частот пропускания резонансного усилителя затруднено тем, что при условии  $\Delta f \ll f_{рез}$  усилитель становится капризным. У такого усилителя случайным образом изменяются во времени (плавают) такие параметры, как резонансная частота  $f_{рез}$ , полоса частотного пропускания  $\Delta f$ , величина усиления на резонансной частоте. Все это может сильно затруднить регистрацию сигнала. Так частота модуляции  $f_1$  сильной световой волны может выйти за пределы полосы усиления резонансного усилителя  $|f_1 - f_{рез}| > \Delta f$ , и полезный сигнал пропадет. Это может произойти как в результате изменения параметров резонансного усилителя, так и в результате изменения частоты модуляции  $f_1$ , например, из-за изменения силы трения в моторе, вращающем прерыватель луча лазера 1.

## 2). Встречные волны одинаковой частоты.

Встречные волны одинаковой частоты используются в традиционном варианте спектроскопии насыщения поглощения. В этом случае встречную слабую световую волну получают в результате отражения от зеркала сильной волны, прошедшей кювету с исследуемым газом.

На нижеследующих рисунках приведены два варианта оптической схемы эксперимента.



Второй вариант оптической схемы имеет два приемника лазерного излучения. Сигнал насыщения поглощения регистрируется в излучении, падающем на нижний приемник. Верхний приемник служит для контроля качества оптической развязки.

Оптическая развязка или оптический диод представляет собой последовательно расположенные друг за другом поляризатор и пластинку  $\frac{\lambda}{4}$ .

Оси фазовой пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  и поляризатора ортогональны направлению лазерного луча. Фазовую пластинку поворачивают вокруг луча так, чтобы оси фазовой пластинки были направлены под углом  $45^\circ$  относительно оси поляризатора. В таком случае свет, пропущенный поляризатором, распадается на входе в фазовую пластинку на две световые волны с равными амплитудами и взаимно ортогональными поляризациями. На входе в фазовую пластинку эти две волны синфазны, а на выходе у них возникает оптическая разность хода  $\frac{\lambda}{4}$ , что соответствует разности фаз  $\frac{\pi}{2}$ . При сложении двух ортогональных колебаний с разностью фаз  $\frac{\pi}{2}$  образуется вращение. По этой причине после

прохождения пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  свет оказывается циркулярно поляризованным. При отражении от зеркала правая циркулярная поляризация света меняется на левую и наоборот. Отраженная назад волна после прохождения пластинки  $\frac{\lambda}{4}$  снова становится линейно поляризованной только в направлении ортогональном к направлению поляризации волны, идущей слева направо. Свет с поляризацией волны, идущей справа налево, не пропускает поляризатор оптической развязки. В результате свет свободно проходит через оптическую развязку слева направо и не проходит справа налево.

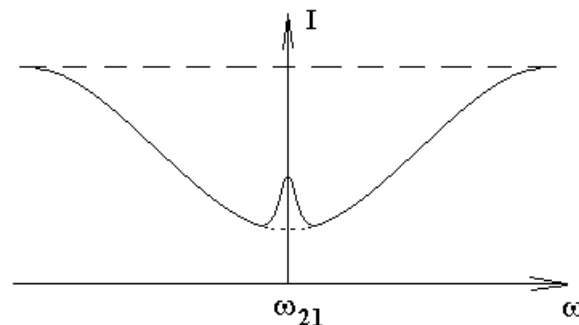
Оптическая развязка не пропускает отраженную назад световую волну обратно в резонатор лазера. Это нужно, потому что свет отраженный обратно в резонатор лазера сильно влияет на условия его генерации. Если отраженный свет оказывается в фазе со световой волной в резонаторе лазера, то мощность генерации возрастает, если в противофазе, то убывает. Если отраженный назад свет произвольным образом сдвинут по фазе относительно волны в резонаторе лазера, то он сдвигает фазу и частоту генерации лазера. Казалось бы, пропускание зеркала лазера мало, и обратно в резонатор лазера проникает свет с малой мощностью, но проблема в том, что когерентные световые волны складываются по амплитуде, а не по мощности. Так, если мощности складываемых волн отличаются в 10000 раз, то амплитуды отличаются только в 100 раз. В результате при синфазном сложении волн суммарная амплитуда составляет 101 процент от амплитуды сильной волны, а при противофазном сложении 99 процентов. Изменению амплитуды света в два процента соответствует изменение мощности в четыре процента. В этом состоит так называемый эффект гетеродинного приема слабого сигнала. Если не подавлять отраженный назад свет, то частота и мощность генерации лазера становятся неустойчивыми.

Верхний приемник второй оптической схемы предназначен для контроля качества оптической развязки. Качество хорошее, если свет на этот приемник не попадает. Тонкая настройка оптической развязки осуществляется поворотами и наклонами пластинки  $\frac{\lambda}{4}$ . Поворотом пластики вокруг оптической оси добиваются угла  $45^\circ$  между осью фазовой пластинки и осью поляризатора. Наклонами плоскости фазовой пластинки незначительно изменяют оптическую длину пути луча в фазовой пластинке. Изменению оптической длины луча соответствует изменение толщины фазовой пластинки, которую нужно подобрать так, чтобы фазовая пластинка в точности оказалась пластинкой  $\frac{\lambda}{4}$ .

Можно сделать оптическую развязку не только на основе пластинки  $\frac{\lambda}{4}$ , но и на основе эффекта Фарадея. Пусть свет проходит вдоль оси стеклянного цилиндра, и пусть вдоль оси этого цилиндра включено постоянное магнитное поле. Из-за эффекта Фарадея в магнитном поле  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  компоненты света (ось

квантования выбрана вдоль магнитного поля) будут иметь разную фазовую скорость. Пусть к торцам рассматриваемого цилиндра приклеены поляризаторы, так что между осями поляризаторов угол составляет  $45^\circ$ . После первого поляризатора свет на входе в цилиндр имеет линейную поляризацию. Свет линейной поляризации представляет собой сумму  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  компонент с одинаковыми амплитудами. Эти компоненты распространяются в цилиндре с разной фазовой скоростью и на выходе из цилиндра имеют некоторый взаимный фазовый сдвиг. При сложении  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  компонент с фазовым сдвигом получается линейно поляризованный свет, но поляризованный в другом направлении. Величину магнитного поля подбирают так, чтобы линейная поляризация света на выходе цилиндра составляла угол  $45^\circ$  по отношению к линейной поляризации на входе цилиндра. Так чтобы свет полностью проходил через поляризатор на выходе цилиндра. Если рассмотреть свет, идущий в обратном направлении, то после прохождения первого поляризатора компоненты  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  опять имеют разные фазовые скорости и на выходе цилиндра линейная поляризация света снова получит поворот на  $45^\circ$ . Поворот будет в ту же сторону, что и при прямом распространении света через цилиндр. В ту же сторону относительно магнитного поля, а не относительно направления света. В результате окажется, что поляризатор на выходе цилиндра не пропускает свет, идущий во встречном направлении. То есть цилиндр с магнитным полем вдоль оси и двумя поляризаторами под углом  $45^\circ$  играет роль оптической развязки.

Мощность лазерного излучения дважды прошедшего кювету с исследуемым газом  $I$ , как функция частоты лазера  $\omega$ , имеет следующий вид:



Здесь  $\omega_{21}$  — центр линии поглощения среды. Зависимость мощности света на приемнике от частоты лазера имеет широкий провал доплеровской линии поглощения, в центре которого находится узкий пик просветления среды. Пик просветления — это и есть резонанс насыщения поглощения.

Резонанс формируется при симметричном расположении частот встречных световых волн относительно частоты поглощающего перехода  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$ . В рассматриваемом случае частоты встречных волн одинаковы  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Следовательно, условие резонанса преобразуется к виду  $\omega = \omega_{21}$ .

Ширина наблюдаемого резонанса  $\Delta\omega = \Gamma(1 + \sqrt{1 + G_1})$  оказывается вдвое меньше, чем ширина резонанса в случае, когда одна из световых волн фиксирована по частоте.

Резонанс в коэффициенте поглощения слабой волны получается, как результат свертки провала Беннетта в разности заселенностей уровней и сечения поглощения слабой волны. При изменении частоты генерации лазера провал Беннетта и сечение поглощения как бы наезжают по лучевой скорости молекул навстречу друг другу. Одновременное движение навстречу уменьшает вдвое ширину свертки.

-----