

Факультативно. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2 , и для каждого из них выполнены граничные условия. Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ соответствующие этим двум решениям для потенциала. Покажем, что для тождественности φ_1 и φ_2 достаточно доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$. Это равенство эквивалентно равенству $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке границы выполнено условие $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$. Откуда следует, что в этой точке границы некоторая функция равная разности решений равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$. И так, производная этой функции во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а сама функция равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$ хотя бы в одной точке. Тогда функция во всех точках объема равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_V = 0$ или $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$, и два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Докажем теперь равенство $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ для всех точек объема, и теорема о единственности решения для потенциала φ будет доказана. С этой целью докажем два равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) \\ \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0 \end{array} \right. .$$

Если мы их докажем, то получим $\int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = 0$ или

$$\int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV = 0, \text{ то есть } \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0 \text{ в каждой точке объема.}$$

Докажем сначала первое равенство системы.

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) dV \quad - \text{ по теореме}$$

Гаусса — Остроградского для векторного поля $(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV = \int_V (\vec{\nabla}, (\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV =$$

Левая набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как

производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$\begin{aligned}
 &= \int_V \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV = \\
 &= \int_V \left(\vec{\nabla}\varphi_1 - \vec{\nabla}\varphi_2, \vec{\nabla}\varphi_1 - \vec{\nabla}\varphi_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\
 &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\
 &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \cdot dV = \\
 &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (-4\pi\rho - (-4\pi\rho)) \cdot dV = \\
 &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV .
 \end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0 .$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду.

Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned}
 &\left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = \\
 &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right)_{d\vec{S}} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right)_{\vec{n}} \cdot dS = \\
 &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS
 \end{aligned}$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 ,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

$$1. \text{ Рассмотрим доказательство равенства } \oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$$

для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ в любой точке границы S .

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0 \Rightarrow$ Первый сомножитель $(\varphi_1 - \varphi_2)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи Неймана.}$$

В краевой задаче Неймана $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_S$, следовательно, на поверхности

S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи с границами в виде проводников.}$$

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\varphi|_{S_i} = \text{const}_i$, где S_i — поверхность i -го проводника границы, если граница многосвязная.

Тогда $(\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_i} = \text{const}_i$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i -го проводника:

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS \end{aligned}$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2) \cdot dS = \\ &= 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\oint_{S_i} \sigma_2 dS - \oint_{S_i} \sigma_1 dS \right) = 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (Q_{2i} - Q_{1i}). \end{aligned}$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i -ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ будет выполнено для каждой границы, так как в}$$

краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0$ доказано для

краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

Факультативно. К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.

Дифференциальное уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ с заданным потенциалом на границе $\varphi|_S$ можно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения задачи доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле в электростатике всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют, если объем бесконечен. Если объем ограничен, то в этих задачах решение существует не всегда, а только при некоторых ограничениях на граничные условия на внешней границе объема.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода в одномерном случае:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' + f(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, для которой составлено уравнение; λ — параметр уравнения (константа); $K(x, x')$ — ядро уравнения.

$$\int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' = f(x) \text{ — уравнение Фредгольма 1 рода.}$$

Экзамен. Основные свойства проводников в электростатическом поле.

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля \vec{E} течет электрический ток.

Свойства проводников.

1. $\vec{E}_{внутри} = 0$ — поле \vec{E} внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри} \neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем электрический ток.

$$2. \quad 0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla} \varphi_{внутри} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{внутри} = const \quad - \text{каждый}$$

проводник в электростатике эквипотенциален.

$$3. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\rho_{внутри} = \operatorname{div}(\vec{E}_{внутри}) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \rho_{внутри} = 0 \Rightarrow$$

В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

$$4. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad E_n = 4\pi\sigma \quad - \text{нормальная составляющая}$$

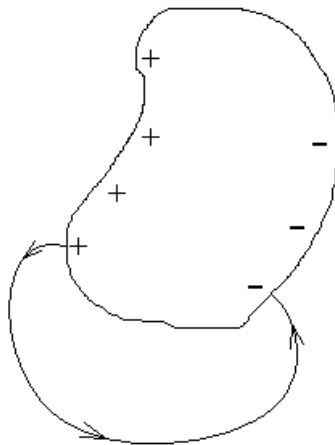
поля \vec{E} над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ , где \vec{n} — нормаль, направленная из проводника наружу.

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad E_\tau = 0 \quad - \quad \text{тангенциальная}$$

составляющая поля \vec{E} над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля \vec{E} начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля \vec{E} потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

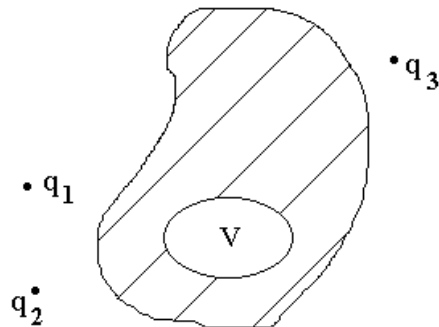
Невозможно:



Экзамен. Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но хуже. Постоянное магнитное поле полностью экранировать может только сверхпроводник. Переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле и наоборот. Если же магнитное поле изменяется с низкой частотой, то оно проникает внутрь проводника и порождает в нем переменное электрическое поле той же частоты, что и магнитное поле.

Экранирование электростатического поля состоит в том, что если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E} = 0$ независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0 . Тогда $\varphi|_S = \varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi|_S = \varphi_0$. Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ в объеме V , так как в этом объеме нет зарядов: $\rho = 0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi = 0$.

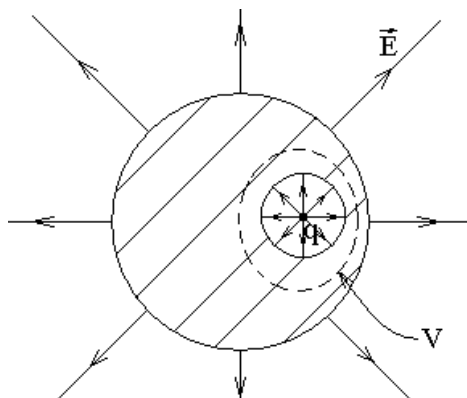
Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$$\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0 = const \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0$$

Внутри полости поле \vec{E} отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

Факультативно. Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле \vec{E} везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V . Все точки поверхности S находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле \vec{E} . Тогда и поток поля \vec{E} через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. С учетом теоремы Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$. Тогда $Q = 0$, сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Внутри объема проводника в электростатике зарядов нет. Следовательно, если в полости заряд q , то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q .

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V . В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q . Граница объема — это поверхность проводника, на которой задан полный заряд $Q = -q$. Ни в одной точке границы не задан потенциал, поэтому задача о потенциале в объеме полости имеет единственное решение с точностью до неизвестного слагаемого. Задача сферически симметрична. Поэтому поле в объеме полости можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда $E = \frac{q}{r^2}$.

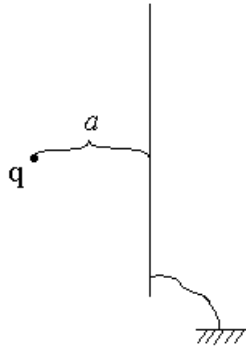
Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q , и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение — поле точечного заряда $E = \frac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле \vec{E} снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

Экзамен. Метод изображений 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

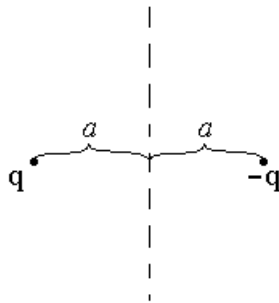
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q , расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a . Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говорится, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на опыте можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V , в котором ищут решение для потенциала. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поле \vec{E} и поле φ в левой половине пространства — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.