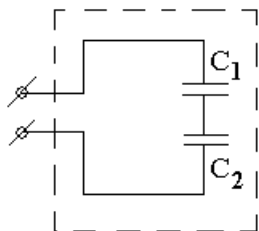


Экзамен. Электрическая емкость параллельного и последовательного соединения конденсаторов (продолжение).

Рассмотрим теперь последовательное соединение двух конденсаторов.



При последовательном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 + U_2 \\ q = q_1 = q_2 \end{cases}$. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные емкости. Аналогично для большего числа последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}, \text{ где } C \text{ — емкость при последовательном соединении}$$

конденсаторов.

Экзамен. Энергия взаимодействия зарядов.

Рассмотрим пару зарядов:



Рассмотрим энергию второго заряда в поле первого заряда:

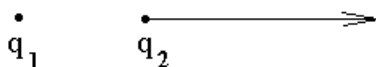
$$W_2 = q_2 \varphi_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}}.$$

Найдем теперь энергию первого заряда в поле второго:

$$W_1 = q_1 \varphi_1 = q_1 \frac{q_2}{r_{12}}.$$

Энергии равны $W_1 = W_2$. Возникает вопрос. Это две разные энергии или одна и та же?

Рассмотрим мысленный опыт:



Пусть первый заряд остается неподвижным, а второй заряд медленно уносят на бесконечность.

В этом процессе энергия первого заряда в поле второго изменяется от значения $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ до нуля, но работа над зарядом q_1 не совершается, так как он остается неподвижным.

По закону изменения энергии работа равна изменению энергии. Чтобы избежать противоречия нужно считать, что энергия $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ не принадлежит ни одному, ни другому заряду, а принадлежит сразу двум зарядам в том смысле, что работа над любым из двух зарядов изменяет эту энергию. Чтобы подчеркнуть эту особенность энергию $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ называют "энергией взаимодействия".

Для энергии взаимодействия удобна симметричная запись:

$$W = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2).$$

Рассмотрим теперь систему зарядов $\{q_i\}$.

Сила, действующая на каждый заряд, равна сумме сил парных взаимодействий этого заряда с каждым из остальных. При перемещении этого заряда работа электрических сил тоже будет равна сумме работ парных взаимодействий. Тогда и энергия $q_i \varphi_i$ заряда q_i в точке с потенциалом φ_i равна сумме энергий его парных взаимодействий.

Рассмотрим сумму энергий $q_i \varphi_i$ по всем зарядам $\sum_i q_i \varphi_i$. В этой сумме энергия взаимодействия каждой пары зарядов просуммирована дважды: один раз как энергия одного заряда из пары и второй раз как энергия второго заряда. Следовательно, энергия взаимодействия системы зарядов вдвое меньше этой суммы энергий всех зарядов.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \text{ — энергия взаимодействия системы зарядов, где } \varphi_i \text{ —}$$

потенциал в точке расположения i -ого заряда, создаваемый остальными зарядами системы.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV.$$

В системе СИ оба выражения для энергии такие же, как в системе СГС Гаусса.

Экзамен. Энергия электрического поля.

Для неподвижных зарядов энергия электрического поля — это то же самое, что и энергия взаимодействия зарядов. Для движущихся зарядов

формула для энергии взаимодействия зарядов не верна, но формула для энергии поля, как предполагают, справедлива и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E}) dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi (\vec{\nabla}, \vec{E}) dV.$$

Здесь набла $\vec{\nabla}$ — это производная. Возьмем последний интеграл по частям, перебросив производную с одного сомножителя (\vec{E}) на другой (φ):

$$\frac{1}{8\pi} \int_V \varphi (\vec{\nabla}, \vec{E}) dV = \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi (\vec{E}, d\vec{S}) - \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{\nabla} \varphi, \vec{E}) dV.$$

Здесь первое слагаемое — это внеинтегральный член, просуммированный по краям области интегрирования, при этом сохранена векторная форма скалярного произведения. Второе слагаемое имеет прежнюю векторную форму, но производная берется от другого сомножителя. Доказательство справедливости этого интегрирования по частям в трехмерном пространстве оставим математикам.

Подставим во второй интеграл $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ и получим:

$$W = \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi (\vec{E}, d\vec{S}) + \int_V \frac{E^2}{8\pi} dV.$$

Устремим объем к бесконечности. Мы можем это сделать, так как исходный интеграл $\int_V \varphi \rho dV$ можно брать по любому объему, который охватывает все заряды. Чуть позднее докажем, что поверхностный интеграл стремится к нулю при стремлении объема интегрирования к бесконечности. Тогда

$$W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV \text{ — энергия электрического поля.}$$

$$w \equiv \frac{dW}{dV} \text{ — определение объемной плотности энергии. Тогда}$$

$$w = \frac{E^2}{8\pi} \text{ — объемная плотность энергии электрического поля.}$$

$$\text{В системе СИ } w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

$$\underline{\underline{\text{Факультативно. } \oint_S \varphi (\vec{E}, d\vec{S}) \rightarrow 0 \text{ при } V \rightarrow \infty.}}$$

$$\text{Докажем, что } \oint_S \varphi (\vec{E}, d\vec{S}) \rightarrow 0 \text{ при } V \rightarrow \infty.$$

Пусть S - большая сфера, радиус которой гораздо больше расстояний между зарядами. И выберем положение сферы так, чтобы все заряды оказались

вблизи центра сферы. Тогда для наблюдателя на поверхности сферы все распределение зарядов выглядит как один точечный заряд. \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \approx \frac{Q}{r} \\ E \approx \frac{Q}{r^2} \end{array} \right\}.$$

Откуда, с учетом того что векторы \vec{E} и $d\vec{S}$ почти параллельны в каждой точке поверхности, получаем

$$\oint_S \varphi(\vec{E}, d\vec{S}) \approx \oint_S \varphi E dS \approx \oint_S \frac{Q}{r} \frac{Q}{r^2} dS = \frac{Q^2}{r^3} \oint_S dS = \frac{Q^2}{r^3} 4\pi r^2 = \frac{4\pi Q^2}{r} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0$$

Что и требовалось доказать.

Факультативно. Рассмотрим парадокс.

Если $q_1 q_2 < 0$, то $W = \frac{q_1 q_2}{r} < 0$. Это с одной стороны. А с другой стороны, если $\frac{E^2}{8\pi} > 0$, то $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV > 0$. С одной стороны энергия W получилась отрицательная, а с другой стороны — положительная. Противоречие.

При выводе второй формулы для энергии $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ мы

воспользовались равенством

$$\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2} \int_V \varphi dq,$$

которое на самом деле не выполняется. Причина неравенства в том, что φ_i — потенциал в точке расположения i -го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами кроме i -го заряда, а φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами.

В результате выражение $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$ не содержит энергию взаимодействия каждого заряда с самим собой. Учесть эту энергию для точечных зарядов невозможно, потому что она бесконечная.

И действительно, рассмотрим энергию поля одного точечного заряда q по формуле $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$. Покажем, что энергия в этой формуле бесконечна.

Будем считать, что точечный заряд представляет собой заряженную сферу радиусом R . Найдем энергию поля в виде интеграла $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$, и

устремим в полученном выражении радиус сферы R к нулю. Внутри сферы с радиусом R поле \vec{E} равно нулю и интеграл по области $r < R$ можно не брать.

$$W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV = \int_R^\infty \frac{1}{8\pi} \left(\frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty = \frac{q^2}{2R} \Rightarrow$$

$$W = \frac{q^2}{2R} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \infty$$

Эту же формулу $W = \frac{q^2}{2R}$ для энергии заряженной сферы можно получить

не только из формулы $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$, но и из формулы $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$. Для

этого мысленно разобьем заряд сферы q на много зарядов q_i . Все эти заряды будут под одним и тем же потенциалом заряженной сферы $\varphi = \frac{q}{R}$. Этот

потенциал можно вынести за знак суммы $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$. Под знаком суммы

останется сумма зарядов q_i равная q .

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi = \frac{\varphi}{2} \sum_i q_i = \frac{\varphi}{2} q = \frac{q^2}{2R}.$$

Энергия заряженной сферы одинаково стремится к бесконечности по формуле $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$ и по формуле $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ при стремлении радиуса сферы к нулю. Точечный заряд обладает бесконечной энергией взаимодействия друг с другом его частей.

Если же мы рассмотрим, например, заряженную сферу, как один точечный заряд, то в выражении $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$ будет только одно слагаемое, и

потенциал φ в этом слагаемом равен нулю, так как это потенциал поля остальных зарядов, которых нет. То есть для одного точечного заряда по

формуле $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$ получаем $W = 0$, а по формуле $W = \int_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ получаем

$W = \infty$.

Факультативно. Электрон — точечный заряд.

Согласно современным представлениям протоны и нейтроны состоят из кварков, а электроны не имеют структуры и, казалось бы, должны быть точечными объектами.

Точечный заряд должен иметь бесконечную энергию электрического поля, а, следовательно, и бесконечную массу $W = mc^2$.

Масса электрона конечна, отсюда можно найти радиус электрона. Приравняем электрическую энергию заряженной сферы к энергии покоя электрона и получим радиус электрона:

$$\frac{e^2}{2r_e} = m_e c^2 \quad \Rightarrow$$

$$r_e = \frac{e^2}{2m_e c^2} \text{ — электростатический радиус электрона, } e \text{ — модуль заряда}$$

электрона, m_e — масса покоя электрона. Обычно вместо величины r_e рассматривают вдвое большую величину $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$, которую называют классическим радиусом электрона.

В системе СИ $r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 10^{-15}$ м, что примерно в 10 раз меньше радиуса атомного ядра.

Для сравнения $r_g = \frac{2\gamma m_e}{c^2} \approx 10^{-57}$ м — гравитационный радиус электрона или радиус сферы Шварцшильда для объекта с массой электрона. Время на сфере Шварцшильда останавливается. Если электрон сжать до шара с таким радиусом, то он превратится в черную дыру.

Как же выйти из полученного противоречия, что с одной стороны электрон — точечный объект, а с другой стороны его масса не бесконечна?

Дело в том, что вокруг электрона постоянно рождаются на короткое время и пропадают электрон-позитронные пары. В каждой такой паре позитрон с большей вероятностью будет ближе к исходному электрону, чем новый электрон рожденной пары. Поле внутри рожденной пары направлено навстречу полю исходного электрона. По этой причине в малой окрестности электрона напряженность поля возрастает при приближении к электрону медленнее, чем $\frac{q}{r^2}$, и интеграл от квадрата напряженности по объему оказывается не бесконечной величиной.

Обсуждая такие малые длины, нужно указать, что минимальной возможной длиной считается планковская длина. Это длина, на которой квантовые флуктуации кривизны пространства настолько велики, что само пространство теряет смысл. Если рассмотреть черную дыру очень малого радиуса, такого что радиус черной дыры $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ будет равен длине волны де

Бройля $\lambda = \frac{h}{mc}$ для этой черной дыры, где в выражении для длины волны де

Бройля скорость движения черной дыры V заменили скоростью света c , то, исключая массу из равенства $\frac{2Gm}{c^2} = \frac{h}{mc}$, получим $\lambda = r_g = \sqrt{\frac{2Gh}{c^3}}$. Планковская длина по определению чуть меньше этой длины:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616\ 229(38) \cdot 10^{-35} \text{ м.}$$

Факультативно. Электростатическая энергия заряженного проводника и системы проводников.

Рассмотрим энергию взаимодействия зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i.$$

Все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал. Если просуммировать эти слагаемые для k -го проводника, то получим $Q_k \varphi_k$, где φ_k — потенциал k -го проводника, Q_k — полный заряд на k -ом проводнике.

Тогда вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i \text{ — энергия электростатического взаимодействия системы}$$

проводников, где i — номер проводника, Q_i — заряд i -ого проводника, φ_i — потенциал i -ого проводника. В системе СИ формула выглядит также.

Для одного проводника получаем

$$W = \frac{Q\varphi}{2}.$$

В частности для проводящего шара, как и для проводящей сферы, $\varphi = \frac{Q}{R}$

$$\Rightarrow W = \frac{Q^2}{2R}.$$

Экзамен. Энергия заряженного конденсатора.

Конденсатор — это два проводника. Просуммируем выражение для энергии $W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i$ по этим двум проводникам:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} (q\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}.$$

Это выражение можно заменить на эквивалентные выражения с учетом соотношения $C \equiv \frac{q}{U}$:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Все три выражения справедливы и в системе СИ. Последнее выражение проще запомнить:

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Электрический диполь.

Экзамен. Потенциал поля точечного диполя.

Издали любое распределение зарядов выглядит, как один точечный заряд $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r}$. Здесь начало координат выбрано где-то вблизи зарядов, \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения потенциала. К этому выражению можно сделать поправки в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{f_2(\theta, \varphi)}{r^2} + \frac{f_3(\theta, \varphi)}{r^3} + \frac{f_4(\theta, \varphi)}{r^4} + \frac{f_5(\theta, \varphi)}{r^5} + \dots$$

Слагаемые этого ряда имеют названия: потенциал точечного заряда, потенциал точечного диполя, потенциал точечного квадруполь, потенциал точечного октуполя, потенциал точечного гексадекаполя и т. д.

Точное выражение для потенциала имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Найдем первые два слагаемых разложения этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$.

$|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i| \Rightarrow \frac{\vec{r}_i}{r}$ — безразмерный малый параметр задачи. Найдем отрезок ряда Тейлора по степеням \vec{r}_i и автоматически получим требуемое разложение по $\frac{1}{r}$.

Разложение в ряд Тейлора функции в трехмерном пространстве проведем аналогично разложению функции с одномерным аргументом.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = f(0) + x \cdot \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} + \dots \\ x \rightarrow \vec{r}_i \\ f(x) \rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \Big|_{\vec{r}_i=0} \right)$$

Здесь $\vec{\nabla}_i$ - производная по координатам вектора \vec{r}_i .

Докажем, что для любой функции $f(\vec{r} - \vec{r}_i)$ от разности векторов $(\vec{r} - \vec{r}_i)$ справедливо следующее соотношение:

$$\vec{\nabla}_i f(\vec{r} - \vec{r}_i) = -\vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

И действительно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{r} - \vec{r}_i) &= \frac{\partial f(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\partial(x - x_i)} \cdot \frac{\partial(x - x_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial f(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\partial(x - x_i)} \\ \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r} - \vec{r}_i) &= \frac{\partial f(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\partial(x - x_i)} \cdot \frac{\partial(x - x_i)}{\partial x} = +\frac{\partial f(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\partial(x - x_i)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla}_i = -\vec{\nabla}$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \Big|_{\vec{r}_i=0} \right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \Big|_{\vec{r}_i=0} \right) \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right).$$

Найдем $\vec{\nabla} \frac{1}{r}$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{r} \\ \vec{E} &= q \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow q \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \frac{q}{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Подставим это выражение в разложение $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ по степеням \vec{r}_i :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}_i, \vec{r})}{r^3}$$

Подставим это разложение в выражение для потенциала:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \approx \sum_i q_i \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}_i, \vec{r})}{r^3} \right) = \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{\left(\sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{r} \right)}{r^3} = \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

Здесь введено обозначение

$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i \text{ - дипольный момент распределения зарядов.}$$

Тогда $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$, где $\frac{Q}{r}$ - потенциал заряда, $\frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$ - потенциал

диполя.

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} \text{ — потенциал точечного диполя.}$$

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ — определение дипольного момента системы зарядов $\{q_i\}$.

В системе СИ: $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$.