Экзамен. Два способа вычисления электростатического потенциала φ, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление потенциала связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{q}{r}$ и получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho'(\vec{r}\,') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \oint_{S'} \frac{\sigma'(\vec{r}\,') \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

(в системе СИ умножить на $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

2-ой способ — вычисление потенциала молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$ и получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

(в системе СИ $\quad \varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_{V'} \frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$)

Оба интегральных выражения для потенциала имеют особую точку при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$, в которой знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. Эта особая точка является интегрируемой особенностью. И действительно, если сделать замену переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на переменную $\vec{r}_0 = \vec{r}\,' - \vec{r}$, то в окрестности особой точки получим:

$dV' = 4\pi r_0^2 dr_0 \quad$ и $\quad dS' = 2\pi r_0 dr_0$.

Тогда после сокращения r_0 в знаменателе и числителе подынтегральных выражений особая точка пропадает. В этом смысле рассматриваемая особая точка — интегрируемая особая точка.

Факультативно. Два способа вычисления электростатического поля *E*, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление напряженности поля связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \rho'(\vec{r}\,') \cdot dV' + \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \sigma'(\vec{r}\,') \cdot dS'$$

(в системе СИ умножить на $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

Особая точка в интеграле по объему — интегрируемая особенность, которая пропадает при замене переменной интегрирования, а особая точка в интеграле по поверхности — это неинтегрируемая особенность. Причина этого в том, что при условии $\vec{r}\,'=\vec{r}$ точка наблюдения находится на поверхности со связанными зарядами, а напряженность поля $\vec{E}$ испытывает скачок при переходе через заряженную поверхность. То есть, поле $\vec{E}$ не имеет определенного значения на заряженной поверхности диэлектрика.

2-ой способ — вычисление напряженности поля молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\vec{E}=3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}-\frac{4}{3}\pi\cdot\vec{p}\cdot\delta(\vec{r})$, заменим здесь $\vec{r}\to(\vec{r}-\vec{r}\,')$ и $\vec{p}\to\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot dV'$, просуммируем поле $\vec{E}$ по диполям всего объема $\int\limits_{V'}\bullet$ и получим поле $\vec{E}$ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r})=\int\limits_{V'}\left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}-\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)\cdot dV'-\frac{4}{3}\pi\cdot\int\limits_{V'}\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot dV'$$

$$=> \quad \vec{E}(\vec{r})=\int\limits_{V'}\left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}-\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)\cdot dV'-\frac{4}{3}\pi\cdot\vec{P}(\vec{r})$$

(в системе СИ умножить на $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

Здесь интеграл содержит неинтегрируемую в обычном смысле особую точку. Но интеграл по объему имеет определенное значение, если рассматривать интеграл в смысле главного значения. В окрестности особой точки мысленно вырезают шар с малым радиусом r_0 и с центром в особой точке. В объеме без этого шара интеграл берется и имеет определенное значение. Интеграл в смысле главного значения — это предел, к которому стремится интеграл по объему без шара при стремлении радиуса шара к нулю.

Экзамен. Вектор электрической индукции или электрического смещения.

$\vec{D}\equiv\vec{E}+4\pi\vec{P}$ — определение вектора электрической индукции или электрического смещения.

В СИ: $\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

Рассмотрим дивергенцию поля $\vec{D}$:

$$div\left(\vec{D}\right)=div\left(\vec{E}+4\pi\vec{P}\right)=div\left(\vec{E}\right)+4\pi\cdot div\left(\vec{P}\right)=4\pi(\rho+\rho')+4\pi\cdot(-\rho')=4\pi\rho$$

$$=> \quad div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho$$

Аналогичные выражения можно получить в интегральной форме $\Phi_D=4\pi Q$ и для границы раздела сред $D_{2n}-D_{1n}=4\pi\sigma$. Здесь величины ρ,Q,σ относятся только к свободным зарядам.

В СИ: $div\left(\vec{D}\right)=\rho$

Четыре основных формулы для диэлектриков в трех формах:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi\left(Q + Q'\right) \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\left(\sigma + \sigma'\right) \end{cases}$$

В этих формулах, как и обычно, нормаль к границе раздела направлена из объема 1 в объем 2: $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

В системе СИ: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho + \rho'\right) \\ div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{cases}$

Экзамен. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды.

$\vec{P} \equiv \chi \vec{E}$ — определение χ — диэлектрической восприимчивости среды.

В системе СИ: $\vec{P} \equiv \varepsilon_0 \chi \vec{E}$.

Связь величин $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не всегда линейна, но для линейной связи можно ввести диэлектрическую восприимчивость среды.

В кристаллах χ — матрица или тензор второго ранга.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \text{ или } P_i = \sum_k \chi_{ik} E_k .$$

Тензор диэлектрической восприимчивости — симметричный тензор (без доказательства):

$\chi_{ik} = \chi_{ki}$.

$\vec{D} \equiv \varepsilon \vec{E}$ — определение ε — диэлектрической проницаемости среды.

$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi\vec{E} = \left(1 + 4\pi\chi\right)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$ =>

$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ — связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды.

$\chi = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}$, откуда $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$

$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, так как $\chi_{ik} = \chi_{ki}$

В системе СИ: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \\ \varepsilon = 1 + \chi \end{cases}$

<u>Факультативно. Связанные заряды обычно присутствуют только на поверхности диэлектрика.</u>

$$\rho' = -div\left(\vec{P}\right) = -div\left(\chi\vec{E}\right)$$

Внутри однородного диэлектрика $\chi = const$ и эту константу можно вынести за знак производной:

$$\rho' = -div\left(\chi\vec{E}\right) = -\chi \cdot div\left(\vec{E}\right) = -\chi \cdot 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \quad => \quad \rho' = -\chi \cdot 4\pi\left(\rho + \rho'\right)$$

$$=> \quad \rho' = -\frac{4\pi\chi}{1 + 4\pi\chi}\rho$$

Если диэлектрик однородный и в объеме диэлектрика нет свободных зарядов $\rho = 0$, то нет и связанных $\rho' = 0$.

<u>Экзамен. Алгоритм решения симметричных задач с диэлектриками.</u>

Алгоритм решения задач:

$$\Phi_D = 4\pi Q \quad => \quad DS = 4\pi Q \quad => \quad D = \frac{4\pi Q}{S} \quad => \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \quad =>$$

$$\begin{cases} \vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E} & => \quad \sigma' = -\left(P_{2n} - P_{1n}\right) \\ \varphi\left(\vec{r}\right) = \displaystyle\int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl & \end{cases}$$

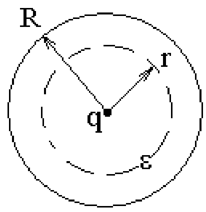
<u>Экзамен. Простейшие задачи с диэлектриками 1. Сферическая симметрия.</u>

Рассмотрим задачу. Дан диэлектрический шар с проницаемостью ε и радиусом R. В центре шара находится точечный заряд q.

Найти: $\vec{D}, \vec{E}, \varphi, \vec{P}, \sigma'$.

Решение.

В соответствии с симметрией задачи рассмотрим пунктирную сферу с произвольным радиусом r, центр которой совпадает с центром диэлектрического шара. Применим электростатическую теорему Гаусса $\Phi_D = 4\pi Q$ для поверхности выбранной сферы.



Из симметрии задачи следует, что вектор электрической индукции $\vec{D}$ направлен по радиусу в любой точке пространства, и во всех точках пунктирной сферы вектор $\vec{D}$ имеет одинаковую длину. Тогда

$\Phi_D = 4\pi Q$ => $DS = 4\pi q$ => $D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$ =>

$D = \dfrac{q}{r^2}$ (в системе СИ умножить на $\dfrac{1}{4\pi}$)

Этот вывод справедлив и в том случае, если $r \le R$, и в том случае, если $r \ge R$.

Найдем теперь вектор $\vec{E}$ из равенства $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

$E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ - внутри диэлектрического шара при $r < R$,

$E = D = \dfrac{q}{r^2}$ - снаружи диэлектрического шара при $r > R$.

Найдем теперь потенциал φ сначала снаружи шара при $r \ge R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E\,dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = q \cdot \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{r} \quad =>$$

$\varphi = \dfrac{q}{r}$ при $r \ge R$.

Теперь найдем потенциал внутри диэлектрического шара.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E\,dr = \int_r^{R} E\,dr + \int_R^{\infty} E\,dr = \int_r^{R} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{q}{\varepsilon} \cdot \int_r^{R} \frac{dr}{r^2} + \frac{q}{R} = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R}$$

$\varphi(\vec{r}) = \dfrac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R} \right) + \dfrac{q}{R}$ при $r \le R$.

Найдем теперь поляризацию среды $\vec{P}$.

$\vec{P} = \chi \vec{E} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$ =>

$P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ при $r < R$ и $P = 0$ при $r > R$.

И, наконец, найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрического шара.

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$

Пусть объем 1 — диэлектрик, а объем 2 — вакуум, тогда

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = P_{1n} = P(R) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{q}{\varepsilon R^2}$$

Повторим ответы:

$D = \dfrac{q}{r^2}$ внутри и снаружи шара, (в СИ $\cdot \dfrac{1}{4\pi}$)

$E = \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ при $r < R$, $E = \dfrac{q}{r^2}$ при $r > R$, (в СИ $\cdot \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

$\varphi = \dfrac{q}{R} - \dfrac{q}{\varepsilon R} + \dfrac{q}{\varepsilon r}$ при $r \le R$, $\varphi = \dfrac{q}{r}$ при $r \ge R$, (в СИ $\cdot \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

$P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{r^2}$ при $r < R$, $P = 0$ при $r > R$, (в СИ — также)

$\sigma' = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{R^2}$. (в СИ — также)

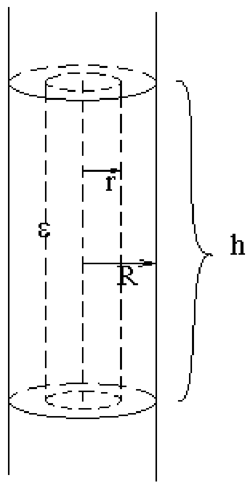
Экзамен. Простейшие задачи с диэлектриками 2. Цилиндрическая симметрия.

Рассмотрим задачу. Дан бесконечный диэлектрический цилиндр с диэлектрической проницаемостью ε, радиусом R. На оси цилиндра расположена заряженная нить с линейной плотностью заряда τ.

Найти: E, D.

Решение.

Рассмотрим поток вектора $\vec{D}$ через поверхность цилиндра длиной h радиусом r. Ось цилиндра совпадает с осью симметрии задачи.



По теореме Гаусса:

$\Phi_D = 4\pi Q$.

Из симметрии задачи поток через донышки цилиндра отсутствует. Остается поток через боковую поверхность цилиндра:

$DS = 4\pi\tau h$ => $D \cdot 2\pi rh = 4\pi\tau h$ => $D = \dfrac{2\tau}{r}$ (в СИ $\cdot\dfrac{1}{4\pi}$)

Это выражение справедливо и внутри $r < R$ и снаружи $r > R$ диэлектрического цилиндра. Вектор $\vec{D}$ направлен в плоскости перпендикулярной оси цилиндра и в этой плоскости направлен по радиусу окружности сечения цилиндра.

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ =>

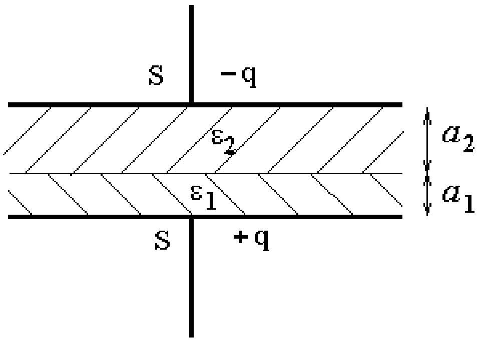
$E = \dfrac{2\tau}{\varepsilon r}$ при $r < R$, $E = \dfrac{2\tau}{r}$ при $r > R$. (в СИ $\cdot\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$)

Экзамен. Простейшие задачи с диэлектриками 3. Плоская симметрия.

Рассмотрим задачу. Плоский конденсатор заполнен двумя тонкими слоями диэлектрика. Один слой имеет проницаемость ε_1 и толщину a_1, другой — ε_2, a_2. Площадь пластин S.

Найти емкость конденсатора: C=?

Решение.



Поместим на одну пластину заряд q, на другую поместим заряд $-q$.

Заметим, что внутри пластины проводника поле $\vec{D} = 0$, так как по определению электрической индукции $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, а в проводнике $\vec{E} = 0$ и $\vec{P} = 0$. $\vec{P} = 0$, так как в проводнике нет связанных зарядов.

Из симметрии задачи вектор $\vec{D}$ направлен перпендикулярно пластинам. Над пластинами у вектора $\vec{D}$ есть только нормальная составляющая. Граничное условие для нормальной составляющей вектора $\vec{D}$ имеет вид:

$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$,

где $D_{1n} = 0$, если объем 1 - проводник; σ - поверхностная плотность свободных зарядов на поверхности проводника. Тогда

$D_{2n} = D = 4\pi\sigma = 4\pi\dfrac{q}{S}$ => $D = 4\pi\dfrac{q}{S}$ - значение вектора электрической индукции одинаковое в обоих слоях диэлектрика.

С учетом $E = \dfrac{D}{\varepsilon}$ получаем:

$$E_1 = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1 S} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{4\pi q}{\varepsilon_2 S}$$

При вычислении напряжения между пластинами конденсатора проинтегрируем напряженность вдоль линии перпендикулярной пластинам и получим:

$$U = \int_1^2 E_l dl = \int_1^2 E\, dl = E_1 a_1 + E_2 a_2 = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1 S} a_1 + \frac{4\pi q}{\varepsilon_2 S} a_2 = \frac{4\pi q}{S} \cdot \left(\frac{a_1}{\varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon_2} \right) \qquad =>$$

$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{4\pi q}{S} \cdot \left(\frac{a_1}{\varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon_2} \right)} = \frac{S}{4\pi \cdot \left(\frac{a_1}{\varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon_2} \right)}$$

Ответ: $C = \dfrac{S}{4\pi \left(\frac{a_1}{\varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon_2} \right)}$.

В системе СИ емкость умножается на $4\pi\varepsilon_0$, тогда получаем: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\frac{a_1}{\varepsilon_1} + \frac{a_2}{\varepsilon_2}}$.

Факультативно. Единственность решения краевой задачи электростатики в присутствии диэлектриков.

$$div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \qquad => \qquad div\left(\varepsilon \vec{E}\right) = 4\pi\rho .$$

Подставим сюда $\vec{E} = -grad(\varphi)$ и получим

$$div\left(\varepsilon \cdot grad(\varphi)\right) = -4\pi\rho \qquad \text{или} \qquad \left(\vec{\nabla}, \varepsilon \vec{\nabla} \varphi\right) = -4\pi\rho$$

Здесь ρ — плотность свободных зарядов. Это и есть дифференциальное уравнение для потенциала в присутствии диэлектриков.

Краевая задача. Рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет единственное решение в некотором объеме V, если на границе объема задано одно из 4-х условий: условие Дирихле, условие Неймана, условие с границами в виде проводников, условие общего вида. Это — те же граничные условия, что и без диэлектриков.

Единственность решения краевой задачи в случае изотропных диэлектриков, когда ε — число, а не матрица, доказывается аналогично случаю без диэлектриков. Только вместо равенств

$$\int_V \left| \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right|^2 dV = \oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2)\, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0$$

нужно доказывать равенства

$$\int_V \varepsilon \left| \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right|^2 dV = \oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2)\, \varepsilon \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0$$

Факультативно. Придумывание решений в задачах с проводниками и диэлектриками.

Единственность решения краевой задачи электростатики в задачах с проводниками без диэлектриков позволяет придумывать решения, например, методом изображений.

Аналогично можно придумывать решения в задачах с проводниками и диэлектриками. Обсудим, что нужно проверять для придуманного решения, чтобы оно оказалось решением задачи.

Нужно проверять, что в каждой точке объема придуманное решение для потенциала удовлетворяет уравнению $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$ и что придуманное решение удовлетворяет граничным условиям.

Введем в рассмотрение векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ следующим образом: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ и $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Тогда уравнение $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$ будет эквивалентно двум уравнениям для векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}.$$

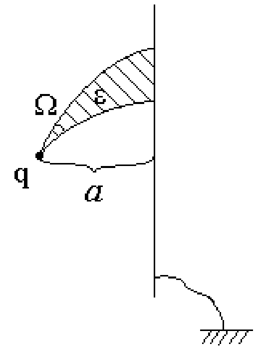
Кроме того, уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}$ на каждой границе между диэлектриками внутри интересующего нас объема принимают следующий вид:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}.$$

В результате для решения задачи достаточно придумать решение, которое удовлетворяет в рассматриваемом объеме V уравнению $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$, а на границах диэлектриков внутри объема V вместо уравнения для потенциала придуманное решение должно удовлетворять условиям $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$. Кроме того, придуманное решение должно удовлетворять граничным условиям на границах рассматриваемого объема.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пусть есть заземленная проводящая плоскость и точечный заряд q на расстоянии a над плоскостью. В этой задаче без диэлектриков рассмотрим трубку линий поля $\vec{E}$. Линии начинаются на точечном заряде и заканчиваются на проводящей плоскости. Пусть некоторая трубка линий поля $\vec{E}$ выходит из точечного заряда q в телесный угол заданной величины Ω. Заполним эту трубку линий поля $\vec{E}$ диэлектриком с заданной проницаемостью ε. Пусть в этой новой задаче требуется найти поле $\vec{E}$ в каждой точке полупространства слева от проводящей плоскости.



Решение.

Придумаем решение для электрического поля в левом полупространстве и проверим, что придуманное решение удовлетворяет всем требованиям.

Придумаем, что потенциал φ в задаче с диэлектриком в каждой точке слева от заземленной плоскости пропорционален потенциалу φ_0 в задаче без диэлектрика.

$\varphi = \beta\varphi_0$, соответственно, $\vec{E} = \beta\vec{E}_0$

здесь константу β еще требуется определить.

Поле φ_0 и $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\varphi_0$ — это решение задачи о поле заряда над заземленной проводящей плоскостью. Это поле двух точечных зарядов — реального заряда q и заряда-изображения $-q$, симметрично расположенных относительно плоскости.

Проверим граничные условия для потенциала φ придуманного поля. Требуется, чтобы потенциал на плоскости проводника был бы равен нулю.

Поле φ_0 имеет нулевой потенциал на плоскости, тогда и пропорциональное ему придуманное поле $\varphi = \beta\varphi_0$ тоже имеет нулевой потенциал на плоскости.

Внутри однородного материала левого полупространства выполняется дифференциальное уравнение для потенциала

$div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$,

так как правая часть равна нулю в левом полупространстве везде, кроме точечного заряда, а для пропорционального потенциала φ_0 везде кроме точечного заряда выполняется уравнение

$div\left(grad\left(\varphi_0\right)\right) = \Delta\varphi_0 = 0$.

$div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right)$ просто в $\varepsilon\beta$ раз больше, чем $div\left(grad\left(\varphi_0\right)\right)$.

Дифференциальное уравнение $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$ для придуманного потенциала φ выполняется во всех точках полупространства за исключением, быть может, только точек границы диэлектрика и вакуума и точки расположения заряда q. В точках границы диэлектрика и вакуума нужно проверить условия $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$.

Граница диэлектрик-вакуум расположена по касательной к линиям поля $\vec{E}_0$ по условию задачи. Значит поле $\vec{E}$, как и пропорциональное ему поле $\vec{E}_0$, не имеет нормальной составляющей к границе диэлектрик-вакуум. Тогда нормальной составляющей не имеет и придуманное поле $\vec{D}$:

$D_{2n} = D_{1n} = 0$

С другой стороны на границе диэлектрик-вакуум нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда на этой границе выполнено равенство $D_{2n} - D_{1n} = 0$ - первое равенство системы $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$. Второе равенство этой системы выполнено, так как придуманное поле $\vec{E} = \beta\vec{E}_0$ имеет одинаковый коэффициент β в диэлектрике и в вакууме и аналогично полю $\vec{E}_0$ не имеет скачка на границе диэлектрик-вакуум.