Факультативно. Придумывание решений в задачах с проводниками и диэлектриками (продолжение).

Точечный заряд q — особая точка для потенциала φ и напряженности $\vec{E}$. Поэтому требуется проверка соответствия придуманного поля граничным условиям $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$ в точке расположения точечного заряда q.

Проверке требует только первое условие, которое превращается в интегральную теорему Гаусса $\Phi_D = 4\pi Q$ для малой сферы вокруг точечного заряда q. Второе условие следует из того, что придуманное поле $\vec{E}$ — не вихревое поле, а потенциальное, так как для него придуман потенциал φ.

В малой окрестности заряда q можно пренебречь полем всех других зарядов, кроме зарядов, находящихся в одной точке с зарядом q. Тогда в малой окрестности этой точки:

$$\vec{E}_0 = q\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad => \qquad \vec{E} = \beta\vec{E}_0 = \beta q\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим поток вектора $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ через малую сферу вокруг точечного заряда q:

$$\Phi_D = 4\pi Q \qquad =>$$

$$E\cdot(4\pi - \Omega)\cdot r^2 + \varepsilon E\cdot\Omega\cdot r^2 = 4\pi q.$$

Здесь $(4\pi - \Omega)\cdot r^2$ — площадь участка сферы, который находится в вакууме, $\Omega\cdot r^2$ — площадь участка сферы, который находится в диэлектрике. Следовательно

$$E = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega}\cdot\frac{q}{r^2}$$

Тогда $\beta = \dfrac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega}$ в выражении $\vec{E} = \beta\vec{E}_0$.

Окончательно получаем, что решением задачи с диэлектриком является поле:

$$\varphi = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega}\cdot\varphi_0 \qquad \text{и} \qquad \vec{E} = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega}\cdot\vec{E}_0,$$

где φ_0 и $\vec{E}_0$ — это решение задачи о поле заряда над заземленной проводящей плоскостью, это поле двух точечных зарядов: реального заряда q и заряда-изображения $-q$ симметрично расположенных относительно плоскости.

Экзамен. Энергия взаимодействия зарядов в присутствии линейных диэлектриков.

Рассмотрим линейный диэлектрик, диэлектрик для которого связь векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ линейная:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$$

Здесь для анизотропной среды ε может быть симметричным тензором второго ранга.

Энергия взаимодействия зарядов — это способность электрических сил совершить работу. Работа внешних сил отличается знаком от работы электрических сил, если все перемещения медленные. Следовательно, потенциальная энергия электростатических сил равна работе внешних сил по сборке системы из зарядов и диэлектриков.

Работа внешних сил не зависит от того, каким образом собирать систему, иначе был бы возможен цикл с отличной от нуля работой — вечный двигатель.

Предложим алгоритм сборки, при котором затраченную работу удается вычислить.

Покажем, что эта работа равна

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i ,$$

где суммирование идет только по свободным зарядам.

Рассмотрим алгоритм сборки и некоторые сопутствующие соображения.

1). Принесем из бесконечности и поставим на свои места все диэлектрики без свободных зарядов.

Электрических сил на этом этапе нет. Следовательно, эта работа равна нулю.

2). Принесем на место каждого заряда q_i заряд $\frac{q_i}{N}$, где N — большое натуральное число.

Благодаря линейности диэлектрика все потенциалы примут значение $\frac{\varphi_i}{N}$, где φ_i — потенциалы в конце сборки.

3). Для линейности φ_i от q_i требуется, чтобы в процессе сборки диэлектрическая проницаемость оставалась неизменной $\varepsilon = const$. Это возможно только при постоянной температуре диэлектриков $T = const$.

Способность совершить работу при постоянной температуре — это свободная энергия системы. В таком случае, энергия системы, которую мы можем найти, — это именно свободная энергия.

4). Теперь принесем по второй порции зарядов $\frac{q_i}{N}$, затем по третьей порции, ..., по k-ой порции и т. д.

5). Введем обозначение $x \equiv \frac{k}{N}$, где $x \in [0,1]$ и $dx = \frac{1}{N}$.

Тогда текущие потенциалы в процессе сборки $\varphi = k\frac{\varphi_i}{N} = x \cdot \varphi_i$.

Очередная порция зарядов $\frac{q_i}{N} = q_i \cdot dx$.

6). Энергия заряда q_0 равна $q_0\varphi_0$ — равна работе по его доставке из бесконечности в точку с потенциалом φ_0, работе при неподвижных остальных зарядах.

Тогда работа сборки очередной порции зарядов — это сумма по всем зарядам величин вида $q_0\varphi_0$, где $q_0 \to (q_i dx)$, $\varphi_0 \to (x\varphi_i)$:

$$\sum_i (x\varphi_i)\cdot(q_i dx)$$

7). Работа сборки всей системы получается путем суммирования по x:

$$W = \int_0^1 \sum_i (x\varphi_i)\cdot(q_i dx) = \sum_i q_i\varphi_i \cdot \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$

8). Этот же результат можно объяснить очень коротко.

Потенциалы во время сборки растут линейно и в среднем равны $\frac{\varphi_i}{2}$. Поэтому часть всей работы, связанная с доставкой заряда q_i, равна $q_i\frac{\varphi_i}{2}$. Тогда

$$W = \sum_i q_i\frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i .$$

9). Обсудим теперь, почему $W = \frac{1}{2}\cdot\sum_i q_i\varphi_i$ — сумма только по свободным зарядам, а не по свободным и связанным зарядам?

Чисто электрическая энергия — сумма по всем зарядам, но когда в молекуле сдвигаются заряды, в ней запасается и другая — упругая энергия сил, которые пытаются вернуть заряды на свои места.

С учетом этой упругой энергии полная энергия оказывается равной сумме только по свободным зарядам.

Факультативно. Емкостные коэффициенты образуют симметричную матрицу $C_{ik} = C_{ki}$.

Рассмотрим произвольные линейные диэлектрики и N проводников с зарядами q_i и потенциалами φ_i.

$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — энергия взаимодействия заряженных проводников, где

$q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k$ — связь зарядов на проводниках с потенциалами проводников, где C_{ik} — емкостные коэффициенты. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\varphi_k\varphi_i .$$

Если из бесконечности принести на проводники заряды δq_i, то изменение энергии можно найти двумя способами. Сравнивая два выражения, получим $C_{ik} = C_{ki}$.

Рассмотрим подробнее два выражения для энергии.

С одной стороны:

$$\delta W = \sum_i (\delta q_i) \cdot \varphi_i .$$

Подставим сюда $\delta q_i = \sum_k C_{ik} \delta\varphi_k$ и получим

$$\delta W = \sum_i (\delta q_i) \cdot \varphi_i = \sum_i \left(\sum_k C_{ik} \delta\varphi_k \right) \cdot \varphi_i = \sum_{i,k} C_{ik} \cdot \delta\varphi_k \cdot \varphi_i \qquad (1).$$

С другой стороны:

$$\delta W = \delta \left(\frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \right) = \frac{1}{2} \delta \left(\sum_i \left(\sum_k C_{ik} \varphi_k \right) \cdot \varphi_i \right) = \frac{1}{2} \delta \left(\sum_{i,k} C_{ik} \varphi_k \varphi_i \right).$$

Разложим правую часть, как дифференциал от произведения $\varphi_k \varphi_i$ и получим:

$$\delta W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \cdot \delta\varphi_k \cdot \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \cdot \varphi_k \cdot \delta\varphi_i \qquad (2).$$

Приравняем два выражения 1 и 2 для δW и получим:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \cdot \delta\varphi_k \cdot \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \cdot \varphi_k \cdot \delta\varphi_i .$$

Поменяем в правой части равенства индексы i и k и получим:

$$\sum_{i,k} C_{ik} \cdot \delta\varphi_k \cdot \varphi_i = \sum_{i,k} C_{ki} \cdot \delta\varphi_k \cdot \varphi_i .$$

Пусть отличны от нуля только одно $\delta\varphi_k$ и одно φ_i, тогда от суммы $\sum_{i,k}$ останется только одно слагаемое. Равенство для этого слагаемого примет вид:

$$C_{ik} = C_{ki},$$

что и требовалось доказать.

<u>Экзамен. Энергия электрического поля в линейных диэлектриках.</u>

Математические выкладки и конечный результат этого вопроса вполне аналогичны выкладкам и результату вопроса "Энергия электрического поля" в вакууме.

Энергия поля — это та же энергия взаимодействия зарядов $W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$, только выраженная через напряженность электрического поля. Напомним, что в присутствии диэлектриков суммирование ведется только по свободным зарядам.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\int_V \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV$$

Подставим сюда выражение для объемной плотности свободных зарядов из равенства $div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$ => $\rho = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)$. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)\right)\cdot dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)\cdot dV.$$

Возьмем полученный интеграл по частям, перебросив производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя $\vec{D}$ на другой сомножитель φ.

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)\cdot dV = \frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\cdot\left(\vec{D},d\vec{S}\right) - \frac{1}{8\pi}\int_V\left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{D}\right)dV$$

При стремлении объема к бесконечности интеграл по поверхности стремится к нулю. Докажем это позднее. Тогда

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int_{V=\infty}\left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{D}\right)dV$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$ и получим

$W = \int_{V=\infty}\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}dV$ — энергия электрического поля в линейных диэлектриках. Доказывается для электростатического поля, предполагается для переменных электрических полей, все следствия из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно, формула для энергии поля справедлива и для переменных электрических полей.

$w \equiv \frac{dW}{dV} = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}$ — объемная плотность энергии электрического поля в линейных диэлектриках.

Если диэлектрик не только линеен, но и изотропен, то $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ =>

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

Для нелинейной и (или) гистерезисной зависимости $\vec{D}$ от $\vec{E}$:

$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$ — без доказательства.

В СИ: $w = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{2}$ и $w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}$.

Факультативно. $\underline{\oint_S \varphi\left(\vec{D},d\vec{S}\right)\xrightarrow[V\to\infty]{} 0}$**.**

Пусть V — шар, $r\to\infty$ =>

$$\begin{cases} \varphi \approx \dfrac{Q}{r} \\ D \approx \dfrac{Q}{r^2} \\ d\vec{S} \parallel \vec{D} \end{cases} \qquad =>$$

$$\oint_S \varphi\left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \approx \oint_S \varphi \cdot D \cdot dS \approx \oint_S \frac{Q}{r} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dS = \frac{Q^2}{r^3} \cdot \oint_S dS = \frac{Q^2}{r^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi Q^2}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Экзамен. Электрические силы в диэлектриках.

Диполи стремятся к минимуму энергии $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$. Для этого они сначала поворачиваются вдоль поля $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$, а затем втягиваются в ту область пространства, где поле сильнее. В этом и состоит причина силы, действующей на диэлектрик, состоящий из диполей.

Примеры проявления таких сил: дым втягивается в электрическое поле, жидкий или твердый диэлектрик втягивается в заряженный конденсатор.

Рассмотрим нестрогую теорию сил в диэлектриках.

$\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ — сила, действующая на диполь одной молекулы, независимо от того, жесткий это диполь или диполь, наведенный электрическим полем.

$\vec{f} \equiv \dfrac{d\vec{F}}{dV}$ — объемная плотность сил в диэлектрике.

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = n \cdot \left\langle \vec{F} \right\rangle = n \cdot \left\langle \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E} \right\rangle$$

В последнем выражении заменим среднее от произведения на произведение средних значений

$$n \cdot \left\langle \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E} \right\rangle \approx n \cdot \left(\left\langle \vec{p} \right\rangle, \vec{\nabla}\right)\left\langle \vec{E} \right\rangle.$$

Эта замена не вполне правомерна, поэтому и теория на основе этой замены нестрогая.

Среднее значение напряженности по определению является напряженностью поля в диэлектрике:

$$\left\langle \vec{E} \right\rangle \equiv \vec{E} \qquad =>$$

$$\vec{f} = n \cdot \left(\left\langle \vec{p} \right\rangle, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(n\left\langle \vec{p} \right\rangle, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(\vec{P}, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = \left(\chi\vec{E}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Подставим выражение восприимчивости через проницаемость $\chi = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ и получим

$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\vec{E}$.

Выражение для объемной плотности сил можно привести к более удобному виду. С этой целью рассмотрим двойное векторное произведение и преобразуем его по правилу "бац минус цап":

$$\left[\vec{E},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{E}}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{E},\underline{\vec{E}}\right) - \underline{\vec{E}}\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)$$

В левой и правой части равенства производные берутся только от одной из двух напряженностей $\vec{E}$. Чтобы не перепутать, эта напряженность подчеркнута и в правой части равенства.

Левая часть равенства равна нулю, так как $\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{E}}\right] \equiv rot\left(\vec{E}\right) = 0$ по теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ в дифференциальной форме. Тогда и правая часть равенства равна нулю:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E},\underline{\vec{E}}\right) - \underline{\vec{E}}\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right) = 0 \quad => \quad \vec{\nabla}\left(\vec{E},\underline{\vec{E}}\right) = \underline{\vec{E}}\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right) = \left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\underline{\vec{E}}$$

Сравнивая последнее равенство с выражением для объемной плотности сил в диэлектриках $\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(\vec{E},\vec{\nabla}\right)\vec{E}$, получим:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{E},\underline{\vec{E}}\right)$$

Последнее выражение можно преобразовать с учетом

$\vec{\nabla}\left(E^2\right) = \vec{\nabla}\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{E}}\right) = \vec{\nabla}\left(\underline{\vec{E}},\vec{E}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{E},\underline{\vec{E}}\right) = 2\vec{\nabla}\left(\vec{E},\underline{\vec{E}}\right)$ и окончательно получить

$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\cdot\vec{\nabla}\left(E^2\right) = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\cdot grad\left(E^2\right)$ — объемная плотность сил, действующих на диэлектрик в электростатическом поле.

$grad\left(E^2\right)$ направлен туда, куда быстрее всего возрастает E^2.

Формула

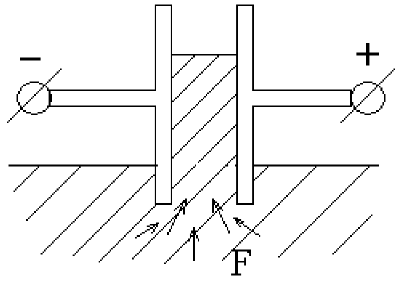
$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\cdot grad\left(E^2\right)$$

показывает, что диэлектрик втягивается в электрическое поле.

В системе СИ: $\vec{f} = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)}{2}\cdot grad\left(E^2\right)$.

Хотя это выражение получено с учетом равенства $rot\left(\vec{E}\right) = 0$, которое справедливо только для полей неподвижных зарядов, считается, что объемная плотность сил примерно такая же и для переменных электромагнитных полей вплоть до оптических частот. Применимость для световых полей определяется тем, что длина волны светового поля примерно в тысячу раз больше размера диполя молекулы. Для более медленных электромагнитных полей неравенство выполнено еще сильнее.

Для примера приведем поле сил, втягивающих жидкий диэлектрик в заряженный конденсатор.



Силы действуют там, где электрическое поле неоднородно.

Факультативно. Понятие о строгой теории сил в диэлектриках.

Рассмотрим производную от произведения

$$\vec{\nabla}\left(\left(\varepsilon-1\right)E^2\right)=E^2\cdot\vec{\nabla}\left(\varepsilon-1\right)+\left(\varepsilon-1\right)\cdot\vec{\nabla}\left(E^2\right)=E^2\cdot\vec{\nabla}\varepsilon+\left(\varepsilon-1\right)\cdot\vec{\nabla}\left(E^2\right)$$

Тогда

$$\left(\varepsilon-1\right)\cdot\vec{\nabla}\left(E^2\right)=\vec{\nabla}\left(\left(\varepsilon-1\right)E^2\right)-E^2\cdot\vec{\nabla}\varepsilon \qquad =>$$

$$\vec{f}=\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\cdot\vec{\nabla}\left(E^2\right)=\frac{1}{8\pi}\cdot\vec{\nabla}\left(\left(\varepsilon-1\right)E^2\right)-\frac{E^2}{8\pi}\cdot\vec{\nabla}\varepsilon$$ или, что то же самое:

$$\vec{f}=\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\cdot grad\left(E^2\right)=\frac{1}{8\pi}\cdot grad\left(\left(\varepsilon-1\right)E^2\right)-\frac{E^2}{8\pi}\cdot grad\left(\varepsilon\right)$$

Два слагаемых в правой части равенства рассмотрим, как две разные силы:

$$\begin{cases}\vec{f}_1=\dfrac{1}{8\pi}\cdot grad\left(\left(\varepsilon-1\right)E^2\right)\\ \vec{f}_2=-\dfrac{E^2}{8\pi}\cdot grad\left(\varepsilon\right)\end{cases}$$

Строгая теория сил в диэлектриках отличается только в первом слагаемом для силы:

$$\vec{f}=\frac{1}{8\pi}\cdot grad\left(\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T\tau\cdot E^2\right)-\frac{E^2}{8\pi}\cdot grad\left(\varepsilon\right)$$ — объемная плотность сил в строгой теории, где τ — плотность среды диэлектрика, производная по плотности среды рассматривается при постоянной температуре $T=const$.

В строгой теории в выражении для первой силы $\left(\varepsilon-1\right)$ заменено на $\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T\tau$. Оба выражения примерно одинаковы, что следует из разложения диэлектрической проницаемости ε в ряд Тейлора по степеням плотности среды τ:

$$\varepsilon\approx1+\tau\cdot\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T+\frac{1}{2}\cdot\tau^2\cdot\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\tau^2}\right)_{TT}+\ldots \qquad => \qquad \varepsilon-1\approx\tau\cdot\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T$$

Факультативно. Другое выражение сил в диэлектриках.

Покажем, что первое слагаемое в выражении

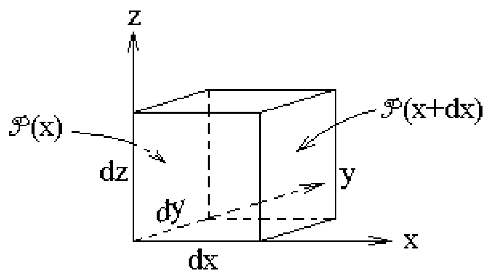
$$\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot grad\left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot grad(\varepsilon)$$

эквивалентно давлению разному в разных точках диэлектрика.

Рассмотрим среду, давление $\mathcal{P}$ в разных точках которой различно. Покажем, что это давление эквивалентно объемной плотности сил

$$\vec{f} = -grad(\mathcal{P}).$$

Рассмотрим маленький куб (или прямоугольный параллелепипед) с ребрами, направленными вдоль осей координат.



Рассмотрим давление на две грани перпендикулярные оси *x*. Площадь каждой грани равна $dy \cdot dz$. *X*-координаты граней равны *x* и *x*+*dx*. Сумма сил, действующих на эти грани со стороны давления, определяет *x*-проекцию силы, действующей на куб:

$$F_x = \mathcal{P}(x) \cdot dy \cdot dz - \mathcal{P}(x + dx) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Объемная плотность *x*-проекции силы:

$$f_x = \frac{F_x}{V} = \frac{-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \qquad =>$$

$\vec{f} = -\vec{\nabla}\mathcal{P}$, что и требовалось доказать.

Тогда первое слагаемое

$$\vec{f}_I = \frac{1}{8\pi} \cdot grad\left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right)$$

в выражении $\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot grad\left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot grad(\varepsilon)$ эквивалентно давлению

$$\mathcal{P}_I = -\frac{1}{8\pi} \cdot \tau \cdot E^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T,$$

которое никуда не втягивает диэлектрик и для несжимаемого диэлектрика может быть отброшено. И действительно, если диэлектрик сдавить, то упругие силы в диэлектрике уравновесят давление. Следовательно, сила $\vec{f}_I$ только растягивает $\mathscr{P}_I < 0$ диэлектрик, но никуда его не втягивает.

Если диэлектрик несжимаемый (жидкий или твердый), то силу $\vec{f}_I$ можно не учитывать. В таком случае можно считать. что на диэлектрик действует только сила $\vec{f}_{II}$:

$$\vec{f}_{II} = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot grad(\varepsilon) = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}\varepsilon .$$

Силу $\vec{f}_{II}$ можно заменить эквивалентным давлением $\mathscr{P}_{II}$, приложенным к границам диэлектрика, если диэлектрик однородный и несжимаемый. Обсудим это подробнее.

Если диэлектрик однородный, то $\vec{\nabla}\varepsilon = 0$. Следовательно, $\vec{f}_{II} = 0$ везде, кроме границ диэлектрика, где ε испытывает скачок.

На границе диэлектрика $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \infty$, отсюда следует, что $\vec{\nabla}\varepsilon$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, $\vec{\nabla}\varepsilon = \infty$ и $\vec{f}_{II} = \infty$. Бесконечно большая объемная плотность сил в бесконечно тонком поверхностном слое диэлектрика эквивалентна поверхностной плотности сил или давлению на границу диэлектрика.

Найдем это давление.

Рассмотрим малый участок границы диэлектрика. Направим ось z перпендикулярно границе. Градиент диэлектрической проницаемости $\vec{\nabla}\varepsilon$ и объемная плотность сил $\vec{f}_{II}$ также будут перпендикулярны границе.

Рассмотрим границу диэлектрика, как переходный слой конечной толщины h. Если ось z направлена из объема 1 в объем 2, то

$$\mathscr{P}_{II_{1\to 2}} = \frac{F_{IIz}}{S} = \frac{\int\limits_V f_{IIz} \cdot dV}{S} = \frac{\int\limits_V f_{IIz} \cdot S \cdot dz}{S} = \int\limits_V f_{IIz} dz =$$

$$= \int\limits_0^h f_{IIz} dz = \int\limits_0^h \left(-\frac{E^2}{8\pi} \cdot grad(\varepsilon) \right)_z \cdot dz = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_0^h E^2 \cdot \left(grad(\varepsilon) \right)_z \cdot dz =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int\limits_0^h E^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot dz = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_0^h E^2 d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon .$$

Зависимость подынтегрального выражения от диэлектрической проницаемости ε можно найти с учетом того, что при переходе через границу диэлектрика сохраняется тангенциальная составляющая поля E_τ, так как $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$, и сохраняется нормальная составляющая поля D_n, так как $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma = 0$. На границе нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда

$$\mathscr{P}_{II_{1\to 2}} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left(E_n^2 + E_\tau^2\right)\cdot d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left(\frac{D_n^2}{\varepsilon^2} + E_\tau^2\right)\cdot d\varepsilon\,.$$

Интеграл может быть разбит на сумму двух интегралов. Величины D_n и E_τ не изменяются внутри переходного слоя границы диэлектрика и могут быть вынесены за пределы соответствующих интегралов. Тогда

$$\mathscr{P}_{II_{1\to 2}} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left(\frac{D_n^2}{\varepsilon^2} + E_\tau^2\right)\cdot d\varepsilon = -\frac{D_n^2}{8\pi}\cdot\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} - \frac{E_\tau^2}{8\pi}\cdot\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\varepsilon\,.$$

Окончательно получаем:

$$\mathscr{P}_{II_{1\to 2}} = \frac{{D_n}^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \frac{{E_\tau}^2}{8\pi}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right).$$

Это давление приложено к границе двух диэлектриков и направлено в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.
