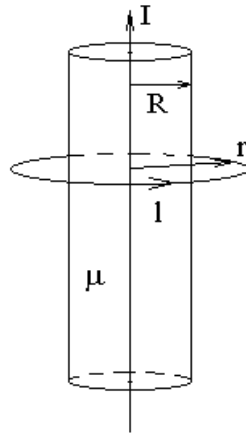


**Примеры решения задач с магнетиками.**

**Экзамен 1. Магнитное поле длинного провода с током в цилиндрической оболочке из магнитного материала.**

$$\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_r + \vec{B}_z$$
$$H_\varphi = ?$$



$$\begin{cases} \oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_l = H_\varphi \end{cases} \Rightarrow H_\varphi l = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow 2\pi r \cdot H_\varphi = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow$$

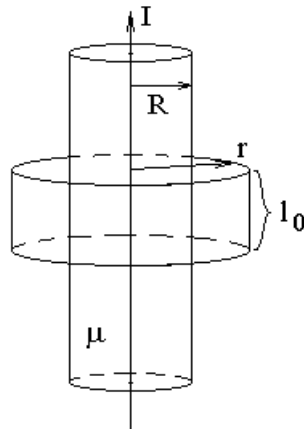
$$H_\varphi = \frac{2I}{cr}. \text{ Тогда с учетом } \vec{B} = \mu \vec{H} \text{ получим}$$

$$B_\varphi = \mu \frac{2I}{cr} \text{ при } r < R \quad \text{и} \quad B_\varphi = \frac{2I}{cr} \text{ при } r > R$$

-----  
Докажем, что двух других составляющих магнитного поля нет.

$$B_r = ?$$

Рассмотрим поток поля  $\vec{B}$  через поверхность цилиндра, положение которого соответствует симметрии задачи.



Поток поля  $\vec{B}$  может создавать только составляющая  $B_r$ . Эта составляющая может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

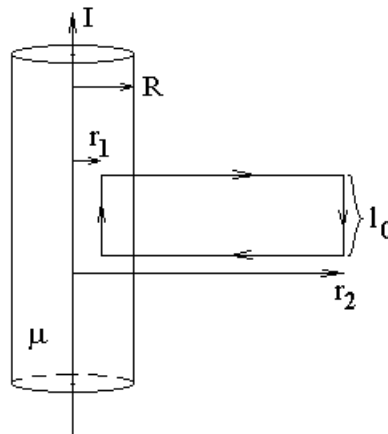
$$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r S = 2\pi r l_0 \cdot B_r$$

Поток поля  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю  $\Phi_B = 0$ , следовательно,  $B_r = 0$ .

-----

$$H_z = ?$$

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по прямоугольному контуру, в плоскости которого лежит провод с током.



$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

Правая часть равенства равна нулю, так как нет токов проводимости, пронизывающих контур интегрирования.

В левую часть равенства в циркуляцию магнитного поля дают вклад только вертикальные отрезки контура, так как горизонтальные отрезки направлены радиально, а радиальная составляющая магнитного поля равна нулю  $B_r = 0$ .

Вклад в циркуляцию на вертикальном отрезке равен произведению вертикальной составляющей магнитного поля на длину вертикального отрезка  $l_0$ . На левом вертикальном отрезке  $H_l = H_z$ , а на правом отрезке  $H_l = -H_z$ . Тогда

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad H_l(r_1) \cdot l_0 + H_l(r_2) \cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

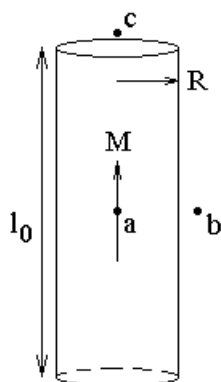
$$H_z(r_1) \cdot l_0 - H_z(r_2) \cdot l_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z(r) = const$$

$$\text{Но } H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \text{ тогда } H_z(r) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$B_z = 0.$$

**Экзамен 2. Магнитное поле длинного намагниченного цилиндра в трех характерных точках.**

Пусть длинный цилиндр намагничен вдоль оси. Найдём магнитное поле в точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

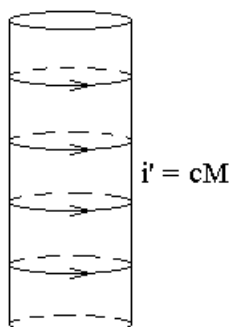


Здесь точка  $a$  находится в центре цилиндра, точка  $b$  — у боковой поверхности цилиндра в середине его высоты, точка  $c$  — непосредственно над серединой торца цилиндра.

В этих трех точках найдем магнитное поле связанных токов.

Можно считать, что есть только связанные токи, а материала магнетика нет, что токи висят в вакууме. Найдём магнитное поле токов.

Связанные токи текут по поверхности цилиндра вокруг вектора намагниченности по правилу правого винта.



Из симметрии задачи следует, что магнитное поле в этих трех точках направлено вдоль оси цилиндра. Для каждой малой площадки с током составляющая вдоль оси цилиндра перпендикулярна току и перпендикулярна нормали к поверхности, по которой течет ток. Следовательно,

$$B = B_z = B_{\perp} = \frac{i'}{c} \Omega = M \Omega, \text{ где } \Omega \text{ — телесный угол, под которым из точки}$$

наблюдения поля видна поверхность с током. Последнее равенство в цепочке определяется граничным условием для намагниченности  $M_{\tau} = \frac{i'}{c}$ .

Для определения величины магнитного поля  $B$  в рассматриваемых трех точках достаточно найти телесный угол  $\Omega$ , под которым поверхность с током видна из точки наблюдения магнитного поля.

Для точки  $a$  телесный угол  $\Omega$  — это полный телесный угол  $4\pi$  минус два телесных угла, под каждым из которых видно одно доннышко цилиндра из

его середины. Этот телесный угол равен отношению площади доньшка к квадрату расстояния от точки наблюдения до доньшка. Тогда:

$$B_a = M\Omega_a \approx M \cdot \left( 4\pi - 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \right)$$

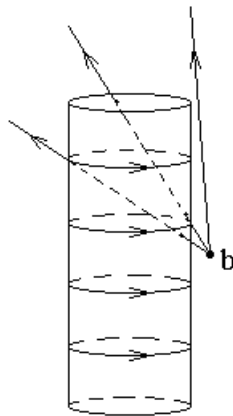
$$H_a = B_a - 4\pi M \approx -2M \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}.$$

-----

Рассмотрим магнитное поле в точке  $b$ . В этой точке токи, расположенные на ближней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вниз, а токи, расположенные на дальней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вверх.

Чтобы вычислить суммарное магнитное поле нужно найти разность телесных углов, под которыми видна ближняя к точке наблюдения поверхность с током и дальняя поверхность с током.

Разность телесных углов равна телесному углу, под которым из точки наблюдения поля видны два доньшка цилиндра. Чтобы убедиться в этом рассмотрим три разных луча, выходящих из точки  $b$ .



Рассмотрим малый телесный угол вокруг каждого из этих трех лучей.

Нижний луч протыкает боковую поверхность цилиндра дважды. Внутри соответствующего ему малого телесного угла окажется часть ближней поверхности с током и часть дальней поверхности с током. Эти две площадки с током дают равные по величине и противоположно направленные вклады в вертикальную составляющую магнитного поля в точке  $b$  в соответствии с формулой  $dB_{\perp} = \frac{i'}{c} d\Omega$ , где  $d\Omega$  — рассматриваемый малый телесный угол.

Верхний из трех лучей и малый телесный угол вокруг него не касаются поверхности цилиндра и не дают вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке  $b$ .

Средний из трех лучей входит в цилиндр через ближнюю часть боковой поверхности цилиндра, а выходит через верхнее доньшко. В малый телесный угол вокруг луча попадает только часть ближней токонесущей боковой поверхности цилиндра. Эта часть токонесущей поверхности дает не скомпенсированный вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке наблюдения. Телесные углы именно вокруг таких лучей, которые входят в цилиндр через его боковую поверхность, а выходят через доньшко, дают вклад в телесный угол  $\Omega$ , который определяет величину магнитного поля в точке  $b$ .

$$B_b \approx -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \cdot M, \quad H_b = B_b \approx -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \cdot M.$$

-----  
 В точке  $c$  телесный угол, под которым видна поверхность с током — это половина полного телесного угла  $2\pi$  для нижнего полупространства минус телесный угол  $\frac{\pi R^2}{l_0^2}$ , под которым видно нижнее доньшко. Тогда

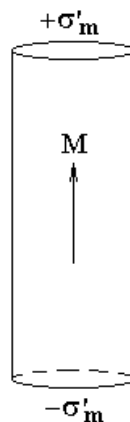
$$B_c = H_c \approx \left(2\pi - \frac{\pi R^2}{l_0^2}\right) \cdot M.$$

### Факультативно. Решение 2.

В той же задаче можно найти магнитное поле магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

По аналогии с электрическими зарядами  $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ , напомним для магнитных зарядов

$M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m \quad \Rightarrow \quad \sigma'_m = M$  — поверхностная плотность связанных магнитных зарядов на торцах цилиндра.



Эти заряды создают напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ . Затем поле  $\vec{B}$  можно найти по формуле  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ .

Точка  $a$  в центре цилиндра расположена далеко от торцов цилиндра. Тогда магнитный заряд на каждом торце можно считать точечным. Напряженности полей обоих зарядов в центре цилиндра направлены сверху вниз.

$$H_a = -2 \frac{q'_m}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}$$

$$B_a = H_a + 4\pi M = 4\pi M - 2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}$$

Цилиндр узкий, точка  $b$  близко расположена к точке  $a$ , поэтому напряженность магнитного поля в точке  $b$  почти такая же, как и в точке  $a$ :

$$H_b = -2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}, \quad B_b = H_b + 4\pi M = 4\pi M - 2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}.$$

Точка  $c$  расположена близко к торцу цилиндра, при этом торец выглядит бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $\sigma'_m$ . Напряженность поля бесконечной плоскости равна  $2\pi\sigma'_m = 2\pi M$ . Заряд нижнего торца цилиндра можно считать точечным. Тогда

$$B_c = H_c = 2\pi\sigma'_m - \frac{q'_m}{l_0^2} = 2\pi M - \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{l_0^2} = 2\pi M - \frac{\pi R^2 M}{l_0^2}.$$

Ответы совпадают с ответами первого решения.

### **Факультативно. Четыре предварительных замечания к решению задач по теме магнитопровод.**

#### 1-ое замечание.

Аналогично краевой задачи электростатики для уравнения  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  уравнение  $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$  имеет единственное решение в объеме, если на границах объема задано одно из граничных условий аналогичных условиям Дирихле или Неймана. Задачу для векторного потенциала аналогичную задаче с проводниками для скалярного потенциала придумать трудно.

Уравнение  $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}$  для векторного потенциала эквивалентно паре

дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$  для полей  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . При

условиях:  $\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A}) \\ \operatorname{div}(\vec{A}) = 0 \end{cases}$

На границе намагниченных сред система  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$  превращается в

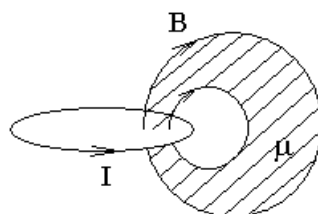
границные условия  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$ .

В результате, решение для магнитного поля можно придумывать. Для придуманного решения нужно проверять условия  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$  на границе объема и на границах намагниченных сред внутри рассматриваемого объема, здесь  $i$  — плотность поверхностного тока проводимости.

Внутри рассматриваемого объема нужно проверять условия  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$ , где  $\vec{j}$  — плотность токов проводимости.

### 2-ое замечание.

Если в задаче без магнетиков любую трубку линий поля  $\vec{B}$  заполнить магнетиком, то напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  нигде не изменится.



Доказательство этого замечания.

Придумаем решение, в котором поле  $\vec{H}$  нигде не изменилось.

Проверим выполнение граничных условий  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$  на границе

магнетика внутри рассматриваемого объема, то есть на границах трубки линий поля  $\vec{B}$ , заполненной магнетиком.

Граница магнетика выбрана вдоль линий поля  $\vec{B}$ , следовательно, нормальной составляющей поля  $\vec{B}$  на границе магнетика нет. Тогда условие  $B_{2n} - B_{1n} = 0$  выполнено на границе магнетика.

Условие  $H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$  выполнено на границе магнетика, так как на этой границе нет токов проводимости  $i = 0$ , и у придуманного поля  $\vec{H}$  нет скачка на границе.

Уравнения  $\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$  будут выполнены в остальных точках внутри

объема, так как они были выполнены для поля  $\vec{H}$  в задаче без магнетиков.

### 3-е замечание.

Если сердечник в виде заполненной магнетиком трубки линий магнитного поля продеформировать, то поля  $\vec{H}$  внутри и снаружи сердечника будут различными, но останутся величинами одного порядка  $H_{\text{внутри}} \approx H_{\text{снаружи}}$ .

Интеграл  $\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$  по контуру вдоль оси сердечника и по контуру

рядом с сердечником имеет одно и то же значение, так как правая часть равенства в обоих случаях одна и та же. Если интеграл от поля  $\vec{H}$  внутри и снаружи сердечника одинаков, то и само поле  $\vec{H}$  не может сильно отличаться внутри и снаружи сердечника.

### 4-е замечание.

Если сердечник изготовлен из материала с высокой магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ , то линии магнитного поля  $\vec{B}$  не любят выходить из сердечника при его деформации, то есть повторяют форму сердечника.

Докажем это замечание.

Согласно третьему замечанию  $H_{\text{внутри}} \approx H_{\text{снаружи}}$ . Но

$$\begin{cases} B_{\text{внутри}} = \mu H_{\text{внутри}} \\ B_{\text{снаружи}} = H_{\text{снаружи}}, \text{ тогда} \\ \mu \gg 1 \end{cases}$$

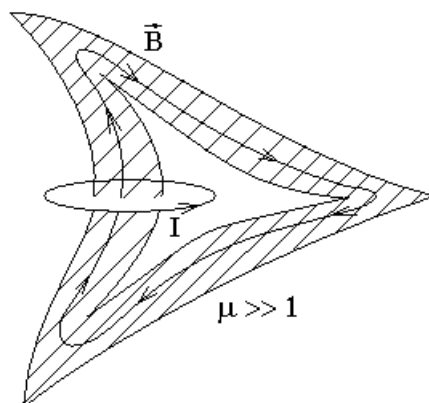
$$B_{\text{внутри}} = \mu H_{\text{внутри}} \approx \mu H_{\text{снаружи}} = \mu B_{\text{снаружи}} \gg B_{\text{снаружи}} \Rightarrow$$

$$B_{\text{внутри}} \gg B_{\text{снаружи}}.$$



Плотность линий поля  $\vec{B}$  пропорциональна величине поля  $B$ , линии поля  $\vec{B}$  не рвутся. Тогда с учетом  $B_{внутри} \gg B_{снаружи}$  из сердечника  $\mu \gg 1$  может выходить лишь небольшая часть (порядка  $\frac{1}{\mu}$ ) линий поля  $\vec{B}$ .

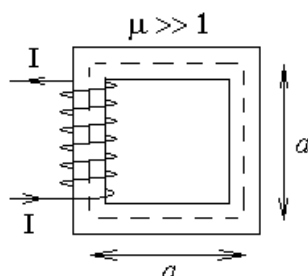
Следовательно, линии поля  $\vec{B}$  повторяют форму замкнутого сердечника  $\mu \gg 1$ , и в этом смысле линии поля  $\vec{B}$  не любят выходить из сердечника при  $\mu \gg 1$ .



### Примеры решения задач с магнитопроводом.

#### Экзамен 1. Магнитное поле в катушке с замкнутым сердечником при

$$\underline{\mu \gg 1.}$$



Найдем магнитное поле  $\vec{B}$  в сердечнике.

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  вдоль оси сердечника:

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I, \quad \text{где } I \text{ — сумма токов, пронизывающих контур}$$

интегрирования — пунктирный контур.

Пусть  $N$  — число витков в обмотке катушки. Каждый виток пронизывает площадку, ограниченную пунктирным контуром. Следовательно,  $NI$  — сумма токов проводимости, пронизывающих пунктирный контур интегрирования. Тогда

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} NI, \tag{1}$$

где  $I$  — сила тока в обмотке катушки.

Линии магнитного поля  $\vec{B}$  не любят выходить из сердечника с высокой магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ , поэтому через любое сечение сердечника перпендикулярное его пунктирной оси проходит одинаковое число линий поля  $\vec{B}$ . Поток  $\Phi_B$  пропорциональный числу линий поля также одинаковый в любом сечении.

$\Phi_B = BS$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника перпендикулярного пунктирной линии. На протяжении почти всей длины сердечника площадь сечения  $S$  одинаковая, тогда и поле  $B$  во всех сечениях сердечника одинаковое. С учетом  $B = \mu H$  поле  $H$  тоже одинаково во всем сердечнике, и поле  $\vec{H}$  направлено вдоль оси сердечника. Следовательно,  $H_l = H$  и эту константу можно вынести за знак интеграла в формуле (1).

$$H \cdot \oint_l dl = \frac{4\pi}{c} NI, \text{ здесь } \oint_l dl = l \text{ — длина сердечника. Тогда}$$

$$Hl = \frac{4\pi}{c} NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{4\pi NI}{cl}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{4\pi \mu NI}{cl}, \text{ где } \mu \gg 1 \text{ — магнитная проницаемость сердечника; } N \text{ —}$$

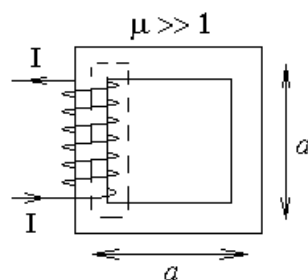
число витков в катушке, намотанной на сердечник;  $I$  — сила тока в катушке.

$$\text{В системе СИ для поля } B \text{ нужно } \frac{1}{c} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}, \text{ в результате } B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l},$$

$$\text{для поля } H \text{ нужно } \frac{1}{c} \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \text{ в результате } H = \frac{NI}{l}.$$

#### Факультативная вставка.

Сравним приведенное выше правильное решение с ошибочным, представленным ниже.



Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по новому пунктирному контуру. Казалось бы, магнитное поле в основном сосредоточено в сердечнике, поэтому вкладом в циркуляцию снаружи сердечника можно пренебречь. Тогда

$$\oint_l H_l dl = Ha = \frac{4\pi}{c} NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{4\pi NI}{ca}, \text{ что в четыре раза отличается от}$$

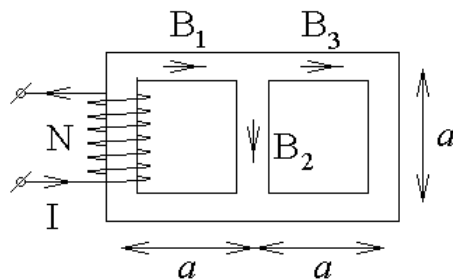
правильного решения  $H = \frac{4\pi NI}{cl}$ .

Чтобы избежать ошибок в решении, нужно учитывать, что магнитное поле  $\vec{B}$  в сердечнике гораздо больше, чем рядом с сердечником, а напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  в сердечнике и рядом с ним имеет один порядок величин. По этой причине нельзя пренебречь вкладом в циркуляцию поля  $\vec{H}$  снаружи сердечника, и второе предложенное решение оказывается неверным.

Конец факультативной вставки.

### Экзамен 2. Магнитное поле в сердечнике с ветвлением.

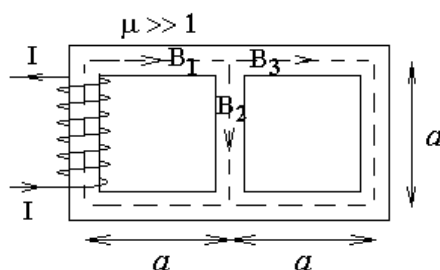
Рассмотрим ветвящийся сердечник. Пусть в задаче заданы геометрические размеры сердечника, его проницаемость  $\mu \gg 1$ , число витков катушки  $N$  и сила тока в катушке  $I$ .



Требуется найти магнитное поле в сердечнике.

При решении задачи составляются уравнения похожие на уравнения Кирхгофа. Узел — это место ветвления сердечника. Участок сердечника, как и участок электрической цепи — это отрезок от одного узла до соседнего узла. Есть уравнения для узлов, а именно, в узел втекает поток магнитного поля такой же, как вытекает; и для контуров — циркуляция напряженности магнитного поля по контуру равна произведению  $\frac{4\pi}{c}$  на сумму токов проводимости, пронизывающих контур.

Выберем положительное направление магнитного поля  $\vec{B}$  на каждом участке сердечника. Число линейно независимых уравнений для контуров совпадает с числом элементарных контуров, которые нельзя разделить на более мелкие по площади контуры.



Выберем в качестве контуров для составления уравнений два элементарных квадратных пунктирных контура. Выберем положительное направление обхода каждого контура, например по часовой стрелке.

Уравнения для контуров примут следующий вид:

$$\begin{cases} 3aH_1 + aH_2 = \frac{4\pi}{c} NI \\ 3aH_3 - aH_2 = 0 \end{cases} .$$

Для решения системы относительно неизвестных  $H_1, H_2, H_3$  не хватает третьего уравнения.

Добавим одно уравнение для узла.

Поток поля  $\vec{B}$ , втекающий в узел, равен потоку, вытекающему из угла.

Тогда

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3,$$

где  $S_1, S_2, S_3$  — площади поперечного сечения сердечника на участках 1, 2, 3.

Рассмотрим задачу, в которой площади сечения одинаковые, тогда  $B_1 = B_2 + B_3$ .

$H_1 = H_2 + H_3$  — третье недостающее уравнение системы:

$$\begin{cases} 3aH_1 + aH_2 = \frac{4\pi}{c} NI \\ 3aH_3 - aH_2 = 0 \\ H_1 = H_2 + H_3 \end{cases} .$$

Три уравнения позволяют найти три неизвестные  $H_1, H_2, H_3$ .

Магнитное поле  $B_i = \mu H_i$  на каждом  $i$ -ом участке сердечника.

### **Факультативно. Уравнения для магнитного поля в произвольном магнитопроводе ( $\mu \gg 1$ ) с ветвлением.**

Уравнения для магнитного поля в магнитопроводе не просто похожи на уравнения Кирхгофа для электрических цепей, а полностью им эквивалентны с точностью до замены:

$$\begin{array}{lll} I & \Rightarrow & BS \\ \mathcal{E} & \Rightarrow & \frac{4\pi}{c} NI \\ R & \Rightarrow & \frac{l}{\mu S} . \end{array}$$

Здесь в левом столбце:  $I$  — сила тока на участке электрической цепи,  $\mathcal{E}$  — электродвижущая сила на участке цепи,  $R$  — сопротивление участка цепи. В правом столбце:  $B$  — магнитное поле в сердечнике на участке магнитопровода,  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника,  $N$  — число витков катушки на сердечнике;  $I$  — сила тока в катушке,  $l$  — длина участка сердечника,  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника.

$$\text{Так если сердечник не ветвится, то } \frac{4\pi}{c} NI = lH = l \frac{B}{\mu} = BS \cdot \frac{l}{\mu S} \Rightarrow$$

Уравнение  $\frac{4\pi}{c}NI = BS \cdot \frac{l}{\mu S}$  для магнитопровода, что после соответствующих замен эквивалентно уравнению  $\mathcal{E} = IR$  для электрических цепей.

Следовательно, величина  $\frac{l}{\mu S}$  — сопротивление магнитопровода магнитному потоку. Тогда  $\mu$  — удельная проводимость магнитного потока.