

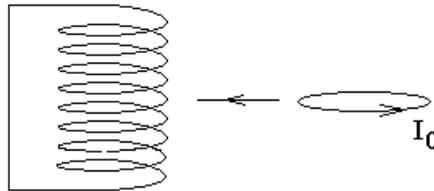
### Экзамен. Свойства сверхпроводников (продолжение).

#### 4). Задачи со сверхпроводниками.

В любом сверхпроводящем контуре поток магнитного поля сохраняется при любых действиях с контуром. Контур можно деформировать, вставлять его в магнитное поле, вводить в него сердечник. Поток магнитного поля сохраняется.

В качестве примера рассмотрим задачу 3.161 из задачника С. М. Козел, Э. М. Рашба, С. А. Славатинский.

Короткозамкнутая сверхпроводящая катушка с индуктивностью  $L_c$  и числом витков  $N$ . Сверхпроводящее кольцо того же диаметра с током  $I_0$  и индуктивностью  $L$ . Во сколько раз изменится ток в кольце  $\frac{I}{I_0} = ?$ , если кольцо вдвинуть между витками соленоида.



$$\begin{cases} \frac{I_0}{c} L = \frac{I}{c} L + \frac{I_c}{c} L_c \cdot \frac{1}{N} \\ 0 = \frac{I_c}{c} L_c + \frac{L_c}{N} \cdot \frac{I}{c} \end{cases} \quad \text{— это два уравнения с двумя неизвестными: } I \text{ —}$$

ток в кольце и  $I_c$  — ток в соленоиде после внесения кольца в соленоид.

Поясним уравнения системы. Первое уравнение — это сохранение потока в кольце. В последнем слагаемом первого уравнения  $\frac{I_c}{c} L_c$  — поток через катушку за счет тока в катушке, тогда  $\frac{I_c}{c} L_c \cdot \frac{1}{N}$  — поток через один виток катушки или через кольцо за счет тока в катушке. Из этого же слагаемого следует, что коэффициент взаимной индукции  $L_{12} = \frac{L_c}{N}$ . С учетом этого факта получается последнее слагаемое во втором уравнении.

Решаем два уравнения с двумя неизвестными токами  $I$ ,  $I_c$  и находим токи.

#### 5). В сильном магнитном поле сверхпроводимость пропадает.

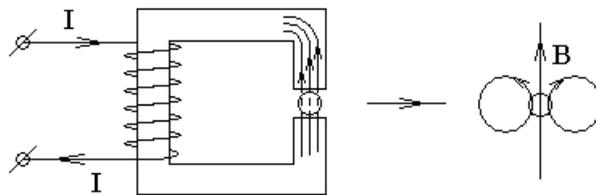
Дело в том, что в магнитном поле снижается критическая температура перехода в сверхпроводящее состояние. В сильном магнитном поле невозможна сверхпроводимость, ни при какой температуре.



По этой причине через сверхпроводник нельзя пропустить слишком большой ток, так как большой ток создает большое магнитное поле, которое разрушает сверхпроводимость.

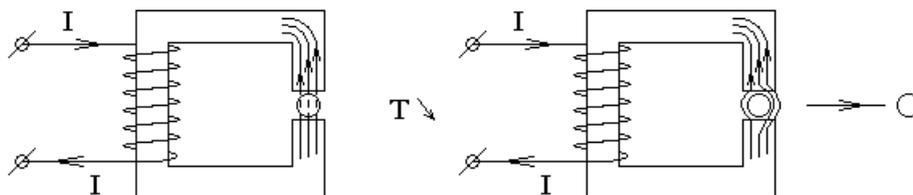
### 6). Эффект Мейснера.

До 1933 года казалось, что если шар поместить в магнитное поле, охладить ниже критической температуры и вынуть из магнитного поля, то линии магнитного поля внутри сверхпроводника не смогут измениться. Если бы линии изменялись, то нашелся бы контур внутри шара такой, что в нем изменялся бы поток магнитного поля, что в сверхпроводнике невозможно.



Линии магнитного поля, сохранившиеся внутри шара, замыкались бы снаружи шара. Шар превратился бы в постоянный магнит.

Проведенный опыт показал, что изъятый из магнитного поля сверхпроводящий шар не имеет вокруг себя магнитного поля. Оказалось, что при охлаждении образца в магнитном поле, в момент перехода в сверхпроводящее состояние при  $T = T_{кр}$  происходит выталкивание магнитного поля из объема сверхпроводника.



Это выталкивание и называют эффектом Мейснера.

### 7). Поверхностные токи сверхпроводника и экранирование магнитного поля сверхпроводником.

Согласно эффекту Мейснера магнитное поле выталкивается из объема сверхпроводника. В таком случае,

$$\vec{B}_{внутри} = 0 \Rightarrow \text{rot}(\vec{B}_{внутри}) = 0,$$

$$\text{но } \text{rot}(\vec{B}_{внутри}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{внутри}, \quad \text{тогда}$$

$$\vec{j}_{внутри} = 0$$

— в сверхпроводнике могут быть только поверхностные токи. Токи протекают в слое толщиной примерно  $(10 \div 100)$  нм — лондоновская глубина проникновения (Фриц и Хайнц Лондоны).

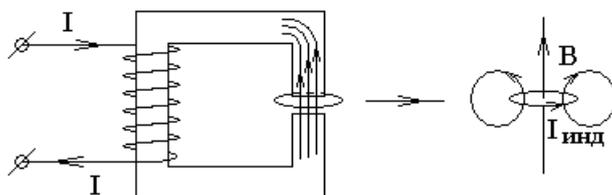
Поверхностные токи создают в каждой точке внутри объема сверхпроводника такое магнитное поле, которое в точности компенсирует внешнее магнитное поле.

В результате сверхпроводник экранирует не только электрическое, но и магнитное поле.

#### Факультативная вставка. Скин-эффект.

Скин в переводе с английского языка — кожа.

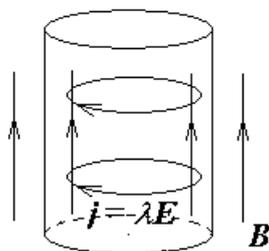
При быстрых изменениях магнитного поля обычный проводник в первый момент ведет себя так же, как сверхпроводник.



Например, рассмотрим кольцо, которое быстро вынимают из магнитного поля. В кольце возникает ток индукции, который по правилу Ленца стремится устранить причину своего появления, то есть сохранить поток магнитного поля через кольцо.

Для обычного проводника ток индукции греет кольцо, на нагревание тратится энергия магнитного поля кольца, и ток индукции затухает. В сверхпроводнике переходной процесс затухания тока индукции растягивается до бесконечности.

Рассмотрим теперь проводящий цилиндр, не сверхпроводящий. В окружающем пространстве быстро включим магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндра.



В проводящем цилиндре, как и в сверхпроводящем цилиндре, в первый момент возникают поверхностные токи индукции, которые не пропускают магнитное поле вовнутрь цилиндра.

В проводнике эти токи быстро затухают, пропуская магнитное поле. Магнитное поле проходит в следующий параллельный поверхности слой проводника.

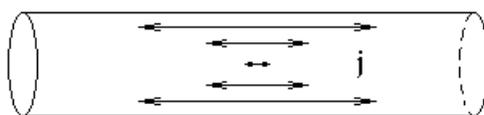
В этом слое снова возникают токи индукции, не пуская магнитное поле глубже в проводник. Эти токи тоже затухают и т. д. Магнитное поле проникнет в середину цилиндра за некоторое время.

Если магнитное поле знакопеременное и периодическое, то оно не успевает проникнуть глубоко за половину периода, пока магнитное поле не изменило знак.

В результате глубоко в тело проводника переменное магнитное поле не проникает. Если внутри проводника нет переменного магнитного поля, то нет и переменного электрического поля, так как эти поля связаны друг с другом уравнениями Максвелла.

Следовательно, переменное электромагнитное поле не проникает глубоко в проводник. Электрическое поле связано с токами законом Ома  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ . Следовательно, переменные токи текут только в поверхностном слое проводника. В этом и состоит скин-эффект.

Для меди при частоте тока  $f = 4$  кГц глубина проникновения электромагнитного поля  $h = 1$  мм. На этой глубине поле и плотность тока спадают в  $e$  раз. На других частотах  $h \sim \frac{1}{\sqrt{f}}$ .



На рисунке изображено искаженное скин-эффектом распределение плотности тока высокой частоты (ВЧ тока) в длинном цилиндрическом проводнике.

Для ВЧ токов из-за скин-эффекта эффективная площадь сечения проводника уменьшается, а сопротивление проводника соответственно увеличивается.

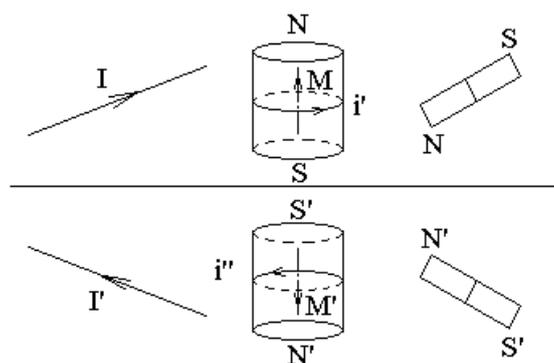
Чтобы устранить влияние скин-эффекта на сопротивление провода, провод для ВЧ токов изготавливают в виде набора тонких изолированных друг от друга проводников. По сравнению с одним толстым проводником того же сечения ВЧ провод имеет большую площадь поверхности и относительно малое сопротивление для ВЧ токов.

Конец факультативной вставки.

8). Метод изображений.

В сверхпроводнике изображаются не только заряды, но и токи. Токи в обычном нейтральном проводнике не изображаются.

Магнитное поле над бесконечной сверхпроводящей плоскостью — поле реальных токов  $I$  и зеркально расположенных токов изображений  $I'$ .



Такой результат согласуется с граничными условиями

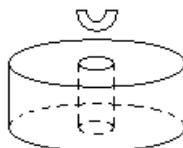
$$\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$$

а из единственности решения краевой задачи магнитостатики следует, что решение будет именно таким.

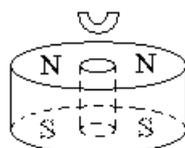
### 9). "Гроб Магомета".

Токи и магниты всегда отталкиваются от своих изображений в сверхпроводнике. Эта сила позволяет компенсировать силу тяжести и подвесить магнит над сверхпроводником или сверхпроводник над магнитом.

Можно, например, подвесить магнит над сверхпроводящим кольцом:



Можно подвесить кусочек сверхпроводника над магнитом в виде кольца:



Дырка на оси кольца нужна для того, чтобы подвешенный образец не соскальзывал в сторону.

### Факультативная вставка.

Аллах призвал к себе Магомета, и тот полетел к Аллаху вместе с камнем, на котором стоял. Заметив непорядок, Магомет сказал камню "останься здесь". С тех пор камень висит над землей, а поскольку аллах призвал Магомета насовсем, камень считают гробом Магомета. Вокруг камня построили мечеть, и теперь — это одна из мусульманских святынь. Такую историю мне рассказал аспирант из Ирака.

Эффект парения сверхпроводника или магнита ассоциируется с этой легендой, и поэтому получил название "гроба Магомета".

В некоторых странах для туристов сделали небольшие участки пути, по которым ходят электропоезда на магнитной подвеске. Там используется не эффект гроба Магомета, а электромагниты со сверхпроводящей обмоткой.

Конец факультативной вставки.

#### 10). Сверхпроводники 2-го рода.

При увеличении внешнего магнитного поля сверхпроводники переходят из сверхпроводящего состояния в состояние с обычной отличной от нуля проводимостью (в сильном магнитном поле сверхпроводимость пропадает). В сверхпроводниках 2-го рода этот переход происходит через некоторое промежуточное состояние (частичный эффект Мейснера), которое отсутствует у сверхпроводников 1-го рода.

Сверхпроводник, состоящий из атомов одного химического элемента, является сверхпроводником 1-го рода. Сплавы разных металлов и металлокерамики являются сверхпроводниками 2-го рода.

В сверхпроводящих сплавах полный эффект Мейснера наблюдается только в слабых магнитных полях. В более сильном магнитном поле в сверхпроводящем сплаве наблюдается частичный эффект Мейснера. В этом случае магнитное поле проникает в объем сверхпроводника в виде узких пучков магнитных линий. Внутри этих пучков магнитных линий вещество переходит из сверхпроводящего состояния в обычное состояние, а между пучками остается в сверхпроводящем состоянии. Вокруг пучков магнитных линий в сверхпроводнике образуются токи (вихри Абрикосова). Если после этого внешнее магнитное поле убрать, то вихри Абрикосова остаются. Такой сверхпроводник создает вокруг себя магнитное поле, подобно постоянному магниту. Вихри Абрикосова поддерживают пучки линий магнитного поля в объеме сверхпроводника. На больших расстояниях внутри сверхпроводника вихри Абрикосова притягиваются друг к другу, а на малых — отталкиваются друг от друга. В результате они образуют структуру с дальним порядком подобно двумерному кристаллу, где два измерения перпендикулярны пучкам линий магнитного поля.

#### 11). СВЧ граница сверхпроводимости.

ВЧ диапазон частот: (30 — 300) МГц.

СВЧ диапазон частот (300 МГц — 300 ГГц). СВЧ — сверхвысокие частоты. Он же — микроволновой диапазон  $\lambda = 1 \text{ мм} — 1 \text{ м}$ .

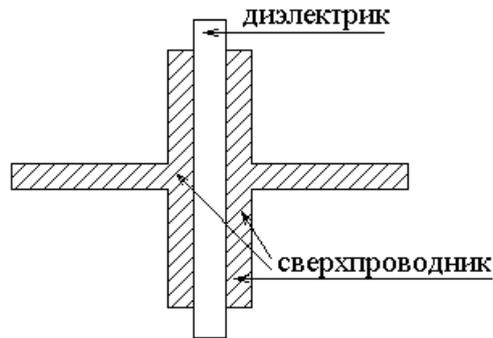
На частоте  $f > 10^{11} \text{ Гц} = 100 \text{ ГГц}$  сверхпроводимости нет. Масса покоя электронов не позволяет им мгновенно подстраивать величину поверхностного тока, так чтобы не пропустить магнитное поле внутрь сверхпроводника. Эта инерционность изменения поверхностных токов и определяет СВЧ границу сверхпроводимости.

На более низких частотах сверхпроводник представляет собой идеальное зеркало, отражающее электромагнитные волны без потерь.

#### 12). Эффект Джозефсона.

Эффект Джозефсона — это протекание постоянного тока через элемент Джозефсона.

Рассмотрим элемент Джозефсона.



Элемент Джозефсона — плоский конденсатор из сверхпроводника. Между пластинами конденсатора помещен тонкий слой диэлектрика. Характерная толщина диэлектрика —  $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$ .

При малых токах наблюдается стационарный эффект Джозефсона, при больших — нестационарный.

Стационарный эффект состоит в том, что ток через элемент Джозефсона проходит, а напряжение на элементе Джозефсона не падает  $U = 0$ .

В нестационарном эффекте Джозефсона — на элементе Джозефсона падает напряжение  $U$  и из области диэлектрика излучается свет с частотой  $\nu$ , такой что

$$h\nu = 2eU,$$

где  $e$  — модуль заряда электрона.

#### Факультативная вставка.

На основе элемента Джозефсона и закорачивающей его обкладки сверхпроводящей петли создают кубиты — элементарные ячейки памяти квантового компьютера. Поток магнитного поля через петлю сверхпроводника квантуется, квант потока равен  $\frac{hc}{2e}$  в системе СГС Гаусса и  $\frac{h}{2e}$  в системе СИ.

#### Конец факультативной вставки.

#### 13). Куперовские пары.

Из уравнения  $h\nu = 2eU$  видно, что энергия одного фотона равна изменению энергии пары электронов при прохождении элемента Джозефсона с напряжением  $U$ .

Следовательно, электроны преодолевают элемент Джозефсона парами.

Спин электрона  $s = \frac{1}{2}$ . Электроны объединяются парами с противоположно направленными спинами. Пара электронов (куперовская пара) имеет нулевой спин  $S = 0$  и ведет себя, как один бозон. Пара электронов расположена не слишком близко друг к другу, объем куперовской пары имеет размер порядка толщины слоя поверхностного тока сверхпроводника: 100 нм.

#### Факультативная вставка.

Элементарные частицы делятся на два больших класса.

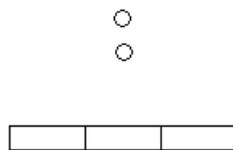
Фермионы — частицы с полуцелым спином  $s = \frac{1}{2}$  или  $\frac{3}{2}$ . Так, например, спин  $s = \frac{1}{2}$  у электрона, протона и нейтрона.

Бозоны — частицы с целым спином  $s = 0$  или  $1$  или  $2$ . Например, у фотонов  $s = 1$ .

Никто не знает почему, но два фермиона не могут быть в одном состоянии.

Бозоны, наоборот, предпочитают находиться в одном состоянии, и это можно объяснить. Стремление бозонов находиться в одном состоянии называют эффектом группировки бозонов.

Рассмотрим три равновероятных состояния и два бозона. Какова вероятность того, что два бозона окажутся в одном и том же состоянии?



Элементарные частицы одного вида тождественны, то есть неразличимы.

Для обычных нетождественных частиц вероятность двум частицам оказаться в одном и том же состоянии из трех возможных состояний равна  $\frac{3}{9}$ , так как всего вариантов размещения частиц  $9$ , а число благоприятных вариантов размещения  $3$ .

Для тождественных бозонов число возможных состояний —  $6$ , так как перестановка тождественных бозонов не приводит к новому состоянию. Предположим, что эти  $6$  состояний равновероятны. Все выводы из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно, предположение верное. В таком случае вероятность того, что два бозона будут в одном состоянии равна  $\frac{3}{6}$ .

Рассмотрим теперь мысленный опыт, в котором эти два бозона вбрасывают в систему из трех состояний по очереди один за другим.

Первый бозон равновероятно попадает в любое из трех состояний. Второй бозон попадает в то же состояние, что и первый бозон, с вероятностью  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , так как это обсуждавшаяся выше вероятность того, что два бозона будут в одном состоянии.

Сумма всех вероятностей равна  $1$ , тогда вероятность того, что второй бозон попадает в каждое из оставшихся состояний, равна  $\frac{1}{4}$ .

Следовательно, вероятность попадания в занятое состояние вдвое больше, чем вероятность попадания в свободное состояние.

Аналогично можно доказать, что для любого числа состояний  $p_i \sim (n_i + 1)$ , где  $p_i$  — вероятность бозону попасть в  $i$ -е состояние, в котором уже есть  $n_i$  бозонов.

Используя комбинаторику и распределение Больцмана можно получить, что для большого числа частиц в системе среднее число частиц в  $i$ -м состоянии  $n_i$  равно:

для бозонов 
$$n_i = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu(T)}{kT}} - 1}$$
 — это распределение Бозе —

Эйнштейна,

для фермионов 
$$n_i = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu(T)}{kT}} + 1}$$
 — распределение Ферми — Дирака,

для нетождественных частиц 
$$n_i = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu(T)}{kT}}}$$
 — распределение

Больцмана.

Здесь  $\mu(T)$  — химический потенциал, который находится из условия нормировки:  $\sum_i n_i = N$ , где  $N$  — общее число частиц в системе. Для частиц с нулевой массой покоя  $\mu(T) = 0$ .

Сверхпроводимость — это коллективный эффект. Я высверлил отверстие в сверхпроводящем диске и выяснил, что малые крупинки сверхпроводника (диаметром меньше 0.3 мм) не отталкиваются от магнита. В них нет достаточного количества атомов, чтобы там происходил фазовый переход в сверхпроводящее состояние.

Конец факультативной вставки.

При охлаждении системы с большим числом бозонов происходит фазовый переход — бозе-конденсация, при которой все бозоны переходят в одинаковое (нижнее) состояние энергии. Этот вывод следует из анализа формулы распределения Бозе — Эйнштейна. Можно сказать, что бозоны не хотят находиться в разных состояниях.