

Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

Энергия — это способность совершить работу, поэтому:

$$W'_I \equiv A'_{I \rightarrow \infty}.$$

Электростатическая энергия заряда q' в точке I по определению равна работе электростатических сил по перемещению этого заряда из точки I на бесконечность.

$$W'_I \equiv A'_{I \rightarrow \infty} = A'_{I \rightarrow II} \Big|_{II \rightarrow \infty} = q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right) \Big|_{r_{iII} \rightarrow \infty} = q' \sum_i q_i \frac{1}{r_{iI}} = q' \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r}_I - \vec{r}_i|}$$

$\Rightarrow W'(\vec{r}) = q' \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ - энергия заряда q' в точке с радиус-вектором \vec{r} в поле остальных зарядов q_i .

Потенциал электростатического поля.

Потенциал — потенциальная энергия единичного заряда.

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'}$$

Потенциал произвольного распределения зарядов.

Для системы точечных зарядов q_i получим следующее выражение для потенциала φ в точке с радиус-вектором \vec{r} :

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W'(\vec{r})}{q'} = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Тогда для произвольного распределения зарядов получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{l'} \frac{\tau(\vec{r}') \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\varphi = \frac{q}{r}$ — потенциал поля точечного заряда.

В системе СИ $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$.

Связь потенциала и напряженности электростатического поля.

$$\varphi(\vec{r}_I) \equiv \frac{W'(\vec{r}_I)}{q'} \equiv \frac{A'_{I \rightarrow \infty}}{q'} = \frac{\int_I^{\infty} (\vec{F}', d\vec{l})}{q'} = \int_I^{\infty} \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l} \right) = \int_I^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) \Rightarrow$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \quad \text{— связь потенциала и напряженности в одну}$$

сторону.

Получим теперь связь между \vec{E} и φ в другую сторону.

Рассмотрим

$$\varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) = \int_{\vec{r}_{II}}^{\infty} E_l dl - \int_{\vec{r}_I}^{\infty} E_l dl = - \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl.$$

Устремим $\vec{r}_{II} \rightarrow \vec{r}_I$ и получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) &\approx d\varphi \\ - \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl &\approx -E_l dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\varphi = -E_l dl \Rightarrow$$

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \text{ — для любого направления } l.$$

Рассмотрим направления вдоль осей x, y, z :

$$\left\{ \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \text{ где}$$

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ — оператор набла.}$$

$grad(\varphi) \equiv \vec{\nabla}\varphi$ — определения градиента.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi \\ \varphi(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{aligned} \right. \text{ — связь напряженности и потенциала в обе стороны.}$$

Связь силы и потенциальной энергии для любых потенциальных полей.

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'} \text{ и } \vec{E} \equiv \frac{\vec{F}'}{q'} \text{ и из } \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) \text{ мы получили } \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Тогда, повторив выкладки, из равенства $W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l})$ мы получим

$\vec{F} = -\vec{\nabla}W$. То есть, если $W(\vec{r})$ — это энергия или способность совершить

работу при перемещении из точки \vec{r} на бесконечность, то сила может быть выражена через энергию по формуле $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$.

Можно доказать и в обратную сторону, что из равенства $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$ следует $W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l})$. И действительно, рассмотрим интеграл:

$$-\int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{F}, d\vec{l}) = -\int_{\vec{r}}^{\infty} (-\vec{\nabla}W, d\vec{l}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{\nabla}W)_l dl = \int_{\vec{r}}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial l} \cdot dl = \int_{\vec{r}}^{\infty} dW = W|_{\vec{r}}^{\infty} = -W(\vec{r})$$

То есть, если для силы \vec{F} удалось подобрать такую функцию W , что $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$, то сила — потенциальна, а W — потенциальная энергия, соответствующая этой силе. Подробнее, почему $(\vec{\nabla}W)_l = \frac{\partial W}{\partial l}$, смотри в следующем вопросе.

Физический смысл градиента.

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции, например, φ равен $\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Проекция градиента на направление оси x — это

коэффициент при единичном векторе \vec{i} вдоль оси x , то есть $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Ось x можно направить произвольно вдоль любого направления l , следовательно, проекция градиента $\vec{\nabla}\varphi$ на произвольное направление l равна $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$.

Итак, проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению. Проекция максимальна на направление самого вектора. Следовательно, производная по направлению максимальна в направлении самого вектора градиента. То есть направление градиента — это направление, в котором максимальна производная по направлению, то есть направление, в котором функция быстрее всего возрастает.

Градиент как вектор показывает направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина вектора градиента равна производной от функции по этому направлению.

Дивергенция.

$$\text{div}(\vec{A}) \equiv (\vec{\nabla}, \vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Теорема Гаусса-Остроградского.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV = \oint_S (\vec{A}, d\vec{S})$$

Здесь $\oint_S (\vec{A}, d\vec{S}) \equiv \Phi_A$ — поток произвольного векторного поля \vec{A} , и при

вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_V (\vec{\nabla}, \vec{A}) \cdot dV = \oint_S (\vec{A}, d\vec{S})$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

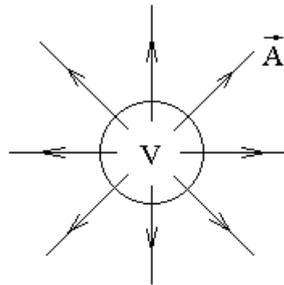
Физический смысл дивергенции.

Рассмотрим малый объем V :

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV \approx \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot \int_V dV = V \cdot \operatorname{div}(\vec{A}) \Rightarrow$$

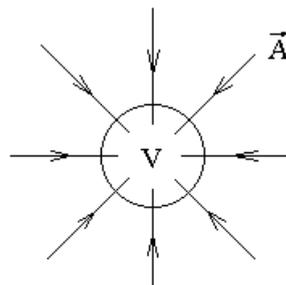
$$\operatorname{div}(\vec{A}) \approx \frac{\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) \cdot dV}{V} = \frac{\oint_S (\vec{A}, d\vec{S})}{V} = \frac{\Phi_A}{V} \Rightarrow$$

Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



то поток положительный $\Phi_A > 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}) > 0$.

Если же



то поток отрицательный $\Phi_A < 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{A}) < 0$.

Дивергенция — производная во все стороны.

Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме.

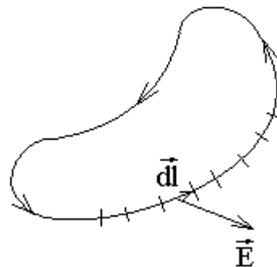
$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \left| \cdot \frac{1}{V} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi_E}{V} = \frac{4\pi Q}{V} \quad \left| V \rightarrow 0 \right. \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho$$

$$\text{В системе СИ:} \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Теорема о циркуляции электростатического поля E.

$$\Gamma_E \equiv \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_l E_l dl \quad \text{— определение циркуляции поля } \vec{E}.$$



Для вычисления циркуляции по контуру или по замкнутой линии эту замкнутую линию нужно разбить на большое число малых отрезков. Каждому отрезку соответствует вектор $d\vec{l}$. В области отрезка электрическое поле \vec{E} почти постоянно. Для каждого отрезка нужно вычислить $(\vec{E}, d\vec{l})$ и просуммировать соответствующие величины по замкнутому контуру.

Рассмотрим циркуляцию поля \vec{E} по замкнутому контуру:

$$\Gamma_E \equiv \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_l \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l} \right) = \frac{1}{q'} \oint_l (\vec{F}', d\vec{l}) = \frac{1}{q'} \oint_l dA' = \frac{1}{q'} A'_{I \rightarrow I}$$

Работу по перемещению заряда по замкнутому контуру $A'_{I \rightarrow I}$ можно найти из выражения для работы по перемещению из точки I в точку II:

$$A'_{I \rightarrow I} = A'_{I \rightarrow II} \Big|_{II \rightarrow I} = q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{|\vec{r}_I - \vec{r}_i|} - \frac{1}{|\vec{r}_{II} - \vec{r}_i|} \right) \Big|_{II \rightarrow I} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma_E = 0 \quad \text{или, что то же самое,} \quad \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \quad \text{— теорема о циркуляции}$$

электростатического поля.

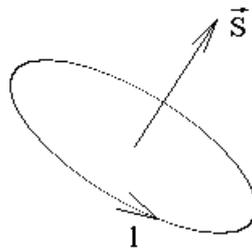
Ротор.

$$\operatorname{rot}(\vec{A}) \equiv [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Теорема Стокса.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int_S (\operatorname{rot}(\vec{A}), d\vec{S}) = \oint_l (\vec{A}, d\vec{l}),$$



Направление нормали к поверхности и направление обхода контура образуют правый винт.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_S ([\vec{\nabla}, \vec{A}], d\vec{S}) = \oint_l (\vec{A}, d\vec{l})$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

Физический смысл ротора.

Рассмотрим маленькую площадку S :

$$\int_S (\operatorname{rot}(\vec{A}), d\vec{S}) = \int_S (\operatorname{rot}(\vec{A}))_n dS \approx (\operatorname{rot}(\vec{A}))_n \cdot \int_S dS \approx S \cdot (\operatorname{rot}(\vec{A}))_n \quad \Rightarrow$$

$$(\operatorname{rot}(\vec{A}))_n \approx \frac{\int_S (\operatorname{rot}(\vec{A}), d\vec{S})}{S} = \frac{\oint_l (\vec{A}, d\vec{l})}{S} = \frac{\Gamma_A}{S}$$

Ротор — поверхностная плотность циркуляции.

Циркуляция — мера закрученности векторного поля.

Ротор производная вида:

