

Теорема о циркуляции электростатического поля E в дифференциальной форме.

По теореме о циркуляции электростатического поля для любого контура l :

$$\oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{S} \right| \quad | S \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\text{rot}(\vec{E}) \right)_n = 0 \quad \text{— для любого направления вектора нормали } \vec{n}. \text{ Тогда}$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = 0$$

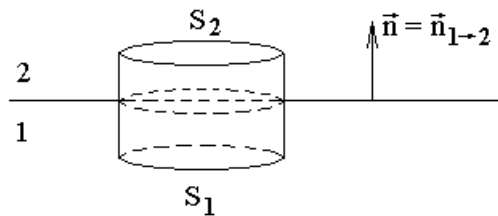
Скачок электрического поля E при переходе через заряженную поверхность.

Этот же вопрос можно было бы назвать "граничные условия для поля \vec{E} в вакууме", так как заряженную поверхность можно рассматривать, как границу двух объемов.

Любая поверхность вблизи выглядит плоской.

Рассмотрим скачок поля \vec{E} на плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда σ .

Рассмотрим цилиндр малой высоты с основаниями параллельными заряженной плоскости. Пусть основания цилиндра расположены с двух сторон от заряженной плоскости.



Если высота цилиндра мала, то потоком через боковую поверхность можно пренебречь. Тогда

$$\Phi \approx \Phi_{S_2} + \Phi_{S_1} = E_{2n}S - E_{1n}S,$$

где минус в последнем выражении вызван тем, что внешняя нормаль к цилиндру на площадке S_1 противоположна выбранному направлению нормали к заряженной плоскости $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен

$$\Phi = 4\pi Q = 4\pi\sigma S.$$

Сравнивая два выражения для потока Φ , получим

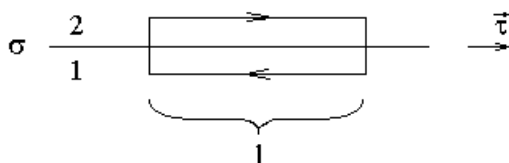
$$E_{2n}S - E_{1n}S = 4\pi\sigma S \quad \Rightarrow$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma,$$

где нормаль к границе \vec{n} смотрит из объема 1 в объем 2.

Рассмотрим теперь тангенциальную (по касательной к поверхности) составляющую поля \vec{E} при переходе через заряженную границу.

Рассмотрим прямоугольный контур в плоскости перпендикулярной заряженной поверхности.



Если высота прямоугольника мала, то вклад в циркуляцию вертикальных отрезков пренебрежимо мал. Тогда

$$\Gamma_E \approx \Gamma_2 + \Gamma_1 = E_{2l} \cdot l + E_{1l} \cdot l = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l,$$

где минус вызван тем, что на нижнем отрезке направление $d\vec{l}$ противоположно выбранному направлению единичного тангенциального вектора $\vec{\tau}$.

По теореме о циркуляции электростатического поля \vec{E} имеем $\Gamma_E = 0$. Сравнивая равенство $\Gamma_E = 0$ с другим только что полученным равенством $\Gamma_E = E_{2\tau} l - E_{1\tau} l$, находим:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

Здесь $\vec{\tau}$ — единичный вектор по касательной к заряженной поверхности.

Три формы электростатической теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi Q \\ \operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{array} \right. \quad \text{— электростатическая теорема Гаусса в интегральной,}$$

дифференциальной формах и для границы раздела.

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_l E_l dl = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{array} \right. \quad \text{— теорема о циркуляции электростатического поля E в}$$

интегральной, дифференциальной формах и для границы раздела.

Поля симметричных распределений зарядов. 1. Сферическая симметрия.

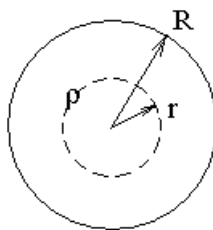
Рассмотрим задачу. Дан шар с радиусом R и объемной плотностью заряда ρ . Найти в любой точке пространства \vec{E} и φ .

Решение.

Сначала найдем поле \vec{E} , а затем φ .

Будем искать поле \vec{E} внутри шара на расстоянии r от центра шара $r \leq R$.

Рассмотрим сферу с радиусом r с центром, совпадающим с центром заряженного шара.



Для сферы радиусом r применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow$$

$$E(r) \cdot S(r) = 4\pi \cdot \rho V(r) \quad \Rightarrow$$

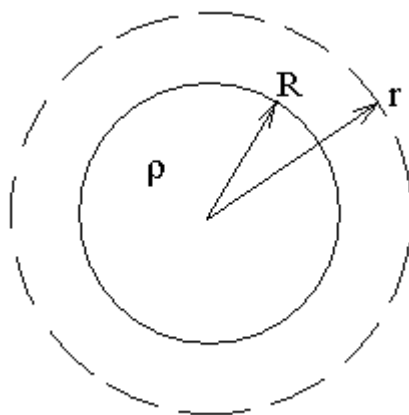
$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r \quad \text{при } r \leq R$$

В системе СИ: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad \text{при } r \leq R.$

Найдем теперь E при $r \geq R$.

Рассмотрим сферу $r \geq R$:



Для сферы $r \geq R$:

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Здесь объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, так как только в этой части объема $\frac{4}{3}\pi r^3$ есть

заряды. Тогда

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r^2} \quad \text{при } r \geq R.$$

$E = \frac{Q}{r^2}$ при $r \geq R$, где Q — полный заряд шара.

В системе СИ: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$ при $r \leq R$.

Найдем теперь потенциал φ .

Сначала найдем потенциал снаружи от заряженного шара при $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r} \quad \text{при } r \geq R.$$

В системе СИ: $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{4\pi\epsilon_0 r}$ при $r \geq R$.

Теперь найдем потенциал φ внутри шара при $r \leq R$.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^R E dr + \int_R^{\infty} E dr = \int_r^R \frac{4}{3}\pi\rho r dr + \varphi(R) = \\ &= \frac{2}{3}\pi\rho \cdot r^2 \Big|_r^R + \frac{4}{3}\pi\rho R^2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varphi = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \quad \text{при } r \leq R.$$

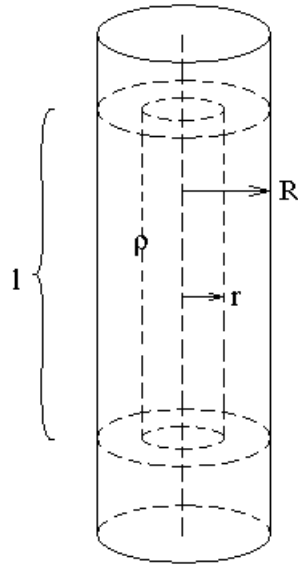
В системе СИ: $\varphi = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$ при $r \leq R$.

Поля симметричных распределений зарядов. 2. Цилиндрическая симметрия.

Задача. Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R с плотностью заряда ρ . Найти поле \vec{E} .

Решение.

Чтобы найти поле E внутри заряженного цилиндра рассмотрим применение теоремы Гаусса к соосному цилиндру с радиусом $r \leq R$ и длиной l .



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

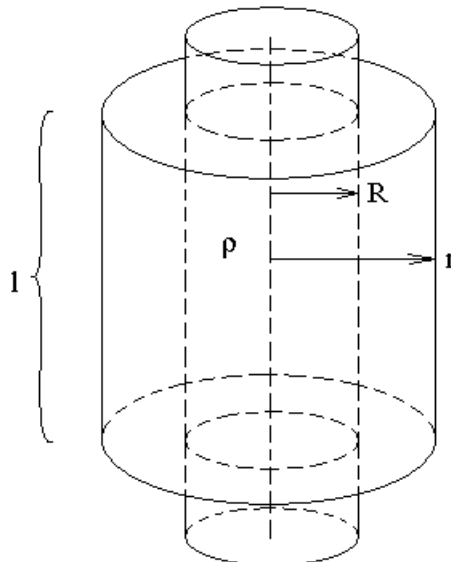
$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi \rho \cdot \pi r^2 l$$

$$E = 2\pi \rho r \quad \text{при } r \leq R.$$

В системе СИ: $E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad \text{при } r \leq R.$

 Найдем теперь поле \vec{E} снаружи заряженного цилиндра при $r \geq R$.
 Рассмотрим цилиндр с радиусом $r \geq R$ и высотой l .



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi \rho \cdot \pi R^2 l$$

Здесь объем $V = \pi R^2 l$, так как только в этой части объема $\pi r^2 l$ есть заряды. Тогда

$$E = 2\pi\rho \frac{R^2}{r} \quad \text{при } r \geq R.$$

В системе СИ: $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ при $r \geq R$.

Факультативная вставка.

Попробуем найти потенциал φ .

Пусть точка наблюдения находится снаружи заряженного цилиндра $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_l dl = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty 2\pi\rho \frac{R^2}{r} dr = 2\pi\rho R^2 \int_r^\infty \frac{dr}{r} = 2\pi\rho R^2 \ln(r) \Big|_r^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, так как $\ln(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$.

В реальном опыте потенциал не будет бесконечным, так как не бывает бесконечно длинных заряженных цилиндров.

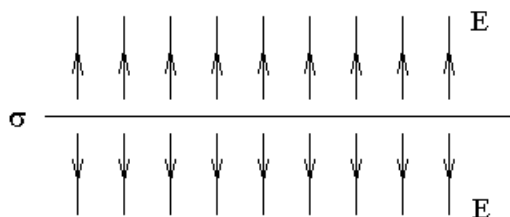
Если h — длина заряженного цилиндра, то при $r \gg h$ цилиндр выглядит, как точечный заряд. Тогда

$$E \approx \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \varphi \approx \frac{Q}{r}, \quad \text{где } Q = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h.$$

Конец факультативной вставки.

Поля симметричных распределений зарядов. 3. Плоская симметрия.

Бесконечная заряженная плоскость создает напряженность поля $E = 2\pi\sigma$ с каждой стороны от плоскости:



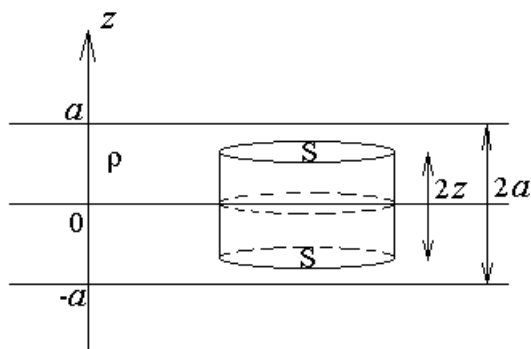
Это можно доказать, опираясь только на симметрию задачи и на скачок поля \vec{E} при переходе через заряженную поверхность: $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$.

Задача. Дан бесконечный слой толщиной $2a$ с плотностью заряда ρ . Найти поле \vec{E} .

Решение.

Сначала поищем напряженность внутри заряженного слоя при $|z| \leq a$.

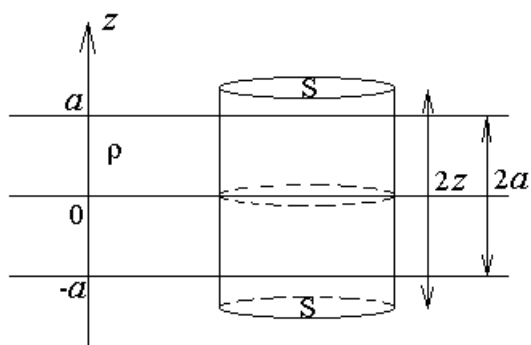
Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания S и высотой $2z$. Пусть цилиндр симметрично расположен относительно заряженного слоя.



$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho V \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho \cdot 2zS \quad \Rightarrow$$

$E_z = 4\pi\rho z$ при $|z| \leq a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Теперь найдем напряженность снаружи заряженного слоя при $|z| \geq a$.



$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho V \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho \cdot 2aS \quad \Rightarrow$$

$E = 4\pi\rho a$ при $|z| \geq a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Дифференциальное уравнение для потенциала.

$$4\pi\rho = \operatorname{div}(\vec{E}) = \operatorname{div}(-\vec{\nabla}\varphi) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi = -\Delta\varphi$$

$$\Delta \equiv (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{— оператор Лапласа или лапласиан.}$$

Тогда $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ — уравнение Пуассона — это и есть дифференциальное уравнение для потенциала φ .

Если $\rho = 0$, то

$\Delta\varphi = 0$ — уравнение Лапласа — уравнение для потенциала в области без зарядов.