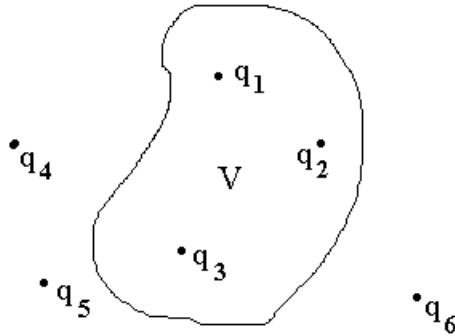


### Понятие о краевой задаче электростатики.

Рассмотрим систему зарядов и некоторый объем  $V$ . Пусть одна часть зарядов находится внутри объема  $V$ , а другая — снаружи.



Если известно расположение всех зарядов, то потенциал в любой точке найти легко:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Пусть расположение зарядов известно только внутри объема  $V$ , но не известно за его пределами.

Можно ли заменить неизвестное расположение зарядов снаружи объема какой-нибудь информацией о потенциале на границе объема, чтобы можно было единственным образом найти потенциал внутри объема?

В этом и состоит краевая задача электростатики.

#### Краевая задача Дирихле.

Уравнение  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  имеет единственное решение в объеме  $V$ , если в каждой точке границы  $S$  объема  $V$  задан потенциал  $\varphi(\vec{r})|_{\vec{r} \in S} \equiv \varphi|_S$  (не одинаковый потенциал во всех точках границы, а в каждой точке границы свое значение потенциала).

Подразумевается, что в каждой точке внутри объема  $V$  задана плотность зарядов  $\rho(\vec{r})$ .

#### Краевая задача Неймана.

Уравнение  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  имеет единственное решение в объеме  $V$ , если в каждой точке границы  $S$  задана производная  $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S$  от потенциала по нормали к границе и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

#### Краевая задача с границами в виде проводников.

Уравнение  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  имеет единственное решение в объеме  $V$ , если каждая граница объема — проводник, на каждой границе задан полный заряд  $Q_i$  и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

### **Краевая задача общего вида.**

Уравнение  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  имеет единственное решение в объеме  $V$ , если на каждой границе объема  $V$  задано одно из условий вида 1, 2 или 3 и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

### **Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.**

Предположим, что есть два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и для каждого из них выполнены граничные условия. Докажем, что два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  тождественны.

Рассмотрим напряженности  $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$  соответствующие этим двум решениям для потенциала. Покажем, что для тождественности  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  достаточно доказать, что в каждой точке объема  $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ . Это равенство эквивалентно равенству  $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ , так как  $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ . Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке границы выполнено условие  $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ . Откуда следует, что в этой точке границы некоторая функция, равная разности решений, равна нулю  $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$ . И так, производная от разности потенциалов во всех точках объема равна нулю  $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ , а сама разность равна нулю  $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$  хотя бы в одной точке. Тогда разность потенциалов во всех точках объема равна нулю  $(\varphi_1 - \varphi_2)|_V = 0$  или  $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$ , и два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  тождественны.

Докажем теперь равенство  $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$  для всех точек объема, и теорема о единственности решения для потенциала  $\varphi$  будет доказана. С этой целью докажем два равенства:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV &= \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) \\ \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Если мы их докажем, то получим  $\int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = 0$  или

$$\int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV = 0, \text{ то есть } \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0 \text{ в каждой точке объема.}$$

Докажем сначала первое равенство системы. Рассмотрим правую часть равенства:

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) dV \quad - \text{ по теореме}$$

Гаусса — Остроградского для векторного поля  $(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV = \int_V (\vec{\nabla}, (\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV =$$

Левая набла в последнем выражении — это производная от произведения  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  на  $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$\begin{aligned} &= \int_V (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2, \vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (-4\pi\rho - (-4\pi\rho)) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV. \end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0.$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду.

Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} &((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2))_{d\vec{S}} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2))_{\vec{n}} \cdot dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS \end{aligned}$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

1. Рассмотрим доказательство равенства  $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$

для задачи Дирихле, в которой  $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$  в любой точке границы  $S$ .

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0 \Rightarrow$  Первый сомножитель  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи Неймана.}$$

В краевой задаче Неймана  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_S = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_S$ , следовательно, на поверхности  $S$  второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи с границами в виде проводников.}$$

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как  $\varphi|_{S_i} = \text{const}_i$ , где  $S_i$  — поверхность  $i$ -го проводника границы, если граница многосвязная.

$$\text{Тогда } (\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_i} = \text{const}_i$$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе  $i$ -го проводника:

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS \end{aligned}$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника  $E_n = 4\pi\sigma$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда  $-E_{1n} + E_{2n} = -4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2) \cdot dS = \\
& = 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \oint_{S_i} \sigma_2 dS - \oint_{S_i} \sigma_1 dS \right) = 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (Q_{2i} - Q_{1i}).
\end{aligned}$$

Здесь  $Q_{1i}$  и  $Q_{2i}$  — полный заряд на  $i$ -ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем  $Q_{2i} = Q_{1i}$ . Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство  $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$  будет выполнено для каждой границы, так как в краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство  $\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0$  доказано для краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

### **К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.**

Дифференциальное уравнение Пуассона  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  с заданным потенциалом на границе  $\varphi|_S$  можно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения задачи доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле в электростатике всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют, если объем бесконечен. Если объем ограничен, то в этих задачах решение существует не всегда, а только при некоторых ограничениях на граничные условия на внешней границе объема.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода в одномерном случае:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' + f(x),$$

где  $\varphi(x)$  — неизвестная функция, для которой составлено уравнение;  $\lambda$  — параметр уравнения (константа);  $K(x, x')$  — ядро уравнения.

$$\int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' = f(x) \text{ — уравнение Фредгольма 1 рода.}$$

### **Основные свойства проводников в электростатическом поле.**

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля  $\vec{E}$  течет электрический ток.

Свойства проводников.

1.  $\vec{E}_{внутри} = 0$  — поле  $\vec{E}$  внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что  $\vec{E}_{внутри} \neq 0$  и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю  $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ , то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что поле  $\vec{E}_{внутри}$  внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем электрический ток.

2.  $0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla} \varphi_{внутри} = 0 \Rightarrow \varphi_{внутри} = const$  - каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

$$3. \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\rho_{внутри} = \text{div}(\vec{E}_{внутри}) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_{внутри} = 0 \Rightarrow$$

В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

$$4. \left\{ \begin{array}{l} E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_n = 4\pi\sigma - \text{нормальная составляющая}$$

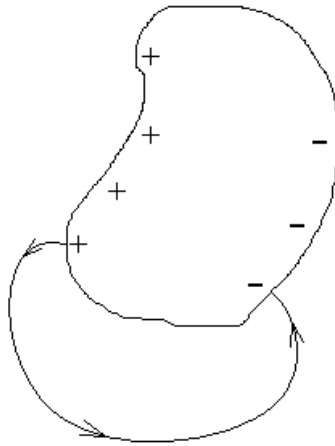
поля  $\vec{E}$  над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , где  $\vec{n}$  — нормаль, направленная из проводника наружу.

$$5. \left\{ \begin{array}{l} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_\tau = 0 - \text{тангенциальная}$$

составляющая поля  $\vec{E}$  над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля  $\vec{E}$  начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля  $\vec{E}$  потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

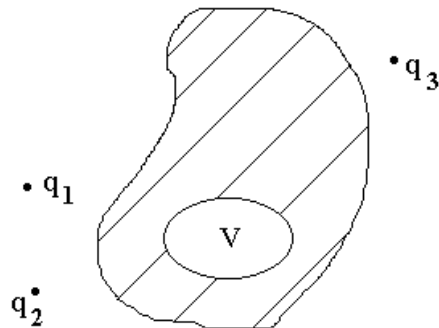
Невозможно:



### Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но хуже. Постоянное магнитное поле полностью экранировать может только сверхпроводник. Переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле и наоборот. Если же магнитное поле изменяется с низкой частотой, то оно проникает внутрь проводника и порождает в нем переменное электрическое поле той же частоты, что и магнитное поле.

Экранирование электростатического поля состоит в том, что если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости  $\vec{E} = 0$  независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости  $V$  внутри тела проводника. Граница  $S$  объема  $V$  эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен  $\varphi_0$ . Тогда  $\varphi|_S = \varphi_0$ .

Придумаем в объеме  $V$  решение для уравнения  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ . Придумаем решение в виде постоянного потенциала  $\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0$ .

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле  $\varphi|_S = \varphi_0$ . Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  в объеме  $V$ , так как в этом объеме нет зарядов:  $\rho = 0$ , и так как производные от постоянного потенциала  $\varphi_0$  равны нулю:  $\Delta\varphi = 0$ .

Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами

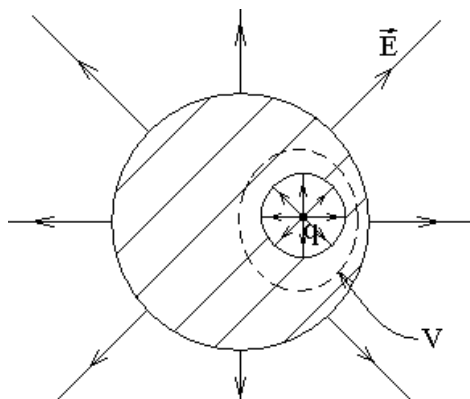
решение для потенциала в объеме полости  $V$  и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$$\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0 = const \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0$$

Внутри полости поле  $\vec{E}$  отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

### Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле  $\vec{E}$  везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд  $-q$ . Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе  $S$  объема  $V$ . Все точки поверхности  $S$  находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы  $S$  отсутствует поле  $\vec{E}$ . Тогда и поток поля  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  равен нулю:  $\Phi_E = 0$ . С учетом теоремы Гаусса  $\Phi_E = 4\pi Q$ . Тогда  $Q = 0$ , сумма зарядов внутри поверхности  $S$  равна нулю. Внутри объема проводника в электростатике зарядов нет. Следовательно, если в полости заряд  $q$ , то на границе полости находится заряд  $-q$ .

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд  $-q$ , то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд  $q$ .

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости  $V$ . В этой задаче в центре объема  $V$  находится точечный заряд  $q$ . Граница объема — это поверхность проводника, на которой задан полный заряд  $Q = -q$ . Ни в одной точке границы не задан потенциал, поэтому задача о потенциале в объеме полости имеет единственное решение с точностью до неизвестного слагаемого. Задача сферически симметрична. Поэтому поле в объеме полости можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом  $r$  меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда  $E = \frac{q}{r^2}$ .

Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд  $q$ , и граница является поверхностью проводника.



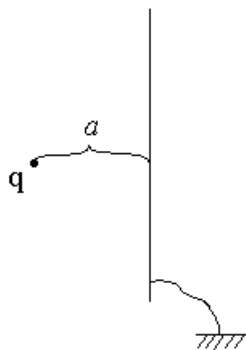
Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом  $r$  больше радиуса проводящего шара. Решение — поле точечного заряда  $E = \frac{q}{r^2}$ . Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле  $\vec{E}$  снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

### Метод изображений 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

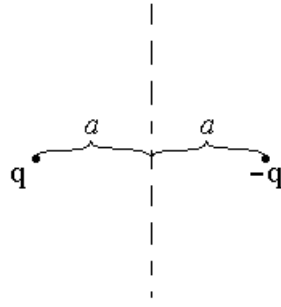
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд  $q$ , расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии  $a$ . Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говорится, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на опыте можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение  $-q$ , расположенный симметрично заряду  $q$  относительно плоскости.



Заряд-изображение  $-q$  вместе с зарядом  $q$  создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема  $V$  (левой половине пространства), в котором ищут решение для потенциала. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поле  $\vec{E}$  и поле  $\varphi$  в левой половине пространства — это поля двух точечных зарядов  $q$  и  $-q$ .