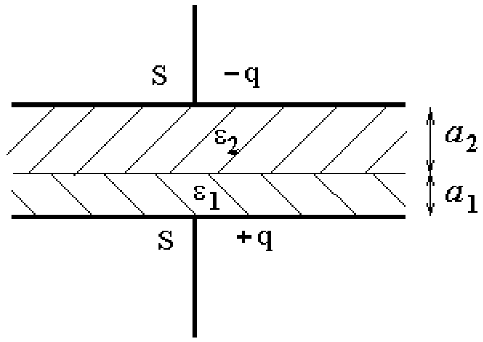
Простейшие задачи с диэлектриками 3. Плоская симметрия.

Рассмотрим задачу. Плоский конденсатор заполнен двумя тонкими слоями диэлектрика. Один слой имеет проницаемость ε_1 и толщину a_1, другой — ε_2, a_2. Площадь пластин S.

Найти емкость конденсатора: C=?

Решение.



Поместим на одну пластину заряд q, на другую поместим заряд $-q$.

Заметим, что внутри пластины проводника поле $\vec{D}=0$, так как по определению электрической индукции $\vec{D}\equiv\vec{E}+4\pi\vec{P}$, а в проводнике $\vec{E}=0$ и $\vec{P}=0$. $\vec{P}=0$, так как в проводнике нет связанных зарядов.

Из симметрии задачи вектор $\vec{D}$ направлен перпендикулярно пластинам. Над пластинами у вектора $\vec{D}$ есть только нормальная составляющая. Граничное условие для нормальной составляющей вектора $\vec{D}$ имеет вид:

$D_{2n}-D_{1n}=4\pi\sigma$,

где $D_{1n}=0$, если объем 1 - проводник; σ - поверхностная плотность свободных зарядов на поверхности проводника. Тогда

$D_{2n}=D=4\pi\sigma=4\pi\dfrac{q}{S}$ => $D=4\pi\dfrac{q}{S}$ - значение вектора электрической индукции одинаковое в обоих слоях диэлектрика.

С учетом $E=\dfrac{D}{\varepsilon}$ получаем:

$$E_1=\frac{4\pi q}{\varepsilon_1 S} \quad \text{и} \quad E_2=\frac{4\pi q}{\varepsilon_2 S}$$

При вычислении напряжения между пластинами конденсатора проинтегрируем напряженность вдоль линии перпендикулярной пластинам и получим:

$$U=\int_1^2 E_l dl=\int_1^2 E\,dl=E_1a_1+E_2a_2=\frac{4\pi q}{\varepsilon_1 S}a_1+\frac{4\pi q}{\varepsilon_2 S}a_2=\frac{4\pi q}{S}\cdot\left(\frac{a_1}{\varepsilon_1}+\frac{a_2}{\varepsilon_2}\right) \quad =>$$

$$C\equiv\frac{q}{U}=\frac{q}{\dfrac{4\pi q}{S}\cdot\left(\dfrac{a_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{a_2}{\varepsilon_2}\right)}=\frac{S}{4\pi\cdot\left(\dfrac{a_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{a_2}{\varepsilon_2}\right)}$$

Ответ: $$C = \frac{S}{4\pi\left(\dfrac{a_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{a_2}{\varepsilon_2}\right)}.$$

В системе СИ емкость умножается на $4\pi\varepsilon_0$, тогда получаем: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{a_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{a_2}{\varepsilon_2}}$.

Единственность решения краевой задачи электростатики в присутствии диэлектриков.

$$div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \quad => \quad div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 4\pi\rho.$$

Подставим сюда $\vec{E} = -grad(\varphi)$ и получим

$$div\left(\varepsilon \cdot grad(\varphi)\right) = -4\pi\rho \quad \text{или} \quad \left(\vec{\nabla}, \varepsilon\vec{\nabla}\varphi\right) = -4\pi\rho$$

Здесь ρ — плотность свободных зарядов. Это и есть дифференциальное уравнение для потенциала в присутствии диэлектриков.

Краевая задача. Рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет единственное решение в некотором объеме V, если на границе объема задано одно из 4-х условий: условие Дирихле, условие Неймана, условие с границами в виде проводников, условие общего вида. Это — те же граничные условия, что и без диэлектриков.

Единственность решения краевой задачи в случае изотропных диэлектриков, когда ε — число, а не матрица, доказывается аналогично случаю без диэлектриков. Только вместо равенств

$$\int\limits_V \left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right|^2 dV = \oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0$$

нужно доказывать равенства

$$\int\limits_V \varepsilon\left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right|^2 dV = \oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\varepsilon\vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0$$

Придумывание решений в задачах с проводниками и диэлектриками.

Единственность решения краевой задачи электростатики в задачах с проводниками без диэлектриков позволяет придумывать решения, например, методом изображений.

Аналогично можно придумывать решения в задачах с проводниками и диэлектриками. Обсудим, что нужно проверять для придуманного решения, чтобы оно оказалось решением задачи.

Нужно проверять, что в каждой точке объема придуманное решение для потенциала удовлетворяет уравнению $div\left(\varepsilon \cdot grad(\varphi)\right) = -4\pi\rho$ и что придуманное решение удовлетворяет граничным условиям.

Введем в рассмотрение векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ следующим образом: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ и $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Тогда уравнение $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$ будет эквивалентно двум уравнениям для векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}.$$

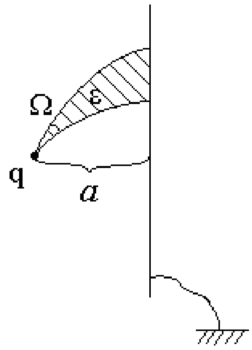
Кроме того, уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}$ на каждой границе между диэлектриками внутри интересующего нас объема принимают следующий вид:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}.$$

В результате для решения задачи достаточно придумать решение, которое удовлетворяет в рассматриваемом объеме V уравнению $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$ или паре уравнений $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \end{cases}$, а на границах диэлектриков внутри объема V вместо уравнения для потенциала придуманное решение должно удовлетворять условиям $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$. Кроме того, придуманное решение должно удовлетворять граничным условиям на границах рассматриваемого объема.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пусть есть заземленная проводящая плоскость и точечный заряд q на расстоянии a над плоскостью. В этой задаче без диэлектриков рассмотрим трубку линий поля $\vec{E}$. Линии начинаются на точечном заряде и заканчиваются на проводящей плоскости. Пусть некоторая трубка линий поля $\vec{E}$ выходит из точечного заряда q в телесный угол заданной величины Ω. Заполним эту трубку линий поля $\vec{E}$ диэлектриком с заданной проницаемостью ε. Пусть в этой новой задаче требуется найти поле $\vec{E}$ в каждой точке полупространства слева от проводящей плоскости.



Решение.

Придумаем решение для электрического поля в левом полупространстве и проверим, что придуманное решение удовлетворяет всем требованиям.

Придумаем, что потенциал φ в задаче с диэлектриком в каждой точке слева от заземленной плоскости пропорционален потенциалу φ_0 в задаче без диэлектрика.

$\varphi = \beta\varphi_0$, соответственно, $\vec{E} = \beta\vec{E}_0$

здесь константу β еще требуется определить.

Поле φ_0 и $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\varphi_0$ — это решение задачи о поле заряда над заземленной проводящей плоскостью. Это поле двух точечных зарядов — реального заряда q и заряда-изображения $-q$, симметрично расположенных относительно плоскости.

Проверим граничные условия для потенциала φ придуманного поля. Требуется, чтобы потенциал на плоскости проводника был бы равен нулю.

Поле φ_0 имеет нулевой потенциал на плоскости, тогда и пропорциональное ему придуманное поле $\varphi = \beta\varphi_0$ тоже имеет нулевой потенциал на плоскости.

Внутри однородного материала левого полупространства выполняется дифференциальное уравнение для потенциала

$$div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho,$$

так как правая часть равна нулю в левом полупространстве везде, кроме точечного заряда, а для пропорционального потенциала φ_0 везде кроме точечного заряда выполняется уравнение

$$div\left(grad\left(\varphi_0\right)\right) = \Delta\varphi_0 = 0.$$

$div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right)$ просто в $\varepsilon\beta$ раз больше, чем $div\left(grad\left(\varphi_0\right)\right)$.

Дифференциальное уравнение $div\left(\varepsilon \cdot grad\left(\varphi\right)\right) = -4\pi\rho$ для придуманного потенциала φ выполняется во всех точках полупространства за исключением, быть может, только точек границы диэлектрика и вакуума и точки расположения заряда q. В точках границы диэлектрика и вакуума нужно проверить условия $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$.

Граница диэлектрик-вакуум расположена по касательной к линиям поля $\vec{E}_0$ по условию задачи. Значит поле $\vec{E}$, как и пропорциональное ему поле $\vec{E}_0$, не имеет нормальной составляющей к границе диэлектрик-вакуум. Тогда нормальной составляющей не имеет и придуманное поле $\vec{D}$:

$D_{2n} = D_{1n} = 0$

С другой стороны на границе диэлектрик-вакуум нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда на этой границе выполнено равенство $D_{2n} - D_{1n} = 0$ — первое равенство системы $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$. Второе равенство этой системы выполнено, так как придуманное поле $\vec{E} = \beta\vec{E}_0$ имеет одинаковый коэффициент β в диэлектрике и в вакууме и аналогично полю $\vec{E}_0$ не имеет скачка на границе диэлектрик-вакуум.

Точечный заряд q — особая точка для потенциала φ и напряженности $\vec{E}$. Поэтому требуется проверка соответствия придуманного поля граничным условиям $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$ в точке расположения точечного заряда q.

Проверке требует только первое условие, которое превращается в интегральную теорему Гаусса $\Phi_D = 4\pi Q$ для малой сферы вокруг точечного заряда q. Второе условие следует из того, что придуманное поле $\vec{E}$ — не вихревое поле, а потенциальное, так как для него придуман потенциал φ.

В малой окрестности заряда q можно пренебречь полем всех других зарядов, кроме зарядов, находящихся в одной точке с зарядом q. Тогда в малой окрестности этой точки:

$$\vec{E}_0 = q\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad => \qquad \vec{E} = \beta\vec{E}_0 = \beta q\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим поток вектора $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ через малую сферу вокруг точечного заряда q:

$$\Phi_D = 4\pi Q \qquad =>$$

$$E \cdot (4\pi - \Omega) \cdot r^2 + \varepsilon E \cdot \Omega \cdot r^2 = 4\pi q.$$

Здесь $(4\pi - \Omega) \cdot r^2$ — площадь участка сферы, который находится в вакууме, $\Omega \cdot r^2$ — площадь участка сферы, который находится в диэлектрике. Следовательно

$$E = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Тогда $\beta = \dfrac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega}$ в выражении $\vec{E} = \beta\vec{E}_0$.

Окончательно получаем, что решением задачи с диэлектриком является поле:

$$\varphi = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega} \cdot \varphi_0 \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{4\pi}{4\pi - \Omega + \varepsilon\Omega} \cdot \vec{E}_0 ,$$

где φ_0 и $\vec{E}_0$ — это решение задачи о поле заряда над заземленной проводящей плоскостью, это поле двух точечных зарядов: реального заряда q и заряда-изображения $-q$ симметрично расположенных относительно плоскости.

Энергия взаимодействия зарядов в присутствии линейных диэлектриков.

Рассмотрим линейный диэлектрик, диэлектрик для которого связь векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ линейная:

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Здесь для анизотропной среды ε может быть симметричным тензором второго ранга.

Энергия взаимодействия зарядов — это способность электрических сил совершить работу. Работа внешних сил отличается знаком от работы электрических сил, если все перемещения медленные. Следовательно, потенциальная энергия электростатических сил равна работе внешних сил по сборке системы из зарядов и диэлектриков.

Работа внешних сил не зависит от того, каким образом собирать систему, иначе был бы возможен цикл с отличной от нуля работой — вечный двигатель.

Предложим алгоритм сборки, при котором затраченную работу удается вычислить.

Покажем, что эта работа равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i ,$$

где суммирование идет только по свободным зарядам.

Рассмотрим алгоритм сборки и некоторые сопутствующие соображения.

1). Принесем из бесконечности и поставим на свои места все диэлектрики без свободных зарядов.

Электрических сил на этом этапе нет. Следовательно, эта работа равна нулю.

2). Принесем на место каждого заряда q_i заряд $\frac{q_i}{N}$, где N — большое натуральное число.

Благодаря линейности диэлектрика все потенциалы примут значение $\frac{\varphi_i}{N}$, где φ_i — потенциалы в конце сборки.

3). Для линейности φ_i от q_i требуется, чтобы в процессе сборки диэлектрическая проницаемость оставалась неизменной $\varepsilon = const$. Это возможно только при постоянной температуре диэлектриков $T = const$.

Способность совершить работу при постоянной температуре — это свободная энергия системы. В таком случае, энергия системы, которую мы можем найти, — это именно свободная энергия.

4). Теперь принесем по второй порции зарядов $\frac{q_i}{N}$, затем по третьей порции, ..., по k-ой порции и т. д.

5). Введем обозначение $x \equiv \frac{k}{N}$, где $x \in [0,1]$ и $dx = \frac{1}{N}$.

Тогда текущие потенциалы в процессе сборки $\varphi = k\frac{\varphi_i}{N} = x \cdot \varphi_i$.

Очередная порция зарядов $\frac{q_i}{N} = q_i \cdot dx$.

6). Энергия заряда q_0 равна $q_0\varphi_0$ — равна работе по его доставке из бесконечности в точку с потенциалом φ_0, работе при неподвижных остальных зарядах.

Тогда работа сборки очередной порции зарядов — это сумма по всем зарядам величин вида $q_0\varphi_0$, где $q_0 \to (q_i dx)$, $\varphi_0 \to (x\varphi_i)$:

$$\sum_i (x\varphi_i) \cdot (q_i dx)$$

7). Работа сборки всей системы получается путем суммирования по x:

$$W = \int_0^1 \sum_i (x\varphi_i) \cdot (q_i dx) = \sum_i q_i\varphi_i \cdot \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$

8). Этот же результат можно объяснить очень коротко.

Потенциалы во время сборки растут линейно и в среднем равны $\frac{\varphi_i}{2}$. Поэтому часть всей работы, связанная с доставкой заряда q_i, равна $q_i\frac{\varphi_i}{2}$. Тогда

$$W = \sum_i q_i \frac{\varphi_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i .$$

9). Обсудим теперь, почему $W = \frac{1}{2} \cdot \sum_i q_i\varphi_i$ — сумма только по свободным зарядам, а не по свободным и связанным зарядам?

Чисто электрическая энергия — сумма по всем зарядам, но когда в молекуле сдвигаются заряды, в ней запасается и другая — упругая энергия сил, которые пытаются вернуть заряды на свои места.

С учетом этой упругой энергии полная энергия оказывается равной сумме только по свободным зарядам.

Емкостные коэффициенты образуют симметричную матрицу $C_{ik} = C_{ki}$.

Рассмотрим произвольные линейные диэлектрики и N проводников с зарядами q_i и потенциалами φ_i.

$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$ — энергия взаимодействия заряженных проводников, где

$q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k$ — связь зарядов на проводниках с потенциалами проводников, где C_{ik} — емкостные коэффициенты. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\varphi_k\varphi_i .$$

Если из бесконечности принести на проводники заряды δq_i, то изменение энергии можно найти двумя способами. Сравнивая два выражения, получим $C_{ik} = C_{ki}$.

Рассмотрим подробнее два выражения для энергии.

С одной стороны:

$$\delta W = \sum_i (\delta q_i)\cdot\varphi_i .$$

Подставим сюда $\delta q_i = \sum_k C_{ik}\delta\varphi_k$ и получим

$$\delta W = \sum_i (\delta q_i)\cdot\varphi_i = \sum_i\left(\sum_k C_{ik}\delta\varphi_k\right)\cdot\varphi_i = \sum_{i,k} C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i \qquad (1).$$

С другой стороны:

$$\delta W = \delta\left(\frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\sum_i\left(\sum_k C_{ik}\varphi_k\right)\cdot\varphi_i\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\sum_{i,k} C_{ik}\varphi_k\varphi_i\right).$$

Разложим правую часть, как дифференциал от произведения $\varphi_k\varphi_i$ и получим:

$$\delta W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\cdot\varphi_k\cdot\delta\varphi_i \qquad (2).$$

Приравняем два выражения 1 и 2 для δW и получим:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\cdot\varphi_k\cdot\delta\varphi_i .$$

Поменяем в правой части равенства индексы i и k и получим:

$$\sum_{i,k} C_{ik}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i = \sum_{i,k} C_{ki}\cdot\delta\varphi_k\cdot\varphi_i .$$

Пусть отличны от нуля только одно $\delta\varphi_k$ и одно φ_i, тогда от суммы $\sum_{i,k}$ останется только одно слагаемое. Равенство для этого слагаемого примет вид:

$$C_{ik} = C_{ki},$$

что и требовалось доказать.

Энергия электрического поля в линейных диэлектриках.

Математические выкладки и конечный результат этого вопроса вполне аналогичны выкладкам и результату вопроса "Энергия электрического поля" в вакууме.

Энергия поля — это та же энергия взаимодействия зарядов $W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$, только выраженная через напряженность электрического поля. Напомним, что в присутствии диэлектриков суммирование ведется только по свободным зарядам.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\int_V \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV$$

Подставим сюда выражение для объемной плотности свободных зарядов из равенства $div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$ => $\rho = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)$. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)\right)\cdot dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)\cdot dV.$$

Возьмем полученный интеграл по частям, перебросив производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя $\vec{D}$ на другой сомножитель φ.

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)\cdot dV = \frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\cdot\left(\vec{D},d\vec{S}\right) - \frac{1}{8\pi}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{D}\right)dV$$

При стремлении объема к бесконечности интеграл по поверхности стремится к нулю. Докажем это позднее. Тогда

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int_{V=\infty} \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{D}\right)dV$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$ и получим

$W = \int\limits_{V=\infty} \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}dV$ — энергия электрического поля в линейных диэлектриках. Доказывается для электростатического поля, предполагается для переменных электрических полей, все следствия из этого предположения согласуются с опытом. Следовательно, формула для энергии поля справедлива и для переменных электрических полей.

$w \equiv \frac{dW}{dV} = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}$ — объемная плотность энергии электрического поля в линейных диэлектриках.

Если диэлектрик не только линеен, но и изотропен, то $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ =>

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

Для нелинейной и (или) гистерезисной зависимости $\vec{D}$ от $\vec{E}$:

$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$ — без доказательства.

В СИ: $w = \dfrac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2}$ и $w = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$.

$$\oint_S \varphi\left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0.$$

Пусть V — шар, $r \to \infty$ =>

$$\begin{cases} \varphi \approx \dfrac{Q}{r} \\ D \approx \dfrac{Q}{r^2} \\ d\vec{S} \parallel \vec{D} \end{cases} \quad =>$$

$$\oint_S \varphi\left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \approx \oint_S \varphi \cdot D \cdot dS \approx \oint_S \frac{Q}{r} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dS = \frac{Q^2}{r^3} \cdot \oint_S dS = \frac{Q^2}{r^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi Q^2}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Электрические силы в диэлектриках.

Диполи стремятся к минимуму энергии $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$. Для этого они сначала поворачиваются вдоль поля $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$, а затем втягиваются в ту область пространства, где поле сильнее. В этом и состоит причина силы, действующей на диэлектрик, состоящий из диполей.

Примеры проявления таких сил: дым втягивается в электрическое поле, жидкий или твердый диэлектрик втягивается в заряженный конденсатор.

Рассмотрим нестрогую теорию сил в диэлектриках.

$\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ — сила, действующая на диполь одной молекулы, независимо от того, жесткий это диполь или диполь, наведенный электрическим полем.

$\vec{f} \equiv \dfrac{d\vec{F}}{dV}$ — объемная плотность сил в диэлектрике.

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = n \cdot \left\langle \vec{F} \right\rangle = n \cdot \left\langle \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E} \right\rangle$$

В последнем выражении заменим среднее от произведения на произведение средних значений

$$n \cdot \left\langle \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E} \right\rangle \approx n \cdot \left(\left\langle \vec{p} \right\rangle, \vec{\nabla}\right)\left\langle \vec{E} \right\rangle.$$

Эта замена не вполне правомерна, поэтому и теория на основе этой замены нестрогая.

Среднее значение напряженности по определению является напряженностью поля в диэлектрике:

$$\left\langle \vec{E} \right\rangle \equiv \vec{E} \qquad =>$$

$$\vec{f} = n \cdot \left(\left\langle \vec{p} \right\rangle, \vec{\nabla} \right) \vec{E} = \left(n \left\langle \vec{p} \right\rangle, \vec{\nabla} \right) \vec{E} = \left(\vec{P}, \vec{\nabla} \right) \vec{E} = \left(\chi \vec{E}, \vec{\nabla} \right) \vec{E}$$

Подставим выражение восприимчивости через проницаемость $\chi = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ и получим

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left(\vec{E}, \vec{\nabla} \right) \vec{E} \, .$$