

Электрические силы в диэлектриках (продолжение).

Выражение для объемной плотности сил можно привести к более удобному виду. С этой целью рассмотрим двойное векторное произведение и преобразуем его по правилу "бац минус цап":

$$\left[\vec{E}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla})$$

В левой и правой части равенства производные берутся только от одной из двух напряженностей \vec{E} . Чтобы не перепутать, эта напряженность подчеркнута и в правой части равенства.

Левая часть равенства равна нулю, так как $\left[\vec{\nabla}, \vec{E} \right] \equiv \text{rot}(\vec{E}) = 0$ по теореме о циркуляции электростатического поля \vec{E} в дифференциальной форме. Тогда и правая часть равенства равна нулю:

$$\vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = \vec{E}(\vec{E}, \vec{\nabla}) = (\vec{E}, \vec{\nabla})\vec{E}$$

Сравнивая последнее равенство с выражением для объемной плотности сил в диэлектриках $\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\vec{E}, \vec{\nabla})\vec{E}$, получим:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E})$$

Последнее выражение можно преобразовать с учетом

$$\vec{\nabla}(E^2) = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) + \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) = 2\vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{E}) \text{ и окончательно получить}$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2) \quad \text{— объемная плотность сил,}$$

действующих на диэлектрик в электростатическом поле.

$\text{grad}(E^2)$ направлен туда, куда быстрее всего возрастает E^2 .

Формула

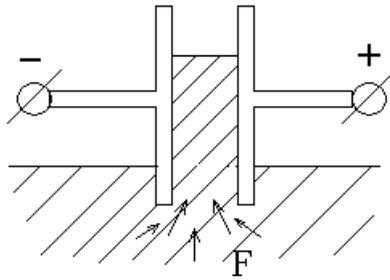
$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2)$$

показывает, что диэлектрик втягивается в электрическое поле.

$$\text{В системе СИ:} \quad \vec{f} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2} \cdot \text{grad}(E^2).$$

Хотя это выражение получено с учетом равенства $\text{rot}(\vec{E}) = 0$, которое справедливо только для полей неподвижных зарядов, считается, что объемная плотность сил примерно такая же и для переменных электромагнитных полей вплоть до оптических частот. Применимость для световых полей определяется тем, что длина волны светового поля примерно в тысячу раз больше размера диполя молекулы. Для более медленных электромагнитных полей неравенство выполнено еще сильнее.

Для примера приведем поле сил, втягивающих жидкий диэлектрик в заряженный конденсатор.



Силы действуют там, где электрическое поле неоднородно.

Понятие о строгой теории сил в диэлектриках.

Рассмотрим производную от произведения

$$\vec{\nabla}((\varepsilon - 1)E^2) = E^2 \cdot \vec{\nabla}(\varepsilon - 1) + (\varepsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2) = E^2 \cdot \vec{\nabla}\varepsilon + (\varepsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2)$$

Тогда

$$(\varepsilon - 1) \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \vec{\nabla}((\varepsilon - 1)E^2) - E^2 \cdot \vec{\nabla}\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}(E^2) = \frac{1}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}((\varepsilon - 1)E^2) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \vec{\nabla}\varepsilon \quad \text{или, что то же самое:}$$

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \cdot \text{grad}(E^2) = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad}((\varepsilon - 1)E^2) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon)$$

Два слагаемых в правой части равенства рассмотрим, как две разные силы:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad}((\varepsilon - 1)E^2) \\ \vec{f}_2 = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \end{cases}$$

Строгая теория сил в диэлектриках отличается только в первом слагаемом для силы:

$$\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot \text{grad} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \quad \text{— объемная плотность сил в}$$

строгой теории, где τ — плотность среды диэлектрика, производная по плотности среды рассматривается при постоянной температуре $T = const$.

В строгой теории в выражении для первой силы $(\varepsilon - 1)$ заменено на $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau$. Оба выражения примерно одинаковы, что следует из разложения диэлектрической проницаемости ε в ряд Тейлора по степеням плотности среды τ :

$$\varepsilon \approx 1 + \tau \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T + \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} \right)_{TT} + \dots \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - 1 \approx \tau \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T$$

Другое выражение сил в диэлектриках.

Покажем, что первое слагаемое в выражении

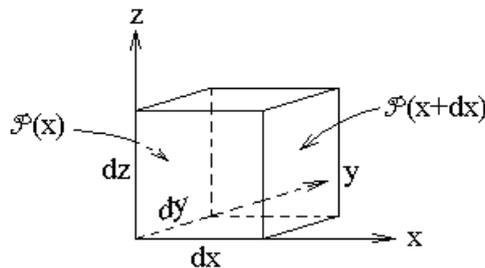
$$\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot grad \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot grad(\varepsilon)$$

эквивалентно давлению разному в разных точках диэлектрика.

Рассмотрим среду, давление \mathcal{P} в разных точках которой различно. Покажем, что это давление эквивалентно объемной плотности сил

$$\vec{f} = -grad(\mathcal{P}).$$

Рассмотрим маленький куб (или прямоугольный параллелепипед) с ребрами, направленными вдоль осей координат.



Рассмотрим давление на две грани перпендикулярные оси x . Площадь каждой грани равна $dy \cdot dz$. X -координаты граней равны x и $x+dx$. Сумма сил, действующих на эти грани со стороны давления, определяет x -проекцию силы, действующей на куб:

$$F_x = \mathcal{P}(x) \cdot dy \cdot dz - \mathcal{P}(x + dx) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Объемная плотность x -проекции силы:

$$f_x = \frac{F_x}{V} = \frac{-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \mathcal{P}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Тогда первое слагаемое

$$\vec{f}_I = \frac{1}{8\pi} \cdot grad \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right)$$

в выражении $\vec{f} = \frac{1}{8\pi} \cdot grad \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right)_T \tau \cdot E^2 \right) - \frac{E^2}{8\pi} \cdot grad(\varepsilon)$ эквивалентно

давлению

$$\mathcal{P}_I = -\frac{1}{8\pi} \cdot \tau \cdot E^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right),$$

которое никуда не втягивает диэлектрик и для несжимаемого диэлектрика может быть отброшено. И действительно, если диэлектрик сжать, то упругие

силы в диэлектрике уравновесят давление. Следовательно, сила \vec{f}_I только растягивает $\mathcal{P}_I < 0$ диэлектрик, но никуда его не втягивает.

Если диэлектрик несжимаемый (жидкий или твердый), то силу \vec{f}_I можно не учитывать. В таком случае можно считать, что на диэлектрик действует только сила \vec{f}_{II} :

$$\vec{f}_{II} = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) = -\frac{E^2}{8\pi} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon.$$

Силу \vec{f}_{II} можно заменить эквивалентным давлением \mathcal{P}_{II} , приложенным к границам диэлектрика, если диэлектрик однородный и несжимаемый. Обсудим это подробнее.

Если диэлектрик однородный, то $\vec{\nabla} \varepsilon = 0$. Следовательно, $\vec{f}_{II} = 0$ везде, кроме границ диэлектрика, где ε испытывает скачок.

На границе диэлектрика $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \infty$, отсюда следует, что $\vec{\nabla} \varepsilon$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, $\vec{\nabla} \varepsilon = \infty$ и $\vec{f}_{II} = \infty$. Бесконечно большая объемная плотность сил в бесконечно тонком поверхностном слое диэлектрика эквивалентна поверхностной плотности сил или давлению на границу диэлектрика.

Найдем это давление.

Рассмотрим малый участок границы диэлектрика. Направим ось z перпендикулярно границе. Градиент диэлектрической проницаемости $\vec{\nabla} \varepsilon$ и объемная плотность сил \vec{f}_{II} также будут перпендикулярны границе.

Рассмотрим границу диэлектрика, как переходный слой конечной толщины h . Если ось z направлена из объема 1 в объем 2, то

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{II_{1 \rightarrow 2}} &= \frac{F_{IIz}}{S} = \frac{\int_V f_{IIz} \cdot dV}{S} = \frac{\int_S f_{IIz} \cdot S \cdot dz}{S} = \int_V f_{IIz} dz = \\ &= \int_0^h f_{IIz} dz = \int_0^h \left(-\frac{E^2}{8\pi} \cdot \text{grad}(\varepsilon) \right)_z \cdot dz = -\frac{1}{8\pi} \int_0^h E^2 \cdot (\text{grad}(\varepsilon))_z \cdot dz = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^h E^2 \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot dz = -\frac{1}{8\pi} \int_0^h E^2 d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon. \end{aligned}$$

Зависимость подинтегрального выражения от диэлектрической проницаемости ε можно найти с учетом того, что при переходе через границу диэлектрика сохраняется тангенциальная составляющая поля E_τ , так как $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$, и сохраняется нормальная составляющая поля D_n , так как $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma = 0$. На границе нет свободных зарядов $\sigma = 0$. Тогда

$$\mathcal{P}_{II \rightarrow 2} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} E^2 d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (E_n^2 + E_\tau^2) \cdot d\varepsilon = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon^2} + E_\tau^2 \right) \cdot d\varepsilon.$$

Интеграл может быть разбит на сумму двух интегралов. Величины D_n и E_τ не изменяются внутри переходного слоя границы диэлектрика и могут быть вынесены за пределы соответствующих интегралов. Тогда

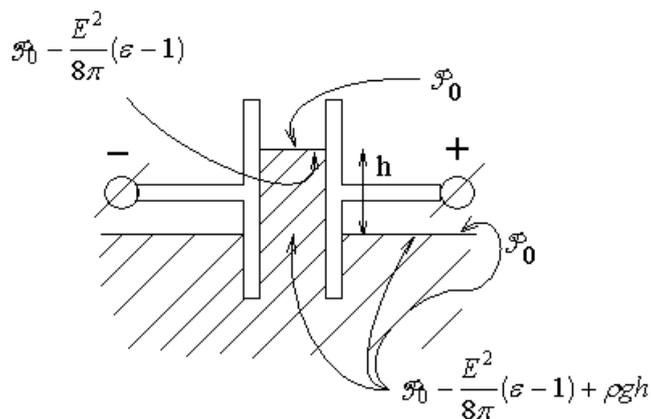
$$\mathcal{P}_{II \rightarrow 2} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon^2} + E_\tau^2 \right) \cdot d\varepsilon = -\frac{D_n^2}{8\pi} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} - \frac{E_\tau^2}{8\pi} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\varepsilon.$$

Окончательно получаем:

$$\mathcal{P}_{II \rightarrow 2} = \frac{D_n^2}{8\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + \frac{E_\tau^2}{8\pi} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Это давление приложено к границе двух диэлектриков и направлено в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Рассмотрим втягивание жидкого диэлектрика в заряженный конденсатор, считая, что есть только сила \vec{f}_{II} .



Пусть атмосферное давление равно \mathcal{P}_0 . На границе диэлектрика внутри заряженного конденсатора есть только тангенциальная составляющая напряженности электрического поля $E_\tau = E$. В таком случае к границе

диэлектрика приложено давление $\mathcal{P}_{II} = \frac{E^2}{8\pi} (\varepsilon - 1)$, которое тянет диэлектрик за

его верхнюю границу вверх. Следовательно, под границей диэлектрика давление меньше атмосферного на величину \mathcal{P}_{II} . Под границей жидкого диэлектрика давление растет с глубиной h , как ρgh . Если h — высота подъема диэлектрика в конденсаторе, то внутри конденсатора давление на глубине h равно давлению снаружи конденсатора на той же высоте и равно

$\mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi} (\varepsilon - 1) + \rho gh$. Это давление снаружи конденсатора будет как под границей диэлектрика, так и над его границей. Электрического поля снаружи

конденсатора почти нет, поэтому нет и электрического давления на поверхность жидкости. То есть давление над поверхностью тоже

$\mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh$, но с другой стороны — это атмосферное давление. Тогда

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0 - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) + \rho gh = 0 \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{E^2(\varepsilon - 1)}{8\pi\rho g} \quad \text{— высота подъема жидкого диэлектрика в заряженном}$$

конденсаторе.

$$\text{В системе СИ: } h = \frac{\varepsilon_0 E^2 (\varepsilon - 1)}{2\rho g}.$$

Поляризация неполярных диэлектриков.

Неполярные диэлектрики состоят из молекул, которые не имеют жесткого дипольного момента.

Дипольный момент молекулы возникает только под действием электрического поля \vec{E} :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}, \text{ где } \alpha \text{ — поляризуемость молекулы.}$$

На первом самом низком уровне строгости получим.

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle = n\alpha \langle \vec{E} \rangle = n\alpha \vec{E}$$

Сравним это с $\vec{P} = \chi \vec{E}$ и получим, что $\chi = n\alpha$.

Подставим сюда выражение диэлектрической восприимчивости χ через диэлектрическую проницаемость ε :

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \text{ и получим:}$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = n\alpha \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon - 1 = 4\pi n\alpha$, здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, n — концентрация молекул, α — поляризуемость каждой молекулы.

Концентрация молекул n пропорциональна плотности среды τ . Тогда изменение диэлектрической проницаемости ε с изменением плотности среды происходит так, что отношение $\frac{\varepsilon - 1}{\tau}$ остается постоянным:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const.}$$

Как показывает опыт, зависимость $\varepsilon - 1$ от τ линейная только для газов с низкой плотностью. При увеличении плотности газа и тем более при переходе к

жидкой или твердой фазе диэлектриков отклонение от линейности становится очень заметным.

В более точном приближении нужно учесть отличие действующего на молекулу поля \vec{E}' от среднего поля в диэлектрике \vec{E} .

Представьте себе, что молекулы диэлектрика расположены вплотную друг к другу. В таком случае, чтобы найти действующее на молекулу поле \vec{E}' , нужно из среднего поля в диэлектрике \vec{E} вычесть поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя. Дело в том, что поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя, не действует на молекулу, так как на нее действует только внешнее по отношению к молекуле поле.

Чтобы найти поле, действующее на молекулу диэлектрика, нам сначала потребуется найти поле \vec{E}_P однородно поляризованного шара.

Если связанные заряды перемещаются, то возникает поляризация среды. Однородно поляризованный шар можно представить себе, как два шара с плотностями зарядов $+\rho$ и $-\rho$, таких что шар с плотностью заряда $+\rho$ сдвинут на малый отрезок \vec{l} относительно шара с плотностью заряда $-\rho$.

Дипольный момент этих двух шаров равен

$$\vec{p} = q\vec{l} = \rho V \vec{l}.$$

Если разделить его на объем шара V , то получится поляризация диэлектрика

$$\vec{P} = \rho \vec{l}.$$

Поле в любой точке внутри поляризованного шара можно найти, как сумму полей двух заряженных шаров. Пусть \vec{r}_- — вектор из центра шара с плотностью заряда $-\rho$ в точку наблюдения внутри поляризованного шара, а \vec{r}_+ — вектор из центра шара с плотностью заряда $+\rho$ в ту же точку наблюдения.

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{l} + \vec{r}_+ = \vec{r}_- & \Rightarrow \vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l} \Rightarrow \\ \vec{E}_P = \vec{E}_{+\rho} + \vec{E}_{-\rho} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}_+ + \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec{r}_- = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{l} = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}, \end{aligned}$$

где $\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$ поле внутри шара с плотностью заряда ρ .

Тогда величина электрического поля в любой точке поляризованного шара:

$$\vec{E}_P = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Следовательно, если мы мысленно удалим шар из поляризованного диэлектрика, так что в оставшемся диэлектрике связанные заряды не сдвинутся, то поле в образовавшейся полости будет равно $\vec{E} - \vec{E}_P = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$, где \vec{E} — поле в диэлектрике до удаления шара, \vec{P} — поляризация диэлектрика. И

действительно, вместе с шаром там должно быть поле \vec{E} , значит, без шара поле будет $\vec{E} - \vec{E}_P$.

Заметим, что поле в шаровой полости не зависит от радиуса удаляемого шара. На каждую молекулу диэлектрика в среднем приходится объем равный $1/n$, где n — концентрация молекул. Удалим из диэлектрика шар вокруг интересующей нас молекулы именно с таким объемом. Это — то же самое, что удалить из диэлектрика одну интересующую нас молекулу. Если рассуждать не слишком строго, то поле в образовавшейся шаровой полости и будет полем, действующем на молекулу:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Более строго нужно удалить шар произвольного радиуса и вернуть на место все молекулы этого шара, кроме центральной молекулы. Можно показать, что в случае случайного расположения молекул и в случае кубической симметрии диэлектрического кристалла все молекулы шара кроме центральной создают в центре шара нулевое электрическое поле. Эту часть доказательства можно найти в лекциях за 2012 — 2014 годы или учебниках по электричеству, например:

1. И. Е. Тамм. Основы теории электричества.

2. Д. В. Сивухин. Курс общей физики. Том 3. Электричество.

Дипольный момент молекулы \vec{p} наводится пропорционально именно действующему на молекулу полю \vec{E}' :

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}' = \alpha \cdot \left(\vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P} \right).$$

Умножим это равенство на концентрацию молекул и получим в левой части равенства поляризацию среды \vec{P} :

$$\vec{P} = n\alpha \cdot \left(\vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \frac{n\alpha\vec{E}}{1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha} = \chi\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi n\alpha}{1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha} = \frac{1 + \frac{8}{3}\pi n\alpha}{1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha}$$

Обозначим $\beta \equiv \frac{4}{3}\pi n\alpha$, тогда

$$\varepsilon = \frac{1 + 2\beta}{1 - \beta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \beta\varepsilon = 1 + 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad \Rightarrow$$

$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi n \alpha$ — формула Клаузиуса — Моссотти, в системе СИ:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n \alpha}{3}.$$

Здесь n — концентрация молекул, α — поляризуемость одной молекулы.

Концентрация молекул пропорциональна плотности среды $n \sim \tau$, тогда

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \text{const}$$

при изменении плотности диэлектрика величина $\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ остается постоянной.

Для переменных полей аналогичная формула называется формулой Лоренца — Лоренца (или формулой Лоренц — Лорентца).

Поляризация полярных газообразных диэлектриков.

Молекулы полярных диэлектриков являются жесткими диполями, такими как, например, молекула HCl.

Для этих молекул во внешнем электрическом поле появляется и наведенный диполь, но его величина гораздо меньше величины жесткого диполя, поэтому наведенными диполями мы будем пренебрегать.

Жесткие диполи молекул стремятся к минимуму потенциальной энергии, то есть стремятся повернуться по полю \vec{E} , так как энергия диполя $W = -(\vec{p}, \vec{E})$.

Это с одной стороны, а с другой стороны, тепловые столкновения молекул стремятся разбросать диполи по направлениям случайным образом.

В результате совместного влияния этих двух факторов и происходит поляризация полярных газообразных диэлектриков во внешнем электрическом поле.

Пусть p_0 — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Пусть $d\xi$ — вероятность того, что диполь направлен в телесный угол $d\Omega$.

Согласно распределению Больцмана эта вероятность пропорциональна экспоненте $e^{-\frac{W}{kT}}$. Кроме того она пропорциональна величине телесного угла $d\Omega$. Тогда

$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega$, где малый телесный угол можно выразить через углы сферической системы координат $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$. Тогда

$$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$