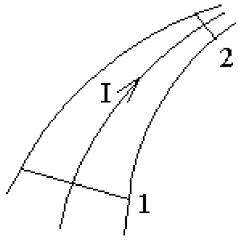
<u>Закон Ома для участка цепи.</u>

(в интегральной форме и с учетом ЭДС)



Возьмем закон Ома в дифференциальной форме

$\vec{j} = \lambda \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{стор} \right)$, разделим его на удельную проводимость λ и получим

$\vec{E} + \vec{E}_{стор} = \dfrac{1}{\lambda} \vec{j}$.

Подействуем на это равенство оператором $\int\limits_1^2 \left(\cdot, d\vec{l} \right)$, взятым вдоль тока $d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j}$, и получим:

$$\int\limits_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l} \right) + \int\limits_1^2 \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l} \right) = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\lambda} \vec{j}, d\vec{l} \right).$$

Здесь первый интеграл — это напряжение между точками участка цепи 1 и 2:

$$U \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l} \right).$$

Второй интеграл называют электродвижущей силой или ЭДС:

$\mathcal{E} \equiv \int\limits_1^2 \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l} \right)$ — определение ЭДС — электродвижущей силы.

Третий интеграл можно преобразовать с учетом того, что $d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{j}$:

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\lambda} \vec{j}, d\vec{l} \right) = \int\limits_1^2 \frac{1}{\lambda} \cdot j \cdot dl = \int\limits_1^2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{I}{S_\perp} \cdot dl = I \cdot \int\limits_1^2 \frac{dl}{\lambda \cdot S_\perp}.$$

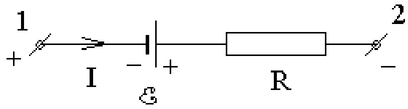
Интеграл в правой части равенства представляет собой сумму сопротивлений последовательно включенных резисторов с длинами dl и площадями поперечного сечения $S_\perp$:

$R = \int\limits_1^2 \dfrac{dl}{\lambda \cdot S_\perp}$ — сопротивление участка цепи.

Тогда

$U + \mathcal{E} = RI$ — закон Ома для участка цепи.

Обсудим правило знаков в этой формуле.



На рисунке все величины положительны:

$U > 0$, если $\varphi_1 > \varphi_2$;

$I > 0$, если ток течет от точки 1 к точке 2;

$\mathcal{E} > 0$, если при движении от 1 к 2 мы сначала встречаем "–" клемму ЭДС, а затем встречаем "+" клемму.

В металле ток переносится отрицательными зарядами. Направление движения отрицательных зарядов противоположно направлению тока, поэтому направление тока иногда называют техническим направлением тока. Хотя, техническое направление тока полностью совпадает с физическим определением направления тока.

Правила или уравнения Кирхгофа.

Рассмотрим сложную электрическую цепь. Место, где токи разветвляются, называется узлом электрической цепи. Участком цепи будем называть отрезок от одного узла до соседнего узла. Контуром цепи будем называть замкнутую саму на себя последовательность участков цепи. Начало и конец контура совпадают.

Есть два типа уравнений Кирхгофа.

1). Уравнение первого типа — это уравнения для контуров.

Для каждого участка цепи, например, для участка с номером k можно записать закон Ома для участка цепи:

$\mathcal{E}_k + U_k = R_k I_k$.

Просуммируем такие равенства для контура цепи. С учетом того, что при обходе по замкнутому контуру сумма падений напряжений равна нулю $\sum\limits_k U_k = 0$ получим:

$\sum\limits_k \mathcal{E}_k = \sum\limits_k R_k I_k$ — уравнение Кирхгофа первого типа.

Сумма ЭДС при обходе по контуру равна сумме падений напряжений на пассивных элементах контура. В такой формулировке уравнения Кирхгофа первого типа будут удобны для рассмотрения цепей переменного тока. Здесь $R_k I_k$ — это падение напряжения на *k*-ом резисторе.

2). Уравнения второго типа — это уравнения для узлов.

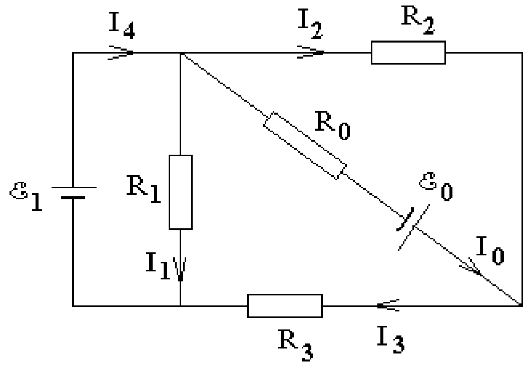
$\sum\limits_i I_i = 0$ — уравнение Кирхгофа второго типа.

Здесь токи, втекающие в узел, и токи, вытекающие из узла, рассматриваются, как токи разных знаков.

Сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из узла.

Пример решения задачи с помощью уравнений Кирхгофа.

Найти все токи в схеме:



Этапы решения задачи.

1). Выберем положительные направления тока на каждом участке цепи и обозначим токи.

2). Выберем столько контуров обхода, сколько элементарных неделимых по площади контуров с токами. Выберем положительное направление обхода каждого контура.

3). Для каждого выбранного контура составим уравнение вида $\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_k R_k I_k$ с учетом правила знаков. ЭДС входит в уравнение со знаком "+", если при обходе контура сначала встречаем "–" клемму ЭДС, а затем — "+" клемму; произведение $R_k I_k$ входит в уравнение со знаком "+", если направление тока совпадает с направлением обхода контура.

4). Запишем недостающее число уравнений вида $\sum_i I_i = 0$, где втекающие в узел токи и вытекающие токи нужно брать с разными знаками.

В нашей задаче 5 неизвестных токов. Составим 3 уравнения для контуров и два недостающих уравнения для узлов. Для определенности будем обходить элементарные неделимые по площади контуры по часовой стрелке.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = 0 \cdot I_4 + R_1 I_1 \\ \mathcal{E}_0 = R_0 I_0 + R_3 I_3 - R_1 I_1 \\ -\mathcal{E}_0 = R_2 I_2 - R_0 I_0 \\ I_4 = I_0 + I_1 + I_2 \\ I_3 = I_0 + I_2 \end{cases}$$

Факультативная вставка.

В некоторых сложных схемах электрическая цепь не может быть представлена на плоскости без пересечений проводников. В таком случае теряет смысл понятие элементарных неделимых по площади контуров с токами и количество независимых уравнений для контуров и узлов нужно определять иначе.

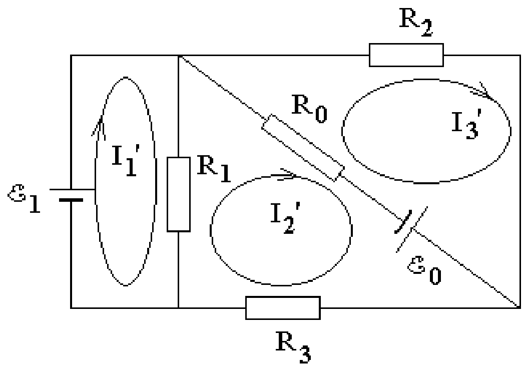
Можно доказать, что число независимых уравнений для узлов всегда на единицу меньше общего числа узлов. Число независимых уравнений для контуров можно тогда найти, как разность числа неизвестных токов и числа независимых уравнений для узлов. При составлении уравнений для контуров нужно следить за тем, чтобы каждое следующее уравнение содержало хотя бы один участок цепи, не входящий в предыдущие уравнения. Иначе уравнения для контуров окажутся линейно зависимыми.

Конец факультативной вставки.

Метод контурных токов.

Рассмотрим элементарные неделимые по площади контуры и предположим, что в каждом из них течет свой контурный ток.

Направим все контурные токи в одну сторону: все по часовой стрелке или все против часовой стрелки.



На общем для двух контуров участке цепи ток равен разности двух контурных токов.

В таком случае уравнения Кирхгофа для узлов будут выполнены автоматически, а уравнений для контуров автоматически окажется столько же, сколько и неизвестных контурных токов.

Рассмотрим пример решения той же задачи методом контурных токов.

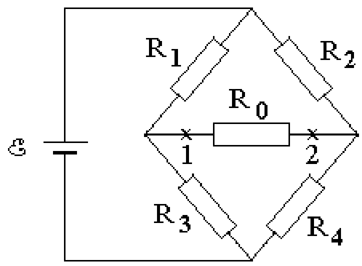
Составим уравнения Кирхгофа для контуров, в которых токи участков цепи выражены через контурные токи:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = 0 \cdot I_1' + R_1 \cdot \left(I_1' - I_2'\right) \\ \mathcal{E}_0 = R_0 \cdot \left(I_2' - I_3'\right) + R_3 I_2' + R_1 \cdot \left(I_2' - I_1'\right) \\ -\mathcal{E}_0 = R_2 I_3' + R_0 \cdot \left(I_3' - I_2'\right) \end{cases}$$

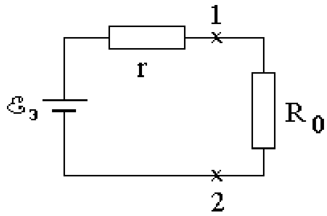
Метод эквивалентной ЭДС.

Этот метод удобен в том случае, если нужно найти ток только на одном из участков цепи. Сопротивление этого участка R_0 цепи будем называть сопротивлением нагрузки.

Пусть нужно найти ток I_0 через сопротивление R_0 в следующей схеме:



Оказывается, что ток можно найти по формуле $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}_э}{R_0 + r}$, где эквивалентная ЭДС $\mathcal{E}_э$ и внутреннее сопротивление r соответствуют некоторой эквивалентной схеме



Две схемы эквивалентны в том смысле, что можно подобрать такие значения $\mathcal{E}_э$ и r, что для каждой величины сопротивления R_0 обе схемы создают в этом резисторе одинаковый ток. Величины $\mathcal{E}_э$ и r не зависят от R_0.

Если во второй схеме нагрузка имеет бесконечное сопротивление $R_0 = \infty$ (разрыв вместо нагрузки R_0), то напряжение на нагрузке равно эквивалентной ЭДС $\mathcal{E}_э$. Тогда величину $\mathcal{E}_э$ можно найти, как напряжение на нагрузке в первой схеме, если нагрузка R_0 имеет бесконечное сопротивление.

Внутреннее сопротивление второй схемы r (оно же внутреннее сопротивление первой схемы) можно найти, как сопротивление между контактами 1 и 2 первой схемы, если каждую ЭДС первой схемы заменить коротким замыканием, а вместо нагрузки оставить разрыв.

Найдем напряжение на бесконечной нагрузке в первой схеме (величину эквивалентной ЭДС), как разность потенциалов в точках 1 и 2. Будем отсчитывать потенциалы относительно нижнего провода схемы. Тогда

$$\begin{cases} \varphi_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_3}{R_1 + R_3} \\ \varphi_2 = \mathcal{E}\dfrac{R_4}{R_2 + R_4} \end{cases} \qquad => \qquad \mathcal{E}_э = U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} \cdot \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right)$$

Сопротивление между контактами 1 и 2 первой схемы, если каждую ЭДС первой схемы заменить коротким замыканием, а вместо нагрузки оставить разрыв:

$$r = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

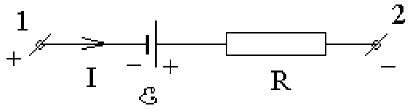
Ток I_0 через нагрузку R_0 находим через полученные величины $\mathcal{E}_э$ и r по формуле:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_э}{R_0 + r}.$$

Закон Джоуля — Ленца для участка цепи и его обоснование на основе закона сохранения энергии.

$N = \mathcal{E}I + UI$ — закон Джоуля — Ленца. Здесь N — мощность, идущая на нагрев (ленц-джоулево тепло); $\mathcal{E}$ — ЭДС на участке цепи; U — напряжение, приложенное снаружи к участку цепи; I — сила тока на участке цепи.

Правила знаков для ЭДС, напряжения и тока такие же, как и в законе Ома для участка цепи:



На рисунке все величины положительны:

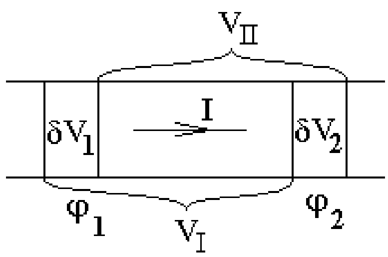
$U > 0$, если $\varphi_1 > \varphi_2$;

$I > 0$, если ток течет от точки 1 к точке 2;

$\mathcal{E} > 0$, если при движении от 1 к 2 мы сначала встречаем "–" клемму ЭДС, а затем встречаем "+" клемму.

Законы физики не доказываются, а проверяются на опыте. Закон Джоуля — Ленца стоит в этом смысле несколько особняком, так как он может быть выведен из закона сохранения энергии. Видимо, этот вывод считается недостаточно строгим, поскольку он опирается на микроскопическое рассмотрение движения зарядов.

Рассмотрим проводник, в котором нет сторонних сил. Пусть к проводнику приложено напряжение U, и по нему течет постоянный ток I.



Пусть в некотором объеме V_I все заряды, создающие ток, имеют одинаковую скорость. Пусть за малый промежуток времени δt объем с зарядами V_I перемещается в положение V_{II}. Энергия общей части этих двух объемов зарядов не изменяется. Пусть в объеме δV_1 находится заряд δq. Тогда изменение энергии зарядов при перемещении из положения V_I в положение V_{II} равно изменению энергии заряда δq при перемещении из объема δV_1 сечения проводника с потенциалом φ_1 в объем δV_2 сечения с потенциалом φ_2.

$q\varphi$ — энергия заряда q в точке с потенциалом φ, тогда потеря энергии зарядов при перемещении из положения V_I в положение V_{II}:

$$\delta q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = \delta q \cdot U = \delta t \cdot \frac{dq}{dt} \cdot U = UI \cdot \delta t$$

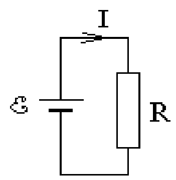
Если эту потерю электрической энергии разделить на время, за которое происходит потеря, то получим мощность электрических сил:

$N = UI$.

Мощность расходуется на нагревание проводника — это так называемое ленц-джоулево тепло.

Заметим, что в процессе вывода этой формулы мы нигде не использовали закон Ома. Следовательно, полученная формула справедлива и при нелинейной зависимости тока от напряжения, например, в полупроводниковом диоде.

Рассмотрим схему:



Из уравнения Кирхгофа для рассматриваемого контура получим $\mathcal{E} = RI$. С другой стороны по закону Ома $U = RI$. Тогда

$\mathcal{E} = U$ => $UI = \mathcal{E}I$

Здесь UI — мощность, которая идет на нагрев проводника, как только что было доказано выше. Эта мощность может быть получена только от ЭДС. Тогда $\mathcal{E}I$ — мощность расходуемая ЭДС. Заметим, что мощность $\mathcal{E}I$, расходуемая ЭДС, не зависит от наличия других ЭДС на том участке, к которому она подсоединена. Следовательно, и мощность потребляемая участком цепи *UI* (подводимая к участку цепи снаружи) не зависит от того, есть ли на этом участке другие ЭДС.

Рассмотрим теперь не замкнутую цепь, а участок цепи, к которому приложено внешнее напряжение U, и который содержит ЭДС $\mathcal{E}$. Тогда мощность (*N*), идущая на нагрев (ленц-джоулево тепло), в соответствии с законом сохранения энергии должна представлять собой сумму мощности (*UI*), подводимой к участку цепи снаружи, и мощности ($\mathcal{E}I$), расходуемой ЭДС:

$N = \mathcal{E}I + UI$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Пусть на участке цепи отсутствует ЭДС: $\mathcal{E} = 0$, тогда

$N = UI$.

Заметим, что эта формула справедлива не только для резистора, но и для нелинейной зависимости тока от напряжения, например, для полупроводникового диода.

В случае резистора $U = RI$ получаем

$N = RI^2$.

Заметим, что в таком виде формула будет справедлива и для переменных токов, если под величиной тока I подразумевать эффективное значение тока. Для переменных токов формула будет справедлива не только для резистора, но и для катушки индуктивности с внутренним сопротивлением R.

Если же с помощью закона Ома $U = RI$ мощность выразить через напряжение и сопротивление, то формула

$$N = \frac{U^2}{R}$$

все еще будет справедлива и для переменных токов, если U — эффективное значение напряжения, но в таком виде будет справедлива только для резистора, но не справедлива для катушки индуктивности.

Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Пусть мощность $N = \mathcal{E}I + UI$ выделяется в виде тепла в некотором объеме $V = lS$, где l — длина проводника вдоль тока, S — площадь поперечного сечения проводника.

Введем понятие объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла:

$$\nu \equiv \frac{dN}{dV}.$$

Тогда

$$\nu = \frac{N}{V} = \frac{\mathcal{E}I + UI}{lS} = \left(\frac{\mathcal{E}}{l} + \frac{U}{l}\right) \cdot \frac{I}{S}.$$

Обсудим каждое из трех отношений в правой части равенства.

$$\frac{\mathcal{E}}{l} = \frac{1}{l} \cdot \int_1^2 \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right) \approx \frac{1}{l} \cdot \left(\vec{E}_{стор}, \vec{l}\right) = \left(\vec{E}_{стор}, \frac{\vec{l}}{l}\right) = \left(\vec{E}_{стор}, \frac{\vec{j}}{j}\right)$$

Аналогично

$$\frac{U}{l} = \frac{1}{l} \cdot \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) \approx \left(\vec{E}, \frac{\vec{j}}{j}\right).$$

$$\frac{I}{S} = j,$$

где j — плотность электрического тока.

Тогда

$$\nu = \left(\frac{\mathcal{E}}{l} + \frac{U}{l}\right) \cdot \frac{I}{S} = \left(\left(\vec{E}_{стор}, \frac{\vec{j}}{j}\right) + \left(\vec{E}, \frac{\vec{j}}{j}\right)\right) \cdot j = \left(\vec{E}_{стор} + \vec{E}, \vec{j}\right).$$

И окончательно:

$\nu = \left(\vec{E}_{стор} + \vec{E}, \vec{j}\right)$ — закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме, где ν — объемная плотность мощности ленц-джоулева тепла, $\vec{E}_{стор}$ — напряженность сторонних сил, $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, $\vec{j}$ — плотность тока.

Аналогия между интегральными и дифференциальными формами уравнений.

Одни формулы из других получаются в результате замен:

$$I \leftrightarrow \vec{j}\,, \qquad U \leftrightarrow \vec{E}\,, \qquad \mathcal{E} \leftrightarrow \vec{E}_{стор}\,, \qquad R \leftrightarrow \rho = \frac{1}{\lambda}\,, \qquad N \leftrightarrow \nu\,.$$

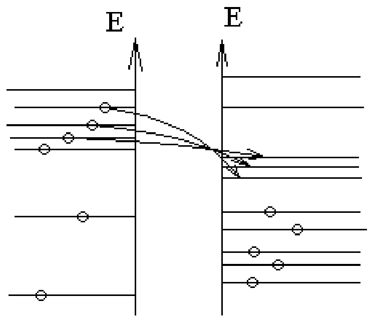
Интегральная форма уравнения	Дифференциальная форма уравнения
$U = RI$	$\vec{E} = \frac{1}{\lambda}\vec{j}$
$\mathcal{E} + U = RI$	$\vec{E}_{стор} + \vec{E} = \frac{1}{\lambda}\vec{j}$
$N = \left(\mathcal{E} + U\right)\cdot I$	$\nu = \left(\vec{E}_{стор} + \vec{E}, \vec{j}\right)$
$N = RI^2 = \frac{U^2}{R}$	$\nu = \frac{1}{\lambda} j^2 = \lambda E^2$

Термопара.

Эффект наблюдается в полупроводниках и проводниках (металлах).

В разных металлах разные уровни энергии электронов.

При соприкосновении разных металлов электроны переходят с более высоких занятых уровней энергии одного металла на менее высокие свободные уровни энергии другого металла.



Металлы при этом заряжаются: один — положительно, другой — отрицательно. Между ними возникает двойной электрический слой (как в заряженном конденсаторе) и напряжение — контактная разность потенциалов.

Изменение $\delta\varphi$ потенциала проводника за счет перехода электронов через контакт приводит к изменению (сдвигу) уровней энергии электронов на величину $-e\delta\varphi$, где $(-e)$ — заряд электрона.

В металле очень много уровней энергии электронов — энергетические зоны. В энергетической зоне уровни расположены с очень высокой плотностью. Поэтому, при переходе зарядов из одного проводника в другой выравнивание энергии верхнего занятого уровня в обоих проводниках происходит не столько за счет освобождения каких-то уровней в одном металле и занятия уровней в другом металле, сколько за счет того, что уровни энергии каждого проводника сдвигаются.

При соприкосновении двух проводников или полупроводников в них выравнивается положение так называемых уровней Ферми. Уровень Ферми — это уровень энергии с вероятностью заселения 1/2 в распределении Ферми — Дирака

$n_i = \dfrac{1}{e^{\frac{E_i - E_F}{kT}} + 1}$, здесь n_i — среднее число электронов на уровне энергии E_i, E_F — энергия Ферми, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Зависимость энергии ферми от температуры $E_F(T)$ определяется равенством $N = \sum_i n_i$, где N — общее число электронов в проводнике, то есть равенством

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\frac{E_i - E_F(T)}{kT}} + 1}.$$

На приведенной выше картинке есть четкая граница между занятыми и незанятыми уровнями энергии, что справедливо только при нулевой температуре.

При изменении температуры проводника (или полупроводника) положение уровня Ферми в нем несколько сдвигается относительно других уровней энергии этого проводника в соответствии с последней приведенной формулой. В области контакта двух проводников выравниваются именно уровни Ферми, поэтому величина контактной разности потенциалов зависит не только от материалов проводников, но и от температуры контакта, так как при повышении температуры уровни Ферми двух металлов сдвигаются по-разному. При повышении температуры в игру вступают частично заселенные более высокие уровни энергии, которые по-разному расположены в соприкасающихся металлах.

Контактную разность потенциалов можно рассматривать, как ЭДС. Если все контакты замкнутой цепи находятся при одинаковой температуре, то в контуре не течет электрический ток. Следовательно, сумма контактных напряжений при обходе по контуру равна нулю при одинаковой температуре всех контактов замкнутой цепи.

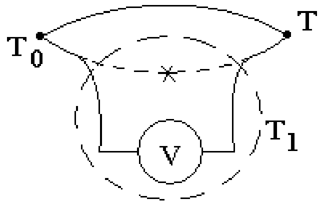
Возьмем две проволоки: одну из константана, другую из меди. Электросваркой соединим эти две проволоки в одно кольцо. Разрежем это кольцо в середине, например, медной проволоки и вставим в разрыв вольтметр.

Разрезанное кольцо представляет собой термопару.

Самая распространенная термопара: медь-константан. Константан — это сплав. Состав сплава: 58.5 % Cu, 40.0 % Ni, 1.5 % Al.

Термопару часто используют, как датчик температуры.

В справочниках есть экспериментально полученные зависимости величины контактной разности потенциалов от температуры.



Один спай термопары будем поддерживать при опорной температуре T_0, например при температуре смеси воды со льдом — ноль градусов Цельсия. Другой спай термопары поместим в точку измерения температуры T. Все остальные возможные контакты металлов в цепи вольтметра будем поддерживать при одинаковой температуре T_1. Значение температуры T_1 не существенно.

Разность контактных потенциалов при обходе по контуру равна напряжению на вольтметре и равна разности контактных напряжений в точках T_0 и T. То, что в замкнутом контуре возникает ЭДС, если контакты поддерживать при разной температуре, называется эффектом Зеебека.

Термопару можно использовать, как термометр. Воспользуемся справочником с таблицей зависимости контактной разности потенциалов от температуры для термопары медь-константан. Берем из справочника значение контактной разности потенциалов при температуре T_0. Добавляем показания вольтметра для получения значения контактной разности потенциалов при измеряемой температуре T. По справочнику определяем значение температуры для полученной контактной разности потенциалов.