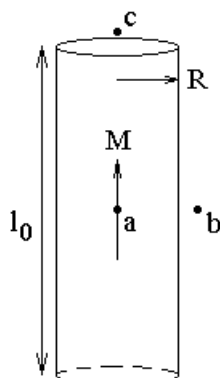


2. Магнитное поле длинного намагниченного цилиндра в трех характерных точках.

Пусть длинный цилиндр намагничен вдоль оси. Найдем магнитное поле в точках a , b , c :

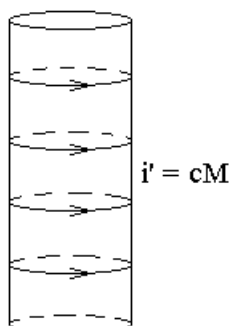


Здесь точка a находится в центре цилиндра, точка b — у боковой поверхности цилиндра в середине его высоты, точка c — непосредственно над серединой торца цилиндра.

В этих трех точках найдем магнитное поле связанных токов.

Можно считать, что есть только связанные токи, а материала магнетика нет, что токи висят в вакууме. Найдем магнитное поле токов.

Связанные токи текут по поверхности цилиндра вокруг вектора намагниченности по правилу правого винта.



Из симметрии задачи следует, что магнитное поле в этих трех точках направлено вдоль оси цилиндра. Для каждой малой площадки с током составляющая вдоль оси цилиндра перпендикулярна току и перпендикулярна нормали к поверхности, по которой течет ток. Следовательно,

$$B = B_z = B_{\perp} = \frac{i'}{c} \Omega = M \Omega, \text{ где } \Omega \text{ — телесный угол, под которым из точки}$$

наблюдения поля видна поверхность с током. Последнее равенство в цепочке определяется граничным условием для намагниченности $M_{\tau} = \frac{i'}{c}$.

Для определения величины магнитного поля B в рассматриваемых трех точках достаточно найти телесный угол Ω , под которым поверхность с током видна из точки наблюдения магнитного поля.

Для точки a телесный угол Ω — это полный телесный угол 4π минус два телесных угла, под каждым из которых видно одно доньшко цилиндра из его середины. Этот телесный угол равен отношению площади доньшка к квадрату расстояния от точки наблюдения до доньшка. Тогда:

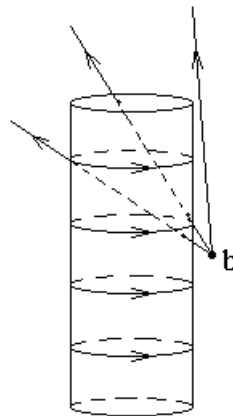
$$B_a = M\Omega_a \approx M \cdot \left(4\pi - 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \right)$$

$$H_a = B_a - 4\pi M \approx -2M \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}.$$

Рассмотрим магнитное поле в точке b . В этой точке токи, расположенные на ближней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вниз, а токи, расположенные на дальней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вверх.

Чтобы вычислить суммарное магнитное поле нужно найти разность телесных углов, под которыми видна ближняя к точке наблюдения поверхность с током и дальняя поверхность с током.

Разность телесных углов равна телесному углу, под которым из точки наблюдения поля видны два доньшка цилиндра. Чтобы убедиться в этом рассмотрим три разных луча, выходящих из точки b .



Рассмотрим малый телесный угол вокруг каждого из этих трех лучей.

Нижний луч протыкает боковую поверхность цилиндра дважды. Внутри соответствующего ему малого телесного угла окажется часть ближней поверхности с током и часть дальней поверхности с током. Эти две площадки с током дают равные по величине и противоположно направленные вклады в вертикальную составляющую магнитного поля в точке b в соответствии с

формулой $dB_{\perp} = \frac{i'}{c} d\Omega$, где $d\Omega$ — рассматриваемый малый телесный угол.

Верхний из трех лучей и малый телесный угол вокруг него не касаются поверхности цилиндра и не дают вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке b .

Средний из трех лучей входит в цилиндр через ближнюю часть боковой поверхности цилиндра, а выходит через верхнее доньшко. В малый телесный угол вокруг луча попадает только часть ближней токонесущей боковой поверхности цилиндра. Эта часть токонесущей поверхности дает не скомпенсированный вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке наблюдения. Телесные углы именно вокруг таких лучей, которые входят в цилиндр через его боковую поверхность, а выходят через доньшко, дают вклад в телесный угол Ω , который определяет величину магнитного поля в точке b .

$$B_b \approx -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \cdot M, \quad H_b = B_b \approx -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \cdot M.$$

 В точке c телесный угол, под которым видна поверхность с током — это половина полного телесного угла 2π для нижнего полупространства минус телесный угол $\frac{\pi R^2}{l_0^2}$, под которым видно нижнее доньшко. Тогда

$$B_c = H_c \approx \left(2\pi - \frac{\pi R^2}{l_0^2}\right) \cdot M.$$

Решение 2.

В той же задаче можно найти магнитное поле магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

По аналогии с электрическими зарядами $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$, напишем для магнитных зарядов

$M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m \quad \Rightarrow \quad \sigma'_m = M$ — поверхностная плотность связанных магнитных зарядов на торцах цилиндра.



Эти заряды создают напряженность магнитного поля \vec{H} . Затем поле \vec{B} можно найти по формуле $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$.

Точка a в центре цилиндра расположена далеко от торцов цилиндра. Тогда магнитный заряд на каждом торце можно считать точечным. Напряженности полей обоих зарядов в центре цилиндра направлены сверху вниз.

$$H_a = -2 \frac{q'_m}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}$$

$$B_a = H_a + 4\pi M = 4\pi M - 2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}$$

Цилиндр узкий, точка b близко расположена к точке a , поэтому напряженность магнитного поля в точке b почти такая же, как и в точке a :

$$H_b = -2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}, \quad B_b = H_b = -2 \frac{\pi R^2 M}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}.$$

Точка c расположена близко к торцу цилиндра, при этом торец выглядит бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ'_m . Напряженность поля бесконечной плоскости равна $2\pi\sigma'_m = 2\pi M$. Заряд нижнего торца цилиндра можно считать точечным. Тогда

$$B_c = H_c = 2\pi\sigma'_m - \frac{q'_m}{l_0^2} = 2\pi M - \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{l_0^2} = 2\pi M - \frac{\pi R^2 M}{l_0^2}.$$

Ответы совпадают с ответами первого решения.

Четыре предварительных замечания к решению задач по теме магнитопровод.

1-ое замечание.

Аналогично краевой задачи электростатики для уравнения $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ уравнение $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ имеет единственное решение в объеме, если на границах объема задано одно из граничных условий аналогичных условиям Дирихле или Неймана. Задачу для векторного потенциала аналогичную задаче с проводниками для скалярного потенциала придумать трудно.

Уравнение $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}$ для векторного потенциала эквивалентно паре

дифференциальных уравнений $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$ для полей \vec{B} и \vec{H} . При

условиях: $\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A}) \\ \operatorname{div}(\vec{A}) = 0 \end{cases}$

На границе намагниченных сред система $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$ превращается в

граничные условия $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$.

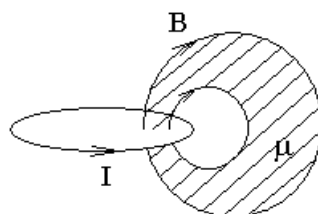
В результате, решение для магнитного поля можно придумывать. Для придуманного решения нужно проверять условия $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$ на границе

объема и на границах намагниченных сред внутри рассматриваемого объема, здесь i — плотность поверхностного тока проводимости.

Внутри рассматриваемого объема нужно проверять условия $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$, где \vec{j} — плотность токов проводимости.

2-ое замечание.

Если в задаче без магнетиков любую трубку линий поля \vec{B} заполнить магнетиком, то напряженность магнитного поля \vec{H} нигде не изменится.



Доказательство этого замечания.

Придумаем решение, в котором поле \vec{H} нигде не изменилось.

Проверим выполнение граничных условий $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$ на границе

магнетика внутри рассматриваемого объема, то есть на границах трубки линий поля \vec{B} , заполненной магнетиком.

Граница магнетика выбрана вдоль линий поля \vec{B} , следовательно, нормальной составляющей поля \vec{B} на границе магнетика нет. Тогда условие $B_{2n} - B_{1n} = 0$ выполнено на границе магнетика.

Условие $H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$ выполнено на границе магнетика, так как на этой границе нет токов проводимости $i = 0$, и у придуманного поля \vec{H} нет скачка на границе.

Уравнения $\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases}$ будут выполнены в остальных точках внутри

объема, так как они были выполнены для поля \vec{H} в задаче без магнетиков.

3-е замечание.

Если сердечник в виде заполненной магнетиком трубки линий магнитного поля продеформировать, то поля \vec{H} внутри и снаружи сердечника будут различными, но останутся величинами одного порядка $H_{\text{внутри}} \approx H_{\text{снаружи}}$.

Интеграл $\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$ по контуру вдоль оси сердечника и по контуру

рядом с сердечником имеет одно и то же значение, так как правая часть равенства в обоих случаях одна и та же. Если интеграл от поля \vec{H} внутри и снаружи сердечника одинаков, то и само поле \vec{H} не может сильно отличаться внутри и снаружи сердечника.

4-е замечание.

Если сердечник изготовлен из материала с высокой магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$, то линии магнитного поля \vec{B} не любят выходить из сердечника при его деформации, то есть повторяют форму сердечника.

Докажем это замечание.

Согласно третьему замечанию $H_{\text{внутри}} \approx H_{\text{снаружи}}$. Но

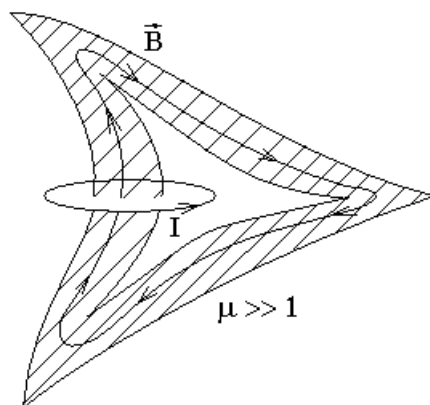
$$\begin{cases} B_{\text{внутри}} = \mu H_{\text{внутри}} \\ B_{\text{снаружи}} = H_{\text{снаружи}}, \text{ тогда} \\ \mu \gg 1 \end{cases}$$

$$B_{\text{внутри}} = \mu H_{\text{внутри}} \approx \mu H_{\text{снаружи}} = \mu B_{\text{снаружи}} \gg B_{\text{снаружи}} \Rightarrow$$

$$B_{\text{внутри}} \gg B_{\text{снаружи}}.$$

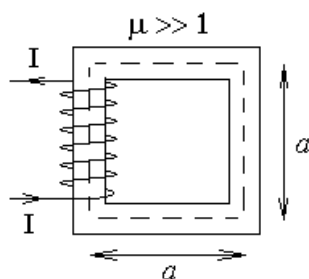
Плотность линий поля \vec{B} пропорциональна величине поля B , линии поля \vec{B} не рвутся. Тогда с учетом $B_{внутри} \gg B_{снаружи}$ из сердечника $\mu \gg 1$ может выходить лишь небольшая часть (порядка $\frac{1}{\mu}$) линий поля \vec{B} .

Следовательно, линии поля \vec{B} повторяют форму замкнутого сердечника $\mu \gg 1$, и в этом смысле линии поля \vec{B} не любят выходить из сердечника при $\mu \gg 1$.



Примеры решения задач с магнитопроводом.

1. Магнитное поле в катушке с замкнутым сердечником при $\mu \gg 1$.



Найдем магнитное поле \vec{B} в сердечнике.

Рассмотрим циркуляцию поля \vec{H} вдоль оси сердечника:

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I, \quad \text{где } I \text{ — сумма токов, пронизывающих контур}$$

интегрирования — пунктирный контур.

Пусть N — число витков в обмотке катушки. Каждый виток пронизывает площадку, ограниченную пунктирным контуром. Следовательно, NI — сумма токов проводимости, пронизывающих пунктирный контур интегрирования. Тогда

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} NI, \tag{1}$$

где I — сила тока в обмотке катушки.

Линии магнитного поля \vec{B} не любят выходить из сердечника с высокой магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$, поэтому через любое сечение сердечника перпендикулярное его пунктирной оси проходит одинаковое число линий поля \vec{B} . Поток Φ_B пропорциональный числу линий поля также одинаковый в любом сечении.

$\Phi_B = BS$, где S — площадь поперечного сечения сердечника перпендикулярного пунктирной линии. На протяжении почти всей длины сердечника площадь сечения S одинаковая, тогда и поле B во всех сечениях сердечника одинаковое. С учетом $B = \mu H$ поле H тоже одинаково во всем сердечнике, и поле \vec{H} направлено вдоль оси сердечника. Следовательно, $H_l = H$ и эту константу можно вынести за знак интеграла в формуле (1).

$$H \cdot \oint_l dl = \frac{4\pi}{c} NI, \text{ здесь } \oint_l dl = l \text{ — длина сердечника. Тогда}$$

$$Hl = \frac{4\pi}{c} NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{4\pi NI}{cl}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{4\pi \mu NI}{cl}, \text{ где } \mu \gg 1 \text{ — магнитная проницаемость сердечника; } N \text{ —}$$

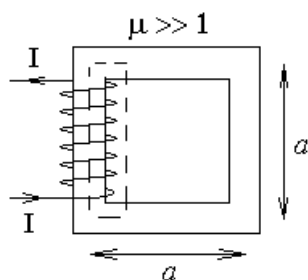
число витков в катушке, намотанной на сердечник; I — сила тока в катушке.

В системе СИ для поля B нужно $\frac{1}{c} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$, в результате $B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l}$,

для поля H нужно $\frac{1}{c} \rightarrow \frac{1}{4\pi}$, в результате $H = \frac{NI}{l}$.

Факультативная вставка.

Сравним приведенное выше правильное решение с ошибочным, представленным ниже.



Рассмотрим циркуляцию поля \vec{H} по новому пунктирному контуру. Казалось бы, магнитное поле в основном сосредоточено в сердечнике, поэтому вкладом в циркуляцию снаружи сердечника можно пренебречь. Тогда

$$\oint_l H_l dl = Ha = \frac{4\pi}{c} NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{4\pi NI}{ca}, \text{ что в четыре раза отличается от}$$

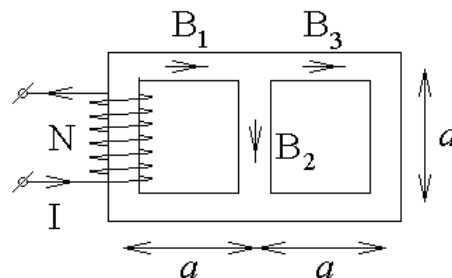
правильного решения $H = \frac{4\pi NI}{cl}$.

Чтобы избежать ошибок в решении, нужно учитывать, что магнитное поле \vec{B} в сердечнике гораздо больше, чем рядом с сердечником, а напряженность магнитного поля \vec{H} в сердечнике и рядом с ним имеет один порядок величин. По этой причине нельзя пренебречь вкладом в циркуляцию поля \vec{H} снаружи сердечника, и второе предложенное решение оказывается неверным.

Конец факультативной вставки.

2. Магнитное поле в сердечнике с ветвлением.

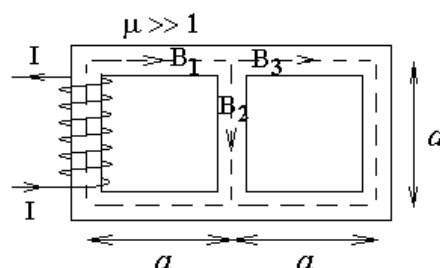
Рассмотрим ветвящийся сердечник. Пусть в задаче заданы геометрические размеры сердечника, его проницаемость $\mu \gg 1$, число витков катушки N и сила тока в катушке I .



Требуется найти магнитное поле в сердечнике.

При решении задачи составляются уравнения похожие на уравнения Кирхгофа. Узел — это место ветвления сердечника. Участок сердечника, как и участок электрической цепи — это отрезок от одного узла до соседнего узла. Есть уравнения для узлов, а именно, в узел втекает поток магнитного поля такой же, как вытекает; и для контуров — циркуляция напряженности магнитного поля по контуру равна произведению $\frac{4\pi}{c}$ на сумму токов проводимости, пронизывающих контур.

Выберем положительное направление магнитного поля \vec{B} на каждом участке сердечника. Число линейно независимых уравнений для контуров совпадает с числом элементарных контуров, которые нельзя разделить на более мелкие по площади контуры.



Выберем в качестве контуров для составления уравнений два элементарных квадратных пунктирных контура. Выберем положительное направление обхода каждого контура, например по часовой стрелке.

Уравнения для контуров примут следующий вид:

$$\begin{cases} 3aH_1 + aH_2 = \frac{4\pi}{c} NI \\ 3aH_3 - aH_2 = 0 \end{cases} .$$

Для решения системы относительно неизвестных H_1, H_2, H_3 не хватает третьего уравнения.

Добавим одно уравнение для узла.

Поток поля \vec{B} , втекающий в узел, равен потоку, вытекающему из угла.

Тогда

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3,$$

где S_1, S_2, S_3 — площади поперечного сечения сердечника на участках 1, 2, 3.

Рассмотрим задачу, в которой площади сечения одинаковые, тогда $B_1 = B_2 + B_3$.

$H_1 = H_2 + H_3$ — третье недостающее уравнение системы:

$$\begin{cases} 3aH_1 + aH_2 = \frac{4\pi}{c} NI \\ 3aH_3 - aH_2 = 0 \\ H_1 = H_2 + H_3 \end{cases} .$$

Три уравнения позволяют найти три неизвестные H_1, H_2, H_3 .

Магнитное поле $B_i = \mu H_i$ на каждом i -ом участке сердечника.

Уравнения для магнитного поля в произвольном магнитопроводе ($\mu \gg 1$) с ветвлением.

Уравнения для магнитного поля в магнитопроводе не просто похожи на уравнения Кирхгофа для электрических цепей, а полностью им эквивалентны с точностью до замены:

$$\begin{array}{lcl} I & \Rightarrow & BS \\ \mathcal{E} & \Rightarrow & \frac{4\pi}{c} NI \\ R & \Rightarrow & \frac{l}{\mu S} . \end{array}$$

Здесь в левом столбце: I — сила тока на участке электрической цепи, \mathcal{E} — электродвижущая сила на участке цепи, R — сопротивление участка цепи. В правом столбце: B — магнитное поле в сердечнике на участке магнитопровода, S — площадь поперечного сечения сердечника, N — число витков катушки на сердечнике; I — сила тока в катушке, l — длина участка сердечника, μ — магнитная проницаемость сердечника.

$$\text{Так если сердечник не ветвится, то } \frac{4\pi}{c} NI = lH = l \frac{B}{\mu} = BS \cdot \frac{l}{\mu S} \Rightarrow$$

Уравнение $\frac{4\pi}{c} NI = BS \cdot \frac{l}{\mu S}$ для магнитопровода, что после соответствующих замен эквивалентно уравнению $\mathcal{E} = IR$ для электрических цепей.

Следовательно, величина $\frac{l}{\mu S}$ — сопротивление магнитопровода магнитному потоку. Тогда μ — удельная проводимость магнитного потока.