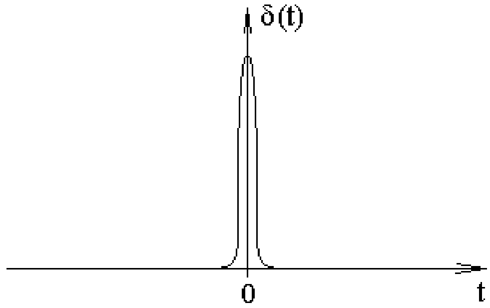
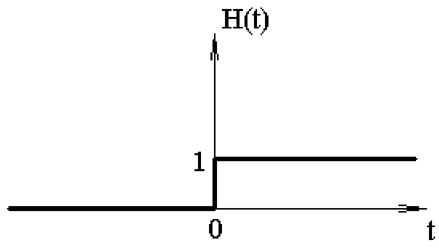
## Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе схемы от времени.

Единичная ступенька напряжения в начале координат или функция Хевисайда $H(t)$ связана с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$ соотношениями:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' \qquad <=> \qquad \delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$$

Напомним, что дельта-функция Дирака — это очень узкий и одновременно очень высокий пик вначале координат, площадь под графиком которого равна единице $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.




Рассмотрим какую-либо конкретную линейную схему. Если напряжение на входе — единичная ступенька $U_{вх}(t) = H(t)$, то мы умеем решать такую задачу.

Пусть ее решение — некоторая функция $F(t)$: $\qquad U_{вых}(t) = F(t)$

Схема линейная, поэтому если

$U_{вх}(t) = \delta(t) = \dfrac{dH(t)}{dt}$, то

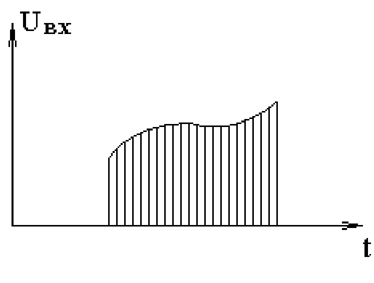
$U_{вых}(t) = \dfrac{dF(t)}{dt} \equiv G(t)$ — функция Грина для данной задачи.

Функция Грина — отклик на дельта-функцию Дирака. В нашем случае — отклик электрической схемы на дельта-функцию Дирака на входе схемы.

Если $U_{вх}(t) = \delta(t - t_0)$, то $U_{вых}(t) = G(t - t_0)$.

--------

Произвольная зависимость напряжения на входе схемы может быть представлена интегралом, как большая сумма узких прямоугольников, каждый из которых похож на дельта-функцию Дирака с некоторым весом.



Рассмотрим один из прямоугольников около точки $t = t_0$. Высота прямоугольника $U_{вх}(t_0)$, ширину обозначим, как $dt_0$. Тогда площадь прямоугольника $U_{вх}(t_0)dt_0$. Площадь под дельта-функцией равна единице, следовательно, рассматриваемый прямоугольник, как функция времени $t$ примерно равен $U_{вх}(t_0)dt_0\,\delta(t - t_0)$.

Вся функция $U_{вх}(t)$ может быть представлена, как сумма таких прямоугольников:

$$U_{вх}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\,\delta(t - t_0)\,dt_0$$

Если напряжение на входе — сумма дельта функций $\delta(t - t_0)$, то напряжение на выходе — сумма функций Грина $G(t - t_0)$ с теми же весовыми множителями $U_{вх}(t_0)dt_0$:

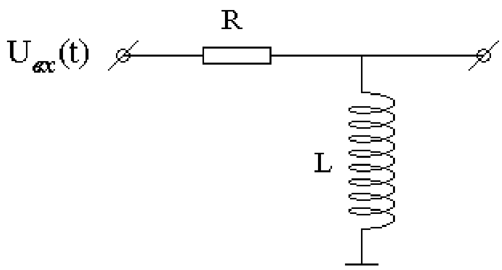
$$U_{вых}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\,G(t - t_0)\,dt_0 .$$

Это и есть решение для напряжения на выходе схемы $U_{вых}(t)$ при произвольной зависимости входного напряжения $U_{вх}(t)$ от времени.

Здесь $G(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}$, $F(t)$ — реакция схемы на единичную ступеньку напряжения на входе $U_{вх}(t) = H(t)$.

--------

Рассмотрим, например, реакцию $RL$-цепочки на единичную ступеньку напряжения:




Как мы выяснили раньше в вопросе "Реакция $RL$-цепочки на ступеньку напряжения" напряжение на выходе схемы для единичной ступеньки на входе:

$$F(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot H(t) \qquad => \qquad G(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot H(t),$$

— функция Грина для данной задачи, полученная как производная от произведения.

Следовательно

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\left\{\delta(t-t_0)-\frac{R}{L}\,e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}H(t-t_0)\right\}dt_0 .$$

Интеграл распадается на сумму двух интегралов, первый из которых можно взять в явном виде, а во втором оставить пределы интегрирования только по области, в которой отлична от нуля функция Хевисайда. Тогда

$$U_{вых}(t)=U_{вх}(t)-\frac{R}{L}\int\limits_{0}^{+\infty} U_{вх}(t-t')\,e^{-\frac{R}{L}t'}\,dt', \text{ где } t'=t-t_0 .$$

## Комплексные токи и напряжения.

Комплексные токи и напряжения вводят для рассмотрения гармонически изменяющихся токов и напряжений. Комплексные токи и напряжения позволяют заменить дифференциальные уравнения Кирхгофа для токов комплексными алгебраическими уравнениями Кирхгофа.

Рассмотрим вещественное напряжение:

$U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_0)$, где $U_0$ — вещественная амплитуда, $\omega$ — циклическая частота, $\varphi_0$ — начальная фаза.

Будем называть соответствующим комплексным напряжением величину:

$\widetilde{U}(t)=U_0\,e^{i(\omega t+\varphi_0)}$, где волной сверху $\widetilde{U}$ будем обозначать, что величина комплексная.

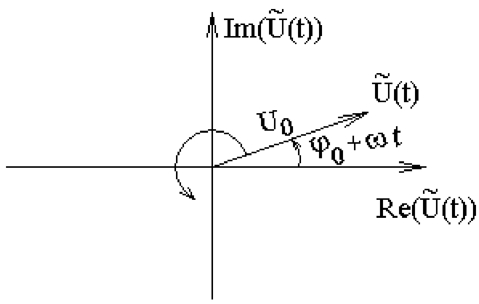
Тогда $\quad U(t)=\mathrm{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)$

$\widetilde{U}=U_0\,e^{i(\omega t+\varphi_0)}=U_0\,e^{i\varphi_0}\,e^{i\omega t}=\widetilde{U}_0\,e^{i\omega t}$, где

$\widetilde{U}_0\equiv U_0\,e^{i\varphi_0}$ — комплексная амплитуда напряжения, $U_0$ — вещественная амплитуда, $\varphi_0$ — начальная фаза или фаза в нулевой момент времени.

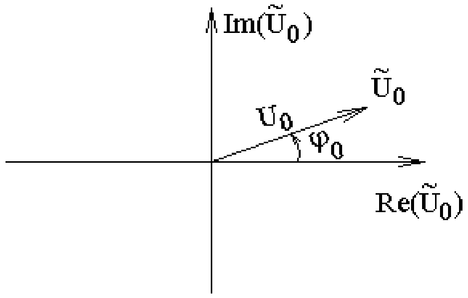
$\widetilde{U}(t)=\widetilde{U}_0\,e^{i\omega t}$

Гармонически изменяющееся напряжение можно изобразить на комплексной плоскости напряжений.




Напряжение, которое есть на самом деле, — это вещественное напряжение равное проекции комплексного напряжения на вещественную ось $\mathrm{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)=U(t)$.

Комплексная амплитуда напряжения тоже может быть изображена на комплексной плоскости — плоскости комплексных амплитуд. В отличие от комплексного напряжения комплексная амплитуда не изменяется во времени и не вращается на комплексной плоскости.




Аналогично комплексным напряжениям вводятся комплексные токи.

$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi_0)$ — вещественный ток.

$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \psi_0)}$ — соответствующий ему комплексный ток.

$I(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{I}(t)\right)$

$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \psi_0)} = I_0 e^{i\psi_0} e^{i\omega t} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ =>

$\tilde{I}_0 \equiv I_0 e^{i\psi_0}$ — комплексная амплитуда тока, $I_0$ — вещественная амплитуда тока, $\psi_0$ — начальная фаза тока или фаза в нулевой момент времени.

$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$

## <u>**Эффективное напряжение.**</u>

Эффективное значение периодического переменного напряжения любой формы равно по величине постоянному напряжению, которое также нагревает резистор, как и рассматриваемое переменное напряжение.

Мощность Ленц-Джоулева тепла $N = \dfrac{U^2}{R}$. Согласно определению эффективного напряжения

$\langle N \rangle = \left\langle \dfrac{U^2}{R} \right\rangle = \dfrac{U^2_{эфф}}{R}$ =>

$U^2_{эфф} \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle$.

Аналогично для тока $N = I^2 R$ => $\langle N \rangle = \left\langle I^2 R \right\rangle = I^2_{эфф} R$ =>

$I^2_{эфф} \equiv \left\langle I^2(t) \right\rangle$.

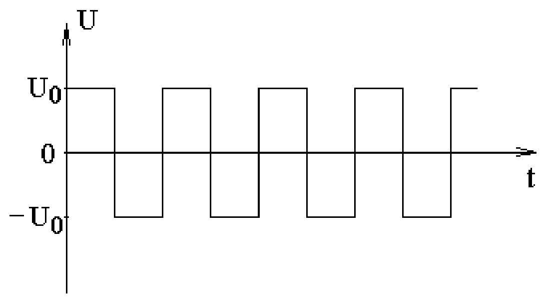
Для гармонически изменяющихся напряжений $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$U^2_{эфф} \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle = U_0^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle = U_0^2 \, \dfrac{1}{2}$ =>

$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично для гармонически изменяющегося тока: $I_{эфф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

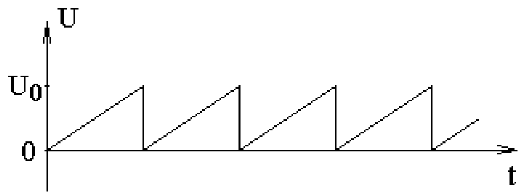
Рассмотрим напряжение (или ток) в форме меандра — прямоугольных импульсов со скважностью равной двум $\frac{T}{\tau} = 2$, где $T$ — период, $\tau$ — длительность импульса положительной полярности.




Для меандра:

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \right\rangle = U_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad U_{эфф} = U_0.$$

Для пилообразного напряжения




$$U_{эфф}^2 = \left\langle U^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left( U_0 \frac{t}{T} \right)^2 dt = \frac{U_0^2}{T^3}\int_0^T t^2 dt = \frac{U_0^2}{3} \qquad \Rightarrow$$

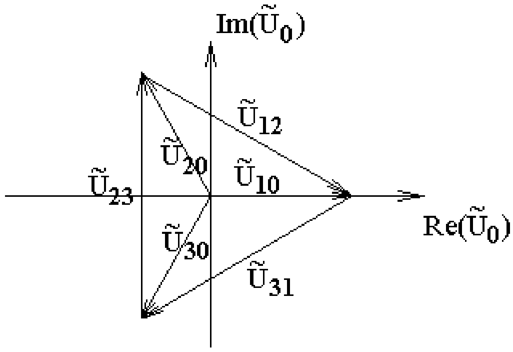
$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$$

Бытовое напряжение сети переменного тока 220 Вольт — это эффективное значение напряжения.

## <u>Трехфазное напряжение.</u>

Трехфазное напряжение обычно выводится на специальный трехфазный электрический щит с четырьмя клеммами. На три клеммы подано напряжение трех фаз относительно общего провода, который подключен к четвертой клемме. Где-то далеко от щита нулевой провод соединен с землей, то есть заземлен.

Напряжение каждой из трех фаз имеет одинаковую амплитуду, но эти напряжения сдвинуты по фазе на угол $\frac{2\pi}{3}$ друг относительно друга. На следующем рисунке изображена плоскость комплексных амплитуд.




Здесь три вектора из начала координат — это комплексные амплитуды трех фаз. Эти векторы развернуты друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{3}$. Концы этих трех векторов связаны еще тремя векторами — комплексными амплитудами напряжений между фазами.

Из рисунка видно, что амплитуда напряжения между фазами $\left|\widetilde{U}_{23}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{12}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{31}\right|$ в $\sqrt{3}$ больше, чем амплитуда напряжения одной фазы $\left|\widetilde{U}_{10}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{20}\right|$, $\left|\widetilde{U}_{30}\right|$.

Подключаясь к клеммам трехфазного электрического щитка можно использовать всё трехфазное напряжение или напряжение между двумя фазами (между клеммами двух фаз) или напряжение одной фазы (между клеммой фазы и клеммой общего провода).

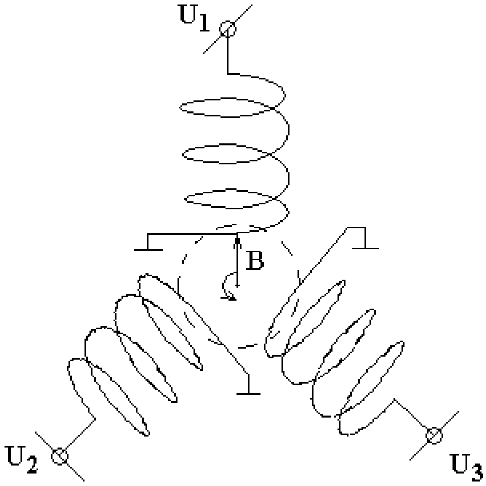
Для трехфазной сети переменного тока есть два стандарта.

1). Сеть 220/127 Вольт. Это сеть с эффективным напряжением 127 Вольт каждой фазы относительно нулевого провода. Эффективное напряжение между фазами —220 Вольт. Бытовые приборы в такой сети включаются между двумя фазами.

2). Сеть 380/220 Вольт. В этой сети эффективное напряжение каждой фазы — 220 Вольт, напряжение между фазами — 380 Вольт. Бытовые приборы включаются между фазой и нулевым проводом.

## Асинхронный трехфазный электродвигатель.

Двигатель имеет три неподвижных статорных обмотки, на которые подают три фазы трехфазного напряжения.




В пунктирной области между обмотками образуется вращающееся магнитное поле $\vec{B}$, так как магнитное поле достигает максимального значения сначала в одной обмотке, затем во второй, затем в третьей.

В эту область вращающегося магнитного поля помещают ротор электродвигателя. Ротор вращается так, что ось вращения ротора перпендикулярна плоскости рисунка.

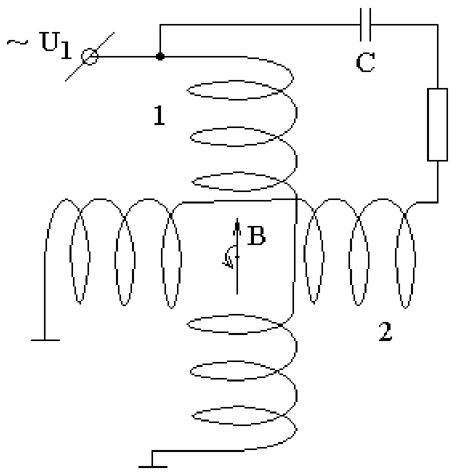
На роторе электродвигателя закреплена короткозамкнутая роторная обмотка.

Для простоты будем считать, что роторная обмотка — это один виток провода. Виток ротора расположен перпендикулярно плоскости рисунка, и ось его вращения тоже расположена перпендикулярно плоскости рисунка, так что ось вращения ротора лежит в плоскости его витка.

В области ротора вращается магнитное поле, создаваемое статорными обмотками. Виток ротора стремится поворачиваться за магнитным полем, чтобы сохранять неизменной величину потока магнитного поля $\vec{B}$ через рамку обмотки. Это происходит по правилу Ленца, согласно которому ток индукции в роторной обмотке имеет такое направление, что силы Ампера, действующие на ток индукции, стремятся устранить причину возникновения тока индукции — изменение магнитного потока через рамку роторной обмотки.

Электродвигатель, совершая полезную работу, вращает вал с некоторым усилием. Вращаясь под механической нагрузкой, ротор понемногу отстает от магнитного поля, поэтому двигатель называется асинхронным.

## **Однофазный электродвигатель.**




Роторная обмотка короткозамкнутая.

Одну из двух статорных обмоток электродвигателя включают последовательно с конденсатором. Конденсатор сдвигает фазу тока второй статорной обмотки относительно фазы тока первой обмотки. Лучше всего было бы сдвинуть фазу на $\frac{\pi}{2}$.

Вращающееся магнитное поле при этом не совсем постоянно по амплитуде, поэтому однофазный двигатель создает меньший момент сил.

**<u>Комплексное сопротивление — импеданс.</u>**

Импеданс или комплексное сопротивление по определению равно отношению комплексного напряжения к комплексному току:

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}.$$

Заметим, что импеданс также равен отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\tilde{U}_0 e^{i\omega t}}{\tilde{I}_0 e^{i\omega t}} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}$$

Найдем импеданс для каждого элемента линейной схемы: для резистора, конденсатора и катушки индуктивности.

Для резистора:

$$U = RI \qquad => \qquad \tilde{U} = R\tilde{I} \qquad => \qquad \tilde{Z}_R = R$$

Для конденсатора:

$$q = CU \qquad => \qquad \dot{q} = I = C\dot{U} \qquad =>$$

$$\tilde{I} = C\dot{\tilde{U}} = C\frac{d}{dt}\left(\tilde{U}_0 e^{i\omega t}\right) = C\tilde{U}_0 \frac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = i\omega C\tilde{U}_0 e^{i\omega t} = i\omega C\tilde{U} \qquad =>$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \qquad => \qquad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Для катушки индуктивности:

$U = L\dot{I}$ =>

$\tilde{U} = L\dot{\tilde{I}} = L\dfrac{d}{dt}\left(\tilde{I}_0 e^{i\omega t}\right) = L\tilde{I}_0 \dfrac{d}{dt}\left(e^{i\omega t}\right) = i\omega L\tilde{I}_0 e^{i\omega t} = i\omega L\tilde{I}$ =>

$\tilde{Z}_L = i\omega L$

Соберем вместе все три выражения для импедансов и получим:

$$\begin{cases} \tilde{Z}_R = R \\ \tilde{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C} \\ \tilde{Z}_L = i\omega L \end{cases}.$$

Комплексные сопротивления вместе с комплексными напряжениями и комплексными токами позволяют вместо дифференциальных уравнений Кирхгофа составлять комплексные уравнения Кирхгофа для токов.

Факультативная вставка.

По ходу рассмотрения этого вопроса мы из соотношений для вещественных величин написали аналогичные соотношения для комплексных величин, например из соотношения $U = L\dot{I}$ мы получили $\tilde{U} = L\dot{\tilde{I}}$. Возникает вопрос. Почему это можно сделать?

Из вещественного равенства $U = L\dot{I}$ следует комплексное равенство $\tilde{U} = \widetilde{\left(L\dot{I}\right)}$. В правой части равенства константу $L$ можно вынести за скобки. Тогда $\tilde{U} = L\tilde{\dot{I}}$. Теперь чтобы доказать, что $\tilde{U} = L\dot{\tilde{I}}$, нам осталось доказать, что $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$.

Рассмотрим левую часть равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$:

$I = I_0 \cos\left(\omega t + \psi_0\right)$ => $\dot{I} = -\omega I_0 \sin\left(\omega t + \psi_0\right) = \omega I_0 \cos\left(\omega t + \psi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

=> $\tilde{\dot{I}} = \omega I_0 e^{i\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$

Рассмотрим теперь правую часть равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$:

$I = I_0 \cos\left(\omega t + \psi_0\right)$ => $\tilde{I} = I_0 e^{i\left(\omega t + \psi_0\right)}$ =>

$\dot{\tilde{I}} = i\omega I_0 e^{i\left(\omega t + \psi_0\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega I_0 e^{i\left(\omega t + \psi_0\right)} = \omega I_0 e^{i\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$

Таким образом, мы получили одинаковое выражение для правой и левой частей равенства $\tilde{\dot{I}} = \dot{\tilde{I}}$, следовательно, равенство доказано.

Конец факультативной вставки.

## **Резонанс напряжений.**

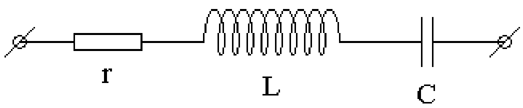
Резонанс — это явление, в котором амплитуда вынужденных колебаний, как функция частоты, имеет острый пик.

Резонанс напряжений наблюдается в последовательном колебательном контуре.

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Колебательный контур может быть последовательным или параллельным. В обоих случаях колебательный контур — это двухполюсник, из которого выходят два провода.

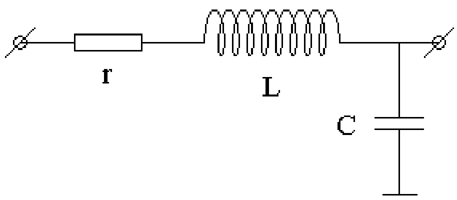
В последовательном колебательном контуре катушка индуктивности и конденсатор включены последовательно между клеммами двухполюсника, в параллельном контуре — параллельно.

Последовательный колебательный контур имеет следующий вид:




Катушка индуктивности обычно имеет заметное внутреннее сопротивление. Будем рассматривать реальную катушку индуктивности, как последовательно включенные резистор с сопротивлением $r$ и идеальную катушку индуктивности $L$ с нулевым сопротивлением.

Будем считать, что напряжение на входе схемы — это напряжение на всем колебательном контуре, а напряжение на выходе схемы — это напряжение на конденсаторе. Тогда




Амплитуда напряжения на выходе схемы в резонансе много больше, чем амплитуда напряжения на входе схемы. В резонансе напряжение на конденсаторе и напряжение на катушке индуктивности становятся очень большими, но эти два напряжения изменяются в противофазе, поэтому напряжение на всем колебательном контуре гораздо меньше каждого из них.

Рассмотрим задачу количественно.

Как и обычно будем считать, что выход схемы не потребляет тока. Тогда напишем уравнение Кирхгофа для контура в комплексном виде.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i U_i \qquad => \qquad \widetilde{U}_{вх} = r\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C}\tilde{I} \qquad =>$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} \widetilde{U}_{\text{вх}} \qquad \Rightarrow$$

$$\widetilde{U}_{\text{вых}} = \widetilde{U}_C = \frac{1}{i\omega C} \tilde{I} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} \widetilde{U}_{\text{вх}}$$

$$\widetilde{U}_{\text{вых}} = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{r + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} \widetilde{U}_{\text{вх}}$$