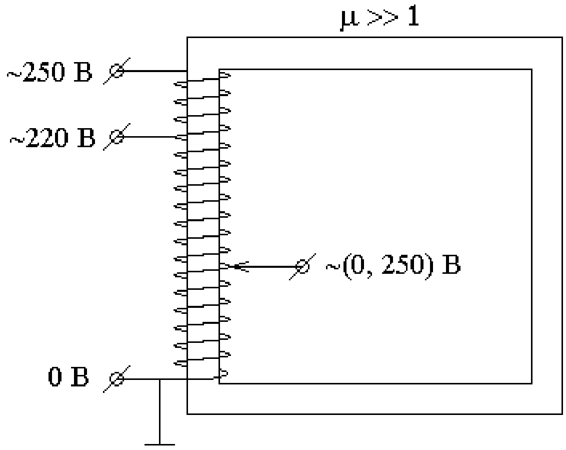
Лабораторный автотрансформатор (ЛАТР).



От сети переменного тока 220 Вольт на лабораторный автотрансформатор подается напряжение между клеммами обозначенными на рисунке, как "0 В" и "~220 В". Между клеммами "0 В" и "~250 В" можно снять напряжение 250 Вольт. Кроме трех рассмотренных отводов "0 В", "~220 В" и "~250 В" единственная обмотка лабораторного автотрансформатора имеет отвод в виде скользящего контакта. При перемещении контакта между ним и клеммой "0 В" образуется напряжение, которое можно изменять в пределах от нуля до 250 Вольт.

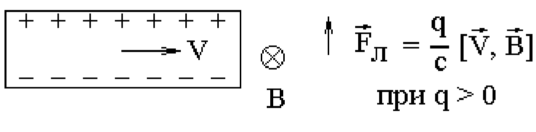
Преобразование электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.

(нерелятивистский случай, система СГС Гаусса)

Нестрогий вывод.

Рассмотрим проводник, который движется в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{V}$ относительно системы отсчета *K*.

Свободные заряды внутри проводника движутся вместе с проводником, и на них действует сила Лоренца $\vec{F}_Л = \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$. Сила Лоренца сдвигает свободные заряды и приводит к появлению поверхностных зарядов σ на проводнике.



Поверхностные заряды создают электрическое поле $\vec{E}_\sigma$ внутри проводника.

Сила Лоренца и сила Кулона со стороны поля $\vec{E}_\sigma$ уравновешивают друг друга для оставшихся свободных зарядов внутри проводника.

Тогда $\quad q\vec{E}_\sigma + \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] = 0 \quad =>

$\vec{E}_\sigma = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$ — поле поверхностных зарядов σ. Здесь значок σ поясняет причину возникновения электрического поля.

Рассмотрим теперь это же явление в системе отсчета K', которая движется вместе с проводником.

В системе K' заряды покоятся, следовательно, сила Лоренца равна нулю. Равнодействующая всех сил равна нулю, так как заряды покоятся. Следовательно, внутри проводника сила Кулона со стороны электрического поля $\vec{E}'$ в K' равна нулю, и внутри проводника $\vec{E}' = 0$.

В системе отсчета K есть поверхностные заряды. Их плотность при переходе в систему K' почти не изменяется, так как заряды не изменяются, а размеры проводника изменяются мало. Эти поверхностные заряды создают электрическое поле $\vec{E}'_{\sigma'}$ в K'.

Чтобы суммарное поле внутри проводника было равно нулю $\vec{E}' = 0$ кроме поля $\vec{E}'_{\sigma'}$ в K' должно существовать еще одно поле — поле $\vec{E}'_B$, причина которого в том, что в системе K есть магнитное поле $\vec{B}$. Внутри проводника:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_{\sigma'} + \vec{E}'_B = 0. \qquad =>$$

$$\vec{E}'_B = -\vec{E}'_{\sigma'} \approx -\vec{E}_\sigma = \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{V},\vec{B}\right]$$

В общем случае, если есть какие-то заряды в системе K, то эти заряды есть и в системе K', их поле $\vec{E}$ в обеих системах примерно одинаково. Тогда с учетом добавки $\vec{E}'_B$ поле в K':

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right].$$

Найдем теперь изменение поля $\vec{B}$ при переходе в движущуюся систему отсчета.

Рассмотрим поле точечного заряда q, покоящегося в системе отсчета K:

$$\begin{cases}\vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} = 0\end{cases}.$$

Пусть система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $\vec{V}$.

Тогда в системе K' скорость заряда $\vec{V}' = -\vec{V}$.

Движущийся в K' заряд, как элемент тока, создает магнитное поле $\vec{B}'_E$ в соответствии с законом Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c}\cdot\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$. Заменим элемент тока $Id\vec{l} \to q\vec{V}$ и получим:

$$\vec{B}_E' = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{V}',\vec{r}'\right]}{r'^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{V}',\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\left(-\vec{V}\right),\vec{r}\right]}{r^3} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, q\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right].$$

Здесь $\vec{r}\,' \approx \vec{r}$ — вектор из заряда в точку наблюдения магнитного поля имеет примерно одно и то же значение в двух системах отсчета, если пренебречь релятивистским сжатием.

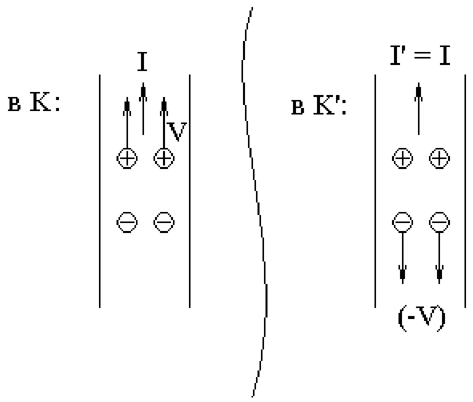
Это поле $\vec{B}_E'$ появляется в системе K' только потому, что есть поле $\vec{E}$ в K.

Заметим, что сила тока в незаряженном проводнике не изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую в нерелятивистском случае.

Пусть, например, в нейтральном проводнике отрицательные заряды неподвижны, а положительные движутся со скоростью $\vec{V}$.

Пусть система отсчета K' движется относительно системы K с той же скоростью $\vec{V}$.

Тогда в K' положительные заряды неподвижны, а отрицательные движутся со скоростью $\left(-\vec{V}\right)$. Сила тока в обоих случаях одинакова.



Если токи одинаковые, то и их магнитные поля одинаковы.

Пренебрегая релятивистским сжатием, при котором чуть меняются в разные стороны концентрации зарядов обоих знаков, получаем, что токи в незаряженных проводниках создают одинаковое магнитное поле в разных системах отсчета.

Тогда магнитные поля в двух системах отсчета отличаются на величину $\vec{B}_E' = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right]$:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right].$$

Суммируя выводы, получаем, что в нерелятивистском случае $V \ll c$:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right] \end{cases}.$$

Точные формулы теории относительности для преобразования электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.

$$\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \dfrac{E_y - \frac{V}{c} B_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ E_z' = \dfrac{E_z + \frac{V}{c} B_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x' = B_x \\ B_y' = \dfrac{B_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ B_z' = \dfrac{B_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Эффект Холла.

Рассмотрим проводник с током в магнитном поле. Магнитное поле можно представить в виде суммы двух составляющих: вдоль тока и перпендикулярно току. Составляющая магнитного поля вдоль тока не дает вклада в эффект Холла, и далее мы ее рассматривать не будем.

Если проводник с током находится в магнитном поле перпендикулярном току, то в проводнике возникает электрическое напряжение в направлении перпендикулярном току и перпендикулярном магнитному полю.

$U = R_H\, a\, j\, B$, где a — ширина проводника в направлении перпендикулярном магнитному полю $\vec{B}$, $\vec{j}$ — плотность тока вдоль проводника, R_H — постоянная Холла (табличная характеристика материала проводника), U — напряжение в эффекте Холла.

Объяснение эффекта Холла.

Электрический ток — движение зарядов. При движении зарядов в магнитном поле на заряды действует сила Лоренца: $\vec{F}_Л = \dfrac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$.

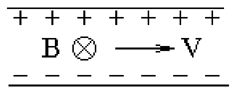
Эта сила смещает заряды в направлении перпендикулярном скорости или току и перпендикулярном магнитному полю.

Смещение зарядов приводит к образованию поверхностных зарядов. Поверхностные заряды создают поле $\vec{E}$, которое создает напряжение эффекта Холла:

$$U = \int_1^2 E_l dl.$$

При смещении зарядов поле $\vec{E}$ нарастает до тех пор, пока для оставшихся свободных зарядов ни будет выполнено условие:

$$q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right] = 0 \qquad => \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$$



$\uparrow \vec{F}_{л} = \frac{q}{c}[\vec{V}, \vec{B}]$

при $q > 0$

Скорость зарядов можно выразить через плотность тока. Раньше, в начале рассмотрения магнитного поля, мы уже доказали, что плотность тока $\vec{j} = nq\langle\vec{V}\rangle$ связана с концентрацией зарядов n, величиной каждого заряда q и скоростью зарядов $\vec{V}$. Тогда

$$\langle\vec{V}\rangle = \frac{\vec{j}}{nq}.$$

Подставим эту скорость в выражение $\vec{E} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$ и получим

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\left[\frac{\vec{j}}{nq}, \vec{B}\right] = -\frac{1}{cnq}\left[\vec{j}, \vec{B}\right] \quad => \quad E = -\frac{1}{cnq} j B$$

$$U = \int_1^2 E_l dl = E\int_1^2 dl = E\,a = -\frac{1}{cnq} a\, j\, B \quad =>$$

$$U = R_H\, a\, j\, B,$$

где $R_H = -\frac{1}{cnq}$ — постоянная Холла.

В системе СИ: $R_H = -\frac{1}{nq}$.

Для электронов $q < 0$ =>

$R_H = -\frac{1}{cnq} > 0$, но для многих металлов $R_H < 0$ — квантовый эффект.

$R_H > 0$ для: Fe, Co, Zn, Cd, Mo, W, ...

$R_H < 0$ для: Au, Ag, Pt, Cu, Ni, Al, ...

Теорема Лармора.

В магнитном поле электронная оболочка атома, как целое, приобретает вращение с угловой скоростью Ω:

$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$, где $e > 0$ — модуль заряда электрона, m_e — масса электрона, c — скорость света, $\vec{B}$ — внешнее по отношению к атому магнитное поле.

$\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{B}$

Заметим, что ядро атома вращается несколько иначе, так как для ядра другое отношение заряда к массе. Кроме того, заряд ядра распределен в большей мере ближе к поверхности ядра, а не равномерно по всей массе ядра.

Теорема Лармора справедлива только для небольших магнитных полей, когда можно пренебречь эффектами, пропорциональными B^2 по сравнению с эффектами, пропорциональными B.

Докажем, что в магнитном поле $\vec{B}$ и в системе отсчета вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \dfrac{e}{2m_e c}\vec{B}$ на электрон действуют те же силы, что и без магнитного поля в не вращающейся системе отсчета. Это и будет доказательством теоремы Лармора.

В магнитном поле к силам, действующим на электрон, добавляется сила Лоренца

$$\vec{F}_Л = \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right].$$

Во вращающейся системе отсчета добавляется центробежная сила инерции, которой можно пренебречь, так как $F_{ц.б.} \sim \Omega^2 \sim B^2$. В этом приближении во вращающейся системе отсчета к силам, действующим на электрон, из сил инерции добавляется только сила Кориолѝса:

$\vec{F}'_K = -2m_e\left[\vec{\Omega},\vec{V}'\right]$, где m_e — масса электрона, $\vec{V}'$ — скорость электрона относительно вращающейся системы отсчета.

Достаточно доказать, что $\vec{F}'_Л + \vec{F}'_K \approx 0$ во вращающейся штрихованной системе отсчета, пренебрегая слагаемыми пропорциональными B^2 и более высокими степенями магнитного поля B. Нам будет удобно рассматривать силу Лоренца в неподвижной системе отсчета, а кориолисовую силу во вращающейся системе отсчета. Относительное изменение силы при переходе в движущуюся систему отсчета имеет порядок $\dfrac{V^2}{c^2}$, и этим изменением можно пренебречь.

<u>Факультативная вставка.</u>

http://merlin.fic.uni.lodz.pl/concepts/2009_4/2009_4_671.pdf

Relativistic force transformation. Valery P. Dmitriyev. 2005.

Пусть система отсчета *K'* движется относительно системы отсчета *K* в направлении оси *X* со скоростью *V*. Сила действует на материальную точку, которая движется со скоростью $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$. Тогда

$$F'_x = F_x - \left(F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\right)\frac{\dfrac{V}{c^2}}{1-\dfrac{\dot{x}V}{c^2}}$$

$$F_y' = F_y \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{\dot{x}V}{c^2}} \qquad F_z' = F_z \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{\dot{x}V}{c^2}}$$

Конец факультативной вставки.

Тогда

$$\vec{F}_Л + \vec{F}_K' = \frac{(-e)}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] - 2m_e\left[\vec{\Omega},\vec{V}'\right] = \frac{(-e)}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] - 2m_e\left[\frac{e}{2m_ec}\vec{B},\vec{V}'\right] =$$

$$= \frac{(-e)}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] - \frac{e}{c}\left[\vec{B},\vec{V}'\right] =$$

$$= \frac{(-e)}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] + \frac{e}{c}\left[\vec{V}',\vec{B}\right] = \frac{(-e)}{c}\left[\vec{V}-\vec{V}',\vec{B}\right] = \frac{(-e)}{c}\left[\left[\vec{\Omega},\vec{r}\right],\vec{B}\right] =$$

$$= \frac{(-e)}{c}\left[\left[\frac{e}{2m_ec}\vec{B},\vec{r}\right],\vec{B}\right] \sim B^2$$

Здесь $\vec{V} = \vec{V}' + \left[\vec{\Omega},\vec{r}\right]$ — скорость электрона относительно неподвижной системы отсчета, $\vec{V}'$ — скорость электрона относительно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_ec}\vec{B}$ системы отсчета.

Получаем $\left(\vec{F}_Л + \vec{F}_K'\right) \sim B^2$, а теорема Лармора справедлива в пренебрежении величинами пропорциональными B^2.

Тогда $\vec{F}_Л' + \vec{F}_K' \approx 0$ — доказано и теорема Лармора доказана.

Ларморовское вращение электронной оболочки иногда называют ларморовской прецессией. Поясним происхождение этого названия.

Электронная оболочка атома может вращаться и без внешнего магнитного поля. Это вращение похоже на вращение гироскопа. В магнитном поле ось вращения этого гироскопа прецессирует со скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_ec}\vec{B}$ в соответствии с теоремой Лармора. Поэтому вращение электронной оболочки в магнитном поле часто называют ларморовской прецессией.

В системе СИ: $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e}\vec{B}$.

Дополнение к теореме Лармора.

Мы доказали, что в магнитном поле электронная оболочка может вращаться с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_ec}\vec{B}$.

Однако будет ли она раскручиваться при включении магнитного поля?

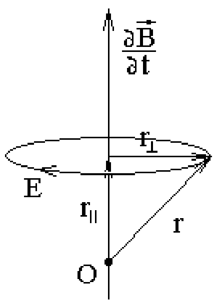
Оказывается, что будет.

Дело в том, что при включении магнитного поля вокруг его производной по времени $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ возникает вихревое электрическое поле $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, которое и раскручивает электронную оболочку.

Для доказательства достаточно доказать, что в системе K', которая вращается с переменной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$, сила со стороны вихревого электрического поля $\vec{F} = q\vec{E}$ уравновешивается силой инерции, которая возникает при ускоренном вращении системы K':

$$\vec{F}_{ин} = -m_e\left[\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}\right] = -m_e\left[\frac{e}{2m_e c}\dot{\vec{B}}, \vec{r}\right] = -\frac{e}{2c}\left[\dot{\vec{B}}, \vec{r}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}, \dot{\vec{B}}\right].$$

Найдем величину $\vec{E}$ вихревого электрического поля, которое возникает вокруг $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ производной от магнитного поля.



Здесь O — центр атома — атомное ядро, $\vec{r}$ — радиус-вектор электрона, $\vec{r}_{||}$ — составляющая радиус-вектора электрона вдоль производной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{r}_{\perp}$ — составляющая радиус-вектора электрона перпендикулярная производной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Вихревое электрическое поле можно найти из уравнения Максвелла $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, которое в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ следует из закона электромагнитной индукции Фарадея.

Возьмем в качестве контура интегрирования окружность, перпендикулярную производной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dot{\vec{B}}$.

Тогда $2\pi r_{\perp} E = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r_{\perp}^2 B\right)$ => $E = -\frac{r_{\perp}}{2c}\dot{B}$ =>

Как видно из рисунка, направление вихревого векторного поля $\vec{E}$ совпадает с направлением векторного произведения, $\left[\vec{r}_{\perp}, \dot{\vec{B}}\right]$ тогда с учетом

$E = -\frac{r_{\perp}}{2c}\dot{B}$ получим

$$\vec{E} = \frac{1}{2c}\left[\vec{r}_{\perp}, \dot{\vec{B}}\right].$$

Сила, действующая на электрон с зарядом $q = -e$ со стороны вихревого электрического поля, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} = -\frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{\perp}, \dot{\vec{B}}\right].$$

Сравним эту силу с силой инерции в ускоренно вращающейся системе отсчета

$$\vec{F}_{ин} = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}, \dot{\vec{B}}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}, \dot{\vec{B}}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{||}, \dot{\vec{B}}\right] + \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{\perp}, \dot{\vec{B}}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{\perp}, \dot{\vec{B}}\right],$$

где $\left[\vec{r}_{||}, \dot{\vec{B}}\right] = 0$, так как $\vec{r}_{||} \,||\, \dot{\vec{B}}$. Тогда

$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = 0$ — дополнение к теореме Лармора доказано.

Гиромагнитное отношение.

Гиромагнитное отношение — отношение магнитного момента электрона к его механическому моменту импульса.

Рассмотрим сначала отношение магнитного момента к механическому моменту импульса при движении электрона по окружности вокруг ядра атома.

Момент импульса:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m_e\vec{V}\right] \quad => \quad L = rm_eV.$$

Теперь найдем магнитный момент.

$$|\vec{m}| = \left|\frac{I}{c}\vec{S}\right| = \frac{I}{c}\pi r^2$$

Разделим магнитный момент на механический и получим модуль гиромагнитного отношения

$$|\gamma| = \frac{|\vec{m}|}{L} = \frac{I \cdot \pi r^2}{c \cdot rm_eV} = \frac{I \cdot \pi r}{m_ecV}.$$

Подставим в правую часть равенства $V = \frac{2\pi r}{T}$, где скорость равна отношению длины пути ко времени, T — период обращения электрона. Тогда

$$|\gamma| = \frac{I \cdot \pi r \cdot T}{m_e c \cdot 2\pi r} = \frac{IT}{2m_e c} = \frac{e}{2m_e c},$$

где последнее равенство получено с учетом того, что $I = \frac{e}{T}$ — сила тока равна отношению заряда ко времени его прохождения через сечение проводника (в нашем случае — через сечение орбиты электрона).

Момент импульса $\vec{L}$ образует правый винт с направлением движения электрона по орбите. Магнитный момент образует правый винт с направлением тока. Но заряд электрона отрицательный, поэтому ток направлен навстречу движению электрона по орбите. В результате, момент импульса атома и его магнитный момент имеют противоположные направления.

$\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{L}$

Если $\vec{m} = \gamma\vec{L}$ — определение гиромагнитного отношения γ, то гиромагнитное отношение отрицательно

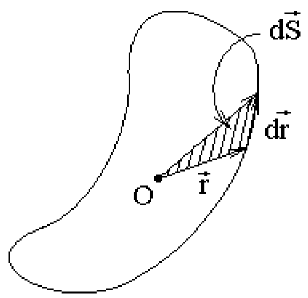
$$\gamma = -\frac{e}{2m_e c} < 0.$$

В системе СИ: $\gamma = -\frac{e}{2m_e}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Найдем теперь гиромагнитное отношение в более общем случае движения электронного облака в атоме.

Магнитный дипольный момент для контура с током $\vec{m} = \frac{I}{c}\vec{S}$. Выразим площадь $\vec{S}$, ограниченную контуром, в виде интеграла.



Из рисунка видно, что $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$, так как вектор площадки $d\vec{S}$ направлен, как и векторное произведение $[\vec{r}, d\vec{r}]$, а длина вектора $dS = |d\vec{S}|$ равна площади заштрихованного треугольника $dS = \frac{1}{2} \cdot r \cdot dr \cdot \sin(\angle\vec{r}, d\vec{r})$, что совпадает с половиной длины векторного произведения $[\vec{r}, d\vec{r}]$.

Тогда $\vec{S}=\frac{1}{2}\oint_l[\vec{r},d\vec{r}]$. Заменим здесь $d\vec{r}$ на $d\vec{l}$ — отрезок вдоль контура и получим

$$\vec{m}=\frac{I}{c}\vec{S}=\frac{I}{2c}\oint_l\left[\vec{r},d\vec{l}\,\right].$$

Заменим теперь элемент тока $I\,d\vec{l}$ на элемент тока $\vec{j}\,dV$ и получим:

$$\vec{m}=\frac{1}{2c}\int_V\left[\vec{r},\vec{j}\,\right]dV.$$

$\vec{j}=nq\vec{\mathcal{V}}=\rho\vec{\mathcal{V}}$, где n — концентрация зарядов, q — величина каждого заряда, $\vec{\mathcal{V}}$ — скорость движения зарядов (чтобы не путать с объемом V), ρ — объемная плотность заряда.

Тогда

$$\vec{m}=\frac{1}{2c}\int_V[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]\rho dV.$$

Сравним это выражение для магнитного момента электронной оболочки атома и аналогичное выражение для момента импульса электронной оболочки:

$$\vec{L}=m_e[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]=\int_V[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]\rho_m dV,$$

где m_e — масса электрона, $\rho_m=\frac{dm}{dV}$ — плотность массы. Учтем, что $\frac{\rho_m}{\rho}=\frac{m_e}{-e}$. Тогда $\rho_m=-\frac{m_e}{e}\rho$ и

$$\vec{L}=-\int_V[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]\frac{m_e}{e}\rho dV=-\frac{m_e}{e}\int_V[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]\rho dV$$

Тогда

$$\vec{m}=\frac{1}{2c}\int_V[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]\rho dV=-\frac{e}{2m_ec}\cdot\left(-\frac{m_e}{e}\int_V[\vec{r},\vec{\mathcal{V}}]\rho dV\right)=-\frac{e}{2m_ec}\vec{L}.$$

Сравним это с определением гиромагнитного отношения $\vec{m}=\gamma\vec{L}$ и получим

$$\gamma=-\frac{e}{2m_ec}.$$

Конец факультативной вставки.

Спин электрона.

Изучение спектральных дублетов (пар линий) щелочных металлов (Na, K, ...) показало, что у каждого электрона кроме орбитального момента импульса должен быть еще и другой так называемый спиновый момент импульса и соответствующий ему магнитный момент. Причем гиромагнитное отношение для спина вдвое больше, чем для орбиты:

$\vec{m} = -\dfrac{e}{m_e c}\vec{S}$, где $\vec{S}$ — спиновый момент импульса.

Этот момент импульса для наглядности можно приписать вращению электрона вокруг своей оси.

Никому неизвестно, почему спиновое гиромагнитное отношение ровно вдвое больше орбитального.