Факультативно. Световые волны в прозрачной изотропной среде.

В качестве первого варианта упрощения уравнений Максвелла рассмотрим световые волны в прозрачной изотропной среде. Вакуум можно рассматривать, как частный случай прозрачной изотропной среды с единичной диэлектрической проницаемостью ε и единичной магнитной проницаемостью μ.

Для прозрачной изотропной среды выполняется условие $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ пропорциональности вектора электрического смещения $\vec{D}$ и вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, хотя в общем случае в оптике это условие пропорциональности не выполняется. Например, для среды поглощающей свет, которая будет рассмотрена позднее, колебания векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ сдвинуты по фазе. При этом векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ не могут быть пропорциональны в обычном смысле, так как обращаются в ноль в разные моменты времени.

Кроме того, в сильных световых полях, когда электрическое поле $\vec{E}$ световой волны сравнимо по величине с электрическим полем внутри атома (полем между электронами и атомным ядром), связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$ становится нелинейной. Нелинейная оптика в минимальном объеме может быть рассмотрена в конце курса.

Также в минимальном объеме будут рассмотрены квантовые подходы в оптике.

Для анизотропной среды диэлектрическая проницаемость ε — матрица или тензор второго ранга, что будет подробнее рассмотрено в разделе кристаллооптики.

Будем считать, что в прозрачной среде нет свободных зарядов $\rho = 0$ и нет токов проводимости $\vec{j} = 0$. Свободные заряды в оптическом поле будут кратко рассмотрены в вопросе "Оптика плазмы".

Экзамен. Волновые уравнения для светового поля в прозрачной изотропной среде.

Венцом построения теории электромагнетизма является система уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}.$$

В системе СИ: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$, $\begin{cases} \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\,\vec{E} \\ \vec{B}=\mu_0\mu\,\vec{H} \end{cases}$, $\varepsilon_0\mu_0=\dfrac{1}{c^2}$.

Рассмотрим одно из уравнений системы Максвелла:

$rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, возьмем от него ротор и получим:

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=rot\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{B}\right)=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{H}\right).$$

Подставим значение $rot\left(\vec{H}\right)$ в правую часть равенства из другого уравнения Максвелла $rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, и, с учетом отсутствия токов проводимости $\vec{j}=0$ в рассматриваемой прозрачной изотропной среде, получим

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=-\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad =>$$

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (1.1).$$

С другой стороны:

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right],$$

где $\vec{\nabla}$ — дифференциальный оператор или вектор набла:

$$\vec{\nabla}\equiv\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ — единичные векторы, направленные по осям x,y,z.

Правую часть равенства $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]$ можно преобразовать по правилу "бац минус цап" для двойного векторного произведения:

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как в рассматриваемой среде нет свободных зарядов:

$$\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right)=div\left(\vec{E}\right)=div\left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{\varepsilon}div\left(\vec{D}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}=0.$$

Тогда останется только второе слагаемое и

$$rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right) = -\vec{E}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} = -\Delta\vec{E} \qquad (1.2).$$

Здесь квадрат вектора набла равен оператору Лапласа (лапласиану):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Приравнивая друг другу правые части равенств (1.1) и (1.2) для одной и той же величины $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)$, получим дифференциальное уравнение для поля E:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

В математике уравнение $\Delta A - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ для неизвестной функции A от координат и времени называется волновым уравнением, тогда

$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ — волновое уравнение для электрического поля $\vec{E}$.

Сравнивая это уравнение с волновым уравнением математики, получаем:

$$V \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Как выясниться позднее, V — это фазовая скорость плоских волн, которые являются решением волнового уравнения.

Аналогично, рассмотрев $rot\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)$ вместо выражения $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)$, можно получить волновое уравнение для магнитного поля:

$$\Delta\vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

<u>Факультативно. Частные решения волнового уравнения.</u>

Общее решение любого линейного уравнения можно представить, как суперпозицию его частных решений.

Основной метод поиска частных решений дифференциальных уравнений в частных производных — это метод разделения переменных.

Метод разделения переменных позволяет найти решения уравнений многих типов: волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера в квантовой механике и других уравнений.

Рассмотрим волновое уравнение для некоторой переменной величины $A\left(t,\vec{r}\right)$:

$$\Delta A - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Будем искать решения этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$A(t,\vec{r}) = T(t)\cdot R(\vec{r}),$$

одна из которых зависит только от времени, а другая — только от координат.

Таких решений окажется настолько много, что нам их будет достаточно. Любая линейная комбинация этих решений тоже будет решением, что следует из линейности уравнения относительно неизвестной функции A.

Подставим $A = TR$ в волновое уравнение для величины A и получим:

$\Delta(TR) - \dfrac{1}{V^2}\cdot\ddot{(TR)} = 0$, где две точки — это обозначение второй производной по времени.

Вынесем функцию времени T за вторые производные по координатам в операторе Лапласа Δ, а функцию координат R вынесем за вторую производную по времени:

$$T\Delta R - \frac{1}{V^2}R\ddot{T} = 0.$$

Разделим это равенство на произведение TR и получим:

$$\frac{\Delta R}{R} - \frac{1}{V^2}\cdot\frac{\ddot{T}}{T} = 0.$$

Здесь первое слагаемое зависит только от радиус-вектора $\vec{r}$, а второе — только от времени t. Это возможно только в том случае, если оба слагаемых равны одной и той же константе.

Обозначим эту константу, как $\left(-k^2\right)$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta R}{R} = -k^2 \\ \dfrac{1}{V^2}\cdot\dfrac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \Delta R + k^2 R = 0 \\ \ddot{T} + (kV)^2 T = 0 \end{cases}.$$

В случае, если константа $\left(-k^2\right)$ окажется положительной, будем считать, что k — чисто мнимое число. Так при рассмотрении вопроса о полном внутреннем отражении, одна из проекций вектора $\vec{k}$ действительно окажется мнимой.

Для пространственной части решения волнового уравнения получим

$\Delta R + k^2 R = 0$ — уравнение Гельмгольца.

А для временной части получим

$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$ — уравнение гармонических колебаний, где для краткости введено обозначение $\omega \equiv kV$.

Комплексные решения этих уравнений выглядят проще, чем вещественные решения. Поэтому обычно ищут комплексные решения, а затем рассматривают вещественную часть комплексного решения. Для линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть общего комплексного решения является общим вещественным решением.

Будем комплексные величины обозначать волной над соответствующей величиной, тогда $\tilde{T}$ в наших обозначениях — комплексная величина, а T — вещественная величина.

Общее комплексное решение уравнения гармонических колебаний имеет следующий вид:

$\tilde{T} = \tilde{T}_{01} e^{i\omega t} + \tilde{T}_{02} e^{-i\omega t}$, где $\tilde{T}_{01}$ и $\tilde{T}_{02}$ — комплексные произвольные константы интегрирования.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{T} = \tilde{T}_0 e^{-i\omega t}$, где ω принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками.

Знак минус в показателе мнимой экспоненты — это вопрос соглашения. $\tilde{T}_0$ — произвольная комплексная константа интегрирования, различная для положительного и отрицательного значений ω.

Вернемся теперь к рассмотрению пространственной части решения волнового уравнения — к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta R(\vec{r}) + k^2 R(\vec{r}) = 0.$$

Продолжим поиск частных решений волнового уравнения методом разделения переменных. Будем теперь искать решение уравнения Гельмгольца методом разделение переменных в декартовых координатах. Ищем решение уравнения Гельмгольца для пространственной части решения волнового уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной координаты:

$$R(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Подставим $R = XYZ$ в уравнение Гельмгольца и получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (XYZ) + k^2 XYZ = 0.$$

Вынесем за знак производной по x-координате функции Y и Z, величины которых не зависят от переменной x. Аналогично поступим с производными по y и z. Тогда получим:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2 XYZ = 0,$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная в каждом случае по своей переменной величине.

Разделим это равенство на произведение функций XYZ и получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2,$$

где первое слагаемое зависит только от x-координаты, второе — только от y, третье — только от z. Это возможно только в том случае, если каждое из этих слагаемых — константа. Обозначим эти константы, как $\left(-k_x^2\right)$, $\left(-k_y^2\right)$, $\left(-k_z^2\right)$. Тогда

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2,$$

и величины k_x, k_y, k_z можно рассматривать, как проекции некоторого вектора $\vec{k}$.

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \dfrac{Y''}{Y} = -k_y^2 \\ \dfrac{Z''}{Z} = -k_z^2 \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее первое из трех уравнений.

$\dfrac{X''}{X} = -k_x^2$ => $X'' + k_x^2 X = 0$ — это уравнение гармонических колебаний только не от времени, а от пространственной координаты x.

$\tilde{X} = \tilde{X}_{01} e^{ik_x x} + \tilde{X}_{02} e^{-ik_x x}$ — общее комплексное решение этого уравнения.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{X} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x}$, где k_x принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками. То, что выбрано слагаемое без минуса в экспоненте — это вопрос соглашения.

Аналогично:

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} \end{cases}.$$

Подставим $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ в $\tilde{R}$ и получим:

$$\tilde{R} = \tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x}\, \tilde{Y}_0 e^{ik_y y}\, \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} =$$

$$= \tilde{X}_0 \tilde{Y}_0 \tilde{Z}_0\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} = \tilde{R}_0\, e^{i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)} = \tilde{R}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}$$

— это частное решение уравнения Гельмгольца.

Вернемся к решению волнового уравнения $\Delta A - \dfrac{1}{V^2}\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$:

$$\tilde{A}\left(t,\vec{r}\right) = \tilde{R}\tilde{T} = \tilde{R}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)} \cdot \tilde{T}_0\, e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right) - \omega t\right)},$$

где $\tilde{A}_0 = \tilde{R}_0 \tilde{T}_0$ — произвольная комплексная константа интегрирования.

$\tilde{A} = \tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right) - \omega t\right)}$ — частное комплексное решение волнового уравнения в виде плоских монохроматических волн.

То, что эта волна плоская, будет видно из анализа решения в последующих вопросах. Монохроматическая волна — это волна, в каждой пространственной точке которой колебания происходят только на одной частоте ω. Напомним, что величины k и ω не являются независимыми, так как произведение kV было нами обозначено, как $\omega = kV$, где для электрического $\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ и магнитного $\Delta\vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$ поля $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — параметр волнового уравнения.

Есть причина, по которой решение в виде плоских монохроматических волн играет большую роль в оптике.

Дело в том, что с помощью преобразования Фурье по времени и координатам можно любую функцию этих переменных разложить по плоским монохроматическим волнам, если только функция достаточно быстро спадает на временных и пространственных бесконечностях.

Любое явление, такое как отражение, преломление, рассеяние, поглощение света, можно сначала рассмотреть для плоской монохроматической волны, а затем для любого света, как суперпозиции плоских волн.

Есть еще одна причина, по которой плоские монохроматические волны играют большую роль в оптике.

Взаимодействие любой световой волны с веществом с хорошей точностью такое же, как и взаимодействие плоской световой волны. Это справедливо в том случае, если радиусы кривизны поверхности равных фаз световой волны достаточно велики. Велики по сравнению с чем? Есть два параметра с размерностью длины — это длина волны и размер атома. Характерный размер атома составляет десятые доли нанометра, что в тысячу раз меньше длины волны света, а саму длину волны света в оптике обычно рассматривают, как малый параметр по сравнению с геометрическими размерами предметов.

Другими словами, если рассмотреть малый объем, линейные размеры которого гораздо меньше радиусов кривизны поверхности равных фаз, то в этом объеме волну можно считать почти плоской.

Это позволяет рассматривать отражение, преломление, поглощение и рассеяние света на примере плоской световой волны, так как всегда можно будет выбрать достаточно малый объем, в котором световую волну можно будет считать почти плоской и рассматривать отражение, преломление, поглощение или рассеяние света в этом малом объеме.

Плоская симметрия решений связана с тем, что в уравнении Гельмгольца мы разделяли переменные в декартовой системе координат.

Если при решении уравнения Гельмгольца разделять переменные в цилиндрической системе координат, то получатся решения волнового уравнения в виде цилиндрических волн. Интересно, что среди этих волн есть волны, которые бегут вдоль оси и одновременно вокруг нее. В связи с этим у фотона образуется так называемый орбитальный угловой момент:

http://igorivanov.blogspot.ru/2011/04/oam.html

Заметим, что фотон с орбитальным угловым моментом может иметь одну частоту, то есть соответствовать монохроматическому свету. В таком случае через промежуток времени равный периоду волны поверхность равных фаз перейдет сама в себя. Ясно, что далеко от выделенной оси поверхность равных фаз сместится на длину волны, тогда и во всем пространстве она сместится на длину волны вдоль выделенной оси. Около выделенной оси направление движения волны перпендикулярное поверхности равных фаз составляет заметный угол с осью. В результате окажется, что даже в вакууме скорость световой волны отличается от константы *c* и равна константе *c*, умноженной на косинус угла между выделенной осью и направлением движения волны.

Если разделять переменные в сферической системе координат, то получатся сферические волны; если в трехмерной эллиптической системе — гауссовы пучки, похожие на лазерные пучки лучей, которые мы кратко рассмотрим позднее.

Экзамен. Параметры плоской монохроматической волны.

$\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ — плоская монохроматическая волна в комплексной форме.

Если эту плоскую монохроматическую волну подставить в волновое уравнение $\Delta\tilde{A} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial t^2} = 0$, то оно превращается в тождество при условии $\omega = kV$. Результат подстановки является доказательством того, что рассматриваемая плоская монохроматическая волна является решением волнового уравнения.

Можно доказать, что для любого линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Тогда $\mathrm{Re}\left(\tilde{A}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right)$ — плоская монохроматическая волна в вещественной форме, она является решением волнового уравнения при условии $\omega = kV$.

Величину $\tilde{A}_0$ называют комплексной амплитудой волны,

Если представить величину комплексной амплитуды $\tilde{A}_0$, как комплексное число в экспоненциальной форме $\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}$, то

A_0 — вещественная амплитуда волны.

φ_0 — начальная фаза волны.

$$\tilde{A}(t,\vec{r}) = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = A_0\, e^{i\varphi_0} e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = A_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)} =$$
$$= A_0\, e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)} e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)} e^{-i\omega t}$$

здесь $\tilde{A}_0\, e^{i\left(\vec{k},\vec{r}\right)}$ — комплексная амплитуда колебаний в точке с радиус-вектором $\vec{r}$,

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi_0\right)$ — начальная фаза колебаний в точке с радиус-вектором $\vec{r}$,

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)$ — фаза волны,

ω — циклическая частота волны, которую для краткости обычно будем просто называть частотой волны.

$\omega = 2\pi\nu$, где ν — частота волны.

$\nu = \dfrac{1}{T}$, где T — период волны.

$\vec{k}$ — волновой вектор, как будет показано в следующем вопросе, он направлен перпендикулярно поверхности равных фаз.

$k \equiv \left|\vec{k}\right|$ — волновое число.

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны или пространственный период волны в направлении вектора $\vec{k}$.

$\dfrac{1}{\lambda}$ — пространственная частота волны.

Тогда $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — циклическая пространственная частота волны,

k_x, k_y, k_z — циклические пространственные частоты вдоль осей x, y, z.

<u>Экзамен. Фазовая скорость волны.</u>

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — единичные векторы вдоль декартовых осей координат.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну. Направим ось z вдоль вектора $\vec{k}$. Тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ => $k_x = k_y = 0$ => $k_z = \left|\vec{k}\right| = k$.

Тогда $\left(\vec{k},\vec{r}\right) = k_x x + k_y y + k_z z = kz$ =>

$\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right) = kz - \omega t + \varphi_0$ — фаза волны.

Зафиксируем момент времени t и приравняем фазу к константе. Получающееся при этом уравнение относительно пространственных координат оказывается уравнением поверхности равных фаз или уравнением поверхности постоянной фазы:

$$\left.\begin{aligned} &k\,z-\omega t+\varphi_0=const \\ &t=const \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad z=const$$ — уравнение поверхности равных фаз или фазовой поверхности. Поверхность равных фаз называют еще фронтом волны.

Поверхность равных фаз $z=const$ — это плоскость, следовательно, волна $\tilde{A}(t,\vec{r})=\tilde{A}_0\,e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ действительно плоская. Поверхность $z=const$ перпендикулярна единичному вектору $\vec{e}_z$, направленному вдоль оси z. Вектор $\vec{e}_z$ совпадает по направлению с вектором $\vec{k}$ (направление оси z так было выбрано). Следовательно, для плоской волны фронт волны всегда перпендикулярен волновому вектору $\vec{k}$.

Неплоскую волну в малом объеме можно считать почти плоской, если радиусы кривизны фронта гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Тогда направление, перпендикулярное поверхности равных фаз, можно считать направлением волнового вектора и для неплоской волны.

Найдем теперь фазовую скорость волн, под которой будем понимать скорость перемещения поверхности равной фазы, фазы равной некоторой постоянной величине.

Ось z опять направим вдоль вектора $\vec{k}$ и продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз $k\,z-\omega t+\varphi_0=const$, в котором координату z будем считать функцией времени t.

$$k\,z-\omega t+\varphi_0=const \qquad \Big| \quad \frac{d\,\cdot}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$k\frac{dz}{dt}-\omega\frac{dt}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{k}$$ — фазовая скорость, обозначим ее, как $V_ф$, тогда

$$V_ф=\frac{\omega}{k},$$ что справедливо для плоской волны любой природы, не только для световой волны.

Поверхность равных фаз движется вдоль оси z, следовательно, туда же направлена фазовая скорость и с учетом $\vec{k}\uparrow\uparrow\vec{e}_z$ получаем

$$\vec{V}_ф\uparrow\uparrow\vec{k}.$$

Напомним, что при поиске решения волнового уравнения мы для краткости ввели обозначение $\omega\equiv kV$. Подставляя его в формулу для фазовой скорости $V_ф=\dfrac{\omega}{k}$, получим $V_ф=V$.