

### Экзамен. Фазовая скорость волны (продолжение).

Как было показано в вопросе "Волновые уравнения ... в прозрачной изотропной среде"  $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ . Тогда фазовая скорость электромагнитных волн равна

$$V_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Из этого равенства можно найти величину показателя преломления  $n$ . По определению показателя преломления  $V_{\phi} = \frac{c}{n}$ . Сравнивая это равенство с равенством  $V_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , получаем

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

$$\text{В оптике } \mu \approx 1 \Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon}.$$

Обычно в оптике  $n > 1$  и соответственно  $V_{\phi} < c$ . Однако, в узком диапазоне частот вблизи линии поглощения возможно выполнение условий  $0 < n < 1$  и  $V_{\phi} > c$ . Наконец, в некоторых экзотических ситуациях фазовая скорость может оказаться даже отрицательной величиной. Подробнее смотрите работу:

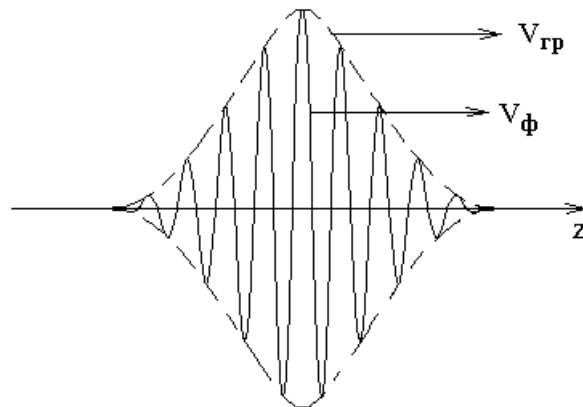
[Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  \$\epsilon\$  и  \$\mu\$ . // УФН. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517-526.](#)

Такие вещества называются метаматериалами:

<http://ru.wikipedia.org/wiki/Метаматериал>

### Экзамен. Групповая скорость волн.

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет огибающую — относительно медленную функцию координат и времени, и имеет заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды, которую еще называют несущей.



Групповая скорость  $V_{gp}$  — это скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость  $V_{\phi}$  — это скорость движения заполнения светового импульса.

Групповая скорость отличается от фазовой скорости только в том случае, когда показатель преломления среды  $n$  зависит от частоты света  $\omega$ , то есть при условии  $n(\omega) \neq const$ . Напомним, что по определению показатель преломления связан с фазовой скоростью  $V_{\phi} = \frac{c}{n}$ .

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл.

Рассмотрим нестрогий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть две плоские волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  распространяются в направлении оси  $z$ . Пусть разность частот мала:  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ . Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны  $A_0$ .

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$\begin{aligned} A(t, z) &= A_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \end{aligned}$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_1 + k_2}{2} \equiv k \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \equiv \omega \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\frac{\delta\omega}{2} \\ \frac{k_1 - k_2}{2} = -\frac{\delta k}{2} = -\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} \end{array} \right.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A(t, z) &= 2A_0 \cos\left(-\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} z + \frac{\delta\omega}{2} t\right) \cdot \cos(kz - \omega t) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right) \cdot \cos(kz - \omega t). \end{aligned}$$

Здесь  $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right)$  — огибающая, которая медленно изменяется при изменении  $t$  или  $z$ , так как  $|\delta\omega| \ll \omega$ .

$\cos(kz - \omega t)$  — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей  $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}\right)$  можно

сказать, что  $\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2}$  — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$$\left(\frac{dk}{d\omega}z - t\right)\frac{\delta\omega}{2} = const, \text{ считая координату } z \text{ функцией времени, и получим}$$

$$\left(\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{dt}{dt}\right) \cdot \frac{\delta\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \text{ — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или}$$

скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн  $V_{gp}$ . Тогда

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} \text{ — групповая скорость для волны любой природы, не только для}$$

световой волны. Выражение для групповой скорости  $V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$  напоминает

выражение для фазовой скорости  $V_{\phi} = \frac{\omega}{k}$ .

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте  $V_{gp} \leq c$ . Тем не менее,

неравенство  $\frac{d\omega}{dk} > c$  — возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

### **Факультативно. Обычно групповая скорость света меньше фазовой скорости.**

Это следует из неравенства  $\frac{dn}{d\omega} > 0$ , которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее.

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$$V_{\phi} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\omega}{c}, \text{ тогда}$$

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)} = c \frac{d\omega}{d(n\omega)} = \frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} < \frac{c}{n} = V_{\phi} \quad \Rightarrow$$

$$V_{gp} < V_{\phi} \text{ при условии нормальной дисперсии } \frac{dn}{d\omega} > 0.$$

### Экзамен. Поперечность световых волн.

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $y' = a$ .

Возьмем от него производную и получим  $y'' = 0$ .

Общее решение второго уравнения имеет вид:  $y = Ax + B$ .

Не все решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Лишние решения появились в результате дифференцирования первого уравнения, так как при этом часть информации о решениях была утеряна.

Вернемся к рассмотрению волнового уравнения.

Волновое уравнение для вектора  $\vec{E}$  было получено в результате дифференцирования, то есть применения операции  $rot(\cdot)$ , к одному из уравнений системы Максвелла. Следовательно, не все решения волнового уравнения являются решениями системы уравнений Максвелла.

Подставим вещественное решение волнового уравнения для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в виде плоских монохроматических волн в уравнения Максвелла и проверим, являются ли они решениями уравнений Максвелла.

$$\vec{E} = \text{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = \text{Re}\left(\tilde{E}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}\right) \quad \vec{B} = \text{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right) = \text{Re}\left(\tilde{B}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}\right)$$

Для нас будет важно, что оба поля зависят от координат и времени только через их комбинацию в виде  $((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)$ . Обозначим эту комбинацию буквой  $\varphi = (\vec{k}, \vec{r}) - \omega t$ .

$\varphi$  — это фаза волны без учета начальной фазы  $\varphi_0$ , которая спрятана в комплексных амплитудах  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{B}_0$  и может оказаться различной для различных проекций векторов  $\vec{E}(\varphi)$  и  $\vec{B}(\varphi)$ .

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора  $\vec{E}(\varphi)$ :

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}{\partial t} = -\omega \cdot \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

То есть для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = -\omega \frac{d \cdot}{d\varphi}.$$

Рассмотрим теперь производную от вектора  $\vec{E}(\varphi)$  по  $x$  координате:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} &= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}{\partial x} = \\ &= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{\partial(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial x} = k_x \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\end{aligned}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = k_x \frac{d \cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z \frac{d}{d\varphi} = \vec{k} \frac{d}{d\varphi}.$$

Теперь вернемся к рассмотрению уравнений Максвелла для вещественных плоских монохроматических волн.

$$\begin{aligned}div(\vec{D}) = 0 &\Leftrightarrow (\vec{\nabla}, \vec{D}) = 0 \Rightarrow \left( \vec{k} \frac{d}{d\varphi}, \vec{D} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} (\vec{k}, \vec{D}) = 0 \\ \Rightarrow (\vec{k}, \vec{D}) &= const.\end{aligned}$$

Константа в правой части равенства не зависит ни от координат, ни от времени. Рассмотрим это равенство в некоторый момент времени, а затем рассмотрим его же в другой момент времени через половину периода световой волны. Каждая проекция вектора  $\vec{D}$  через половину периода поменяет знак, вектор  $\vec{k}$  от времени не зависит, следовательно, левая часть равенства поменяет знак через половину периода. Правая часть равенства тоже обязана поменять знак через половину периода, но она не может измениться, так как она — константа. Такое возможно только при условии, что константа равна нулю. Тогда  $(\vec{k}, \vec{D}) = 0$ .

Следовательно

$$\vec{D} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}.$$

Аналогично из равенства  $div(\vec{B}) = 0$  получаем  $\vec{B} \perp \vec{k}$ .

$$\text{Рассмотрим равенство } rot(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left[ \vec{k} \frac{d}{d\varphi}, \vec{E} \right] = -\frac{1}{c} (-\omega) \frac{d}{d\varphi} \vec{B} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\omega}{c} \vec{B} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ [\vec{k}, \vec{E}] - \frac{\omega}{c} \vec{B} \right\} = 0 \Rightarrow [\vec{k}, \vec{E}] - \frac{\omega}{c} \vec{B} = const \Rightarrow$$

$$[\vec{k}, \vec{E}] - \frac{\omega}{c} \vec{B} = 0 \Rightarrow [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}.$$

Тогда векторы  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  взаимно ортогональны в каждой точке пространства и в каждый момент времени. Из равенства  $[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}$  следует, что векторы  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$  образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов, как и векторы  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ .

Сравним с тройкой векторов  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ , где  $\vec{S}$  — вектор Пойнтинга. Из равенства  $\frac{c}{4\pi} \cdot [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{S}$  с учетом ортогональности векторов  $\vec{E}, \vec{H}$  получим, что векторы  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$  тоже образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Следовательно

$\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{S}$  — в прозрачной изотропной среде.

Позднее при рассмотрении кристаллооптики мы получим, что в анизотропной среде векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{S}$  не параллельны. При этом вектор  $\vec{k}$  показывает направление движения поверхности равных фаз, а вектор  $\vec{S}$  показывает направление движения энергии электромагнитного поля.

В результате рассмотрения этого вопроса приходим к выводу. Для того, чтобы плоские электромагнитные волны были бы решением уравнений

Максвелла необходимо, чтобы волны были поперечны  $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \end{cases}$ , а электрическое поле ортогонально магнитному полю  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .

Для того чтобы плоские электромагнитные волны были решением системы уравнений Максвелла, требуется выполнение определенного соотношения величин векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , которое обсуждается в следующем вопросе.

### **Экзамен. Соотношение полей $E$ и $H$ в бегущей световой волне.**

Из условия  $\vec{k} \perp \vec{E}$  получим  $\sin(\vec{k}, \vec{E}) = 1$ . Тогда  $[[\vec{k}, \vec{E}]] = kE$ . Применим

этот результат к левой части равенства  $[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}$  и получим  $kE = \frac{\omega}{c} B \Rightarrow$

$$cE = \frac{\omega}{k} B \Rightarrow cE = V_{\phi} B \Rightarrow cE = \frac{c}{n} B \Rightarrow B = nE \Rightarrow$$

$$B = \sqrt{\epsilon\mu} E \Rightarrow \mu H = \sqrt{\epsilon\mu} E \Rightarrow \sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$$

$$\frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} \text{ — в бегущей световой волне энергия электрического поля}$$

равна энергии магнитного поля.

$$\text{В системе СИ: } \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

В вакууме решение волнового уравнения в виде плоской монохроматической волны является решением уравнений Максвелла только при выполнении условий  $\begin{cases} E = B \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$  в каждой точке и в каждый момент времени.

Если хотя бы одно из двух условий не выполнено, то через эту точку в пространстве проходит не одна волна, а несколько волн в разных направлениях.

### Экзамен. Интенсивность света.

Об интенсивности света говорят только либо для одной бегущей волны, либо для суммы волн, которые бегут почти в одном направлении.

По определению интенсивности:

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle_t, \text{ где } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \text{ — вектор Пойнтинга.}$$

$$\text{В системе СИ } I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle_t \text{ и } \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Интенсивность света  $I$  — усредненная по времени плотность потока энергии, то есть энергия, которая в единицу времени протекает через единицу площади, если площадка перпендикулярна свету.

Под временем усреднения подразумевают время реакции приемника света. Ни один приемник света не успевает реагировать на каждое оптическое колебание в отдельности. В теории удобно считать, что время усреднения бесконечно.

Выразим интенсивность через вещественные поля  $E$  и  $H$ :

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle_t = \frac{c}{4\pi} \langle |[\vec{E}, \vec{H}]| \rangle_t = \frac{c}{4\pi} \langle EH \rangle_t = \frac{c}{4\pi} \left\langle E \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \right\rangle_t = \frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu} \langle E^2 \rangle_t$$

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu} \langle E^2 \rangle_t \text{ — интенсивность света выражается через электрическое}$$

поле, а не через магнитное, так как воздействие света на вещество в основном сводится к воздействию именно электрического поля.

$$\langle E^2 \rangle_t = \langle E_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) \rangle_t = \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} |\tilde{E}_0|^2 \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu} E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu} |\tilde{E}_0|^2.$$

Интенсивность света обычно рассматривается в вакууме, в этом случае выражение для интенсивности упрощается:  $I = \frac{c}{4\pi} \langle E^2 \rangle_t = \frac{c}{8\pi} E_0^2 = \frac{c}{8\pi} |\tilde{E}_0|^2$ .

$$\text{В системе СИ: } I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu} \langle E^2 \rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu} |\tilde{E}_0|^2 = \frac{n}{2c\mu_0\mu} E_0^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{n}{2\mu} E_0^2.$$

### Поляризация света.

#### Экзамен. Линейная поляризация.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси  $z$ , тогда  $\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$ .

Электромагнитные волны поперечны, следовательно,  $\vec{E} \perp \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$ . Тогда вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости  $x, y$  и может быть выражен следующим образом  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ .

Пусть  $E_y = 0$  во все моменты времени, тогда  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$ , то есть вектор  $\vec{E}$  все время направлен вдоль одной линии.

Такой свет называют линейно поляризованным. Эту же поляризацию называют плоской поляризацией. При этом плоскость поляризации — это плоскость векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{k}$ .

Для линейной поляризации удобно ввести единичный вектор поляризации

$$\vec{e}_p \parallel \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_p \perp \vec{k}.$$

С учетом единичного вектора поляризации  $\vec{e}_p$  получаем для линейной поляризации света

$$\vec{E} \approx E_0 \vec{e}_p e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0)}, \text{ где}$$

$E_0$  — вещественная амплитуда света. Чуть позже выяснится, что в таком же виде может быть выражен свет и любой другой поляризации.

### **Факультативно. Старое определение плоскости поляризации.**

Заметим, что исторически плоскостью поляризации называли не плоскость векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{k}$ , а перпендикулярную ей плоскость векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{k}$ .

Причина в том, что поляризованный свет впервые был получен при отражении света, падающего на границу сред под углом Брюстера. Плоскостью поляризации отраженного света первоначально называли плоскость падения света.

Сегодня плоскость поляризации связана с вектором  $\vec{E}$ , так как на среду действует именно вектор  $\vec{E}$ , а не вектор  $\vec{B}$ .