Экзамен. Стоячие световые волны.

При нормальном падении света на зеркало свет отражается обратно.

Две встречные волны одинаковой амплитуды образуют стоячую волну.

Рассмотрим встречные волны, направленные вдоль оси z. Пусть волны линейно поляризованы вдоль оси x. Запишем встречные волны в вещественном представлении:

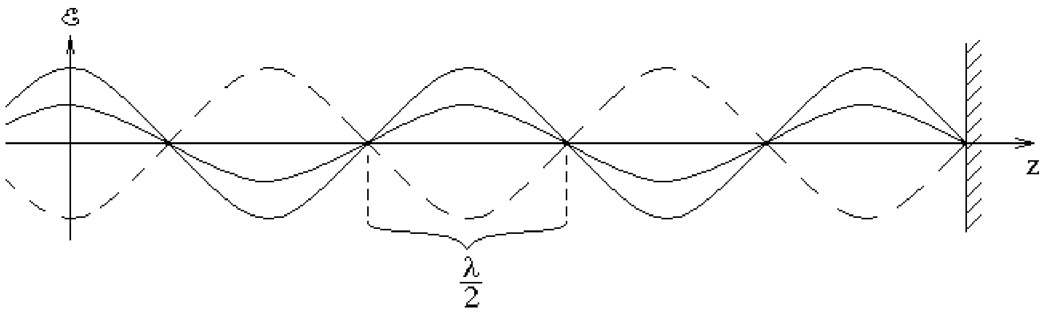
$$E_x(t,z) = E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t).$$

Второе слагаемое описывает встречную волну, так как в нем z заменено на (-z). Следовательно, если первая волна распространяется вдоль оси z, то вторая волна — вдоль оси (-z).

Преобразуем сумму косинусов в произведение согласно формуле $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ и получим

$$E_x(t,z) = E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t) = 2E_0 \cos(kz) \cdot \cos(\omega t)$$

Построив эту функцию от z в разные моменты времени t, мы увидим, что в некоторых точках $\cos(kz) = 0$, и суммарная волна остается равной нулю в любой момент времени. Эти точки называются узлами стоячей волны. Они расположены на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ друг от друга.



Посередине между узлами стоячей волны колебания суммарной волны максимальны. Эти точки называются пучностями стоячей волны.

Оказывается, что в узлах поля $\vec{E}$ находятся пучности поля $\vec{B}$ и наоборот. Дело в том, что если в некоторой точке электрические поля встречных волн синфазны и усиливают друг друга, то магнитные поля противофазны. И действительно. Векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Если один из тройки векторов $\vec{E}$ направления не меняет, а второй $\vec{k}$ — меняет на противоположное (для встречной волны), то третий вектор $\vec{B}$ тоже обязан изменить знак для правой тройки векторов. Значит, если в некоторой точке в некоторый момент времени векторы $\vec{E}$ встречных волн синфазны и образуют пучность поля $\vec{E}$, то в этой точке в этот же момент векторы $\vec{B}$ противофазны и образуют узел поля $\vec{B}$.

При отражении света от металлического зеркала на зеркале образуется узел поля $\vec{E}$, как на рисунке и пучность поля $\vec{B}$. Чтобы понять, почему так происходит, рассмотрим отражение от идеального металлического зеркала.

Сверхпроводник — это идеальное зеркало для радиоволн и электромагнитного излучения более низких частот.

Свет падает на зеркало нормально, а световые волны поперечны, поэтому на зеркале будут присутствовать только тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. Нормальные составляющие равны нулю.

Рассмотрим граничные условия для тангенциальных составляющих полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

$$\begin{cases} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}.$$

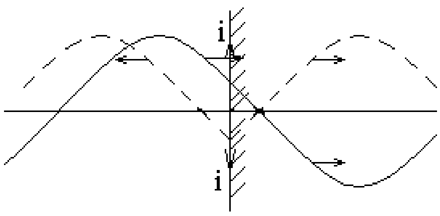
В сверхпроводнике нет ни электрического поля $\vec{E}$, ни магнитного поля $\vec{B}$. Тогда для полей над поверхностью сверхпроводника справедливы следующие граничные условия:

$$\begin{cases} E_{\tau} = 0 \\ B_{\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}.$$

Следовательно, на поверхности идеального зеркала поле $\vec{E}$ обращается в ноль, а поле $\vec{B}$ может быть отлично от нуля, и это приведет только к появлению поверхностных токов i. Это и означает, что на зеркале находится узел поля $\vec{E}$ и пучность поля $\vec{B}$.

Заметим, что поле $\vec{B}$ на зеркале осциллирует с оптической частотой и $B_{\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i$. Следовательно, по поверхности металлического зеркала течет переменный поверхностный ток i оптической частоты.

Пусть на зеркало слева направо падает световая волна (поля E). Она изображена сплошной линией.



По поверхности зеркала течет переменный ток i с оптической частотой. Этот ток излучает плоскую электромагнитную волну одинаково направо и налево в обе стороны от поверхности зеркала. Волна, излученная направо в глубину зеркала (изображена пунктиром), интерферирует с прошедшей сквозь зеркало падающей волной (сплошная линия) и полностью ее гасит. Следовательно, плоскость токов излучает направо волну со сдвигом фазы π по отношению к проходящей сквозь зеркало волне.

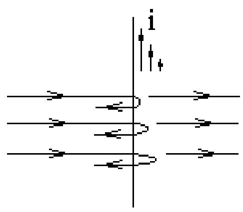
Волна, излученная токами зеркала налево, также сдвинута по фазе на π относительно падающей (проходящей) волны и представляет собой отраженную зеркалом волну. Гасящие друг друга волны, бегущие направо, обязаны быть равны по амплитуде, иначе они не могут полностью погасить друг друга. Излученные в обе стороны плоским током волны также равны по амплитуде, следовательно, падающая и отраженная волны равны по амплитуде.

Если сдвинуть на π фазу бегущей волны, то волна поменяет знак. Для поля $\vec{E}$ на зеркале две встречные волны вычитаются, образуя узел поля $\vec{E}$. Следовательно, можно сказать, что волна поля $\vec{E}$ отражается от зеркала со сдвигом фазы π или, как говорят, в противофазе.

Фаза волны имеет период 2π, а пространственный период бегущей волны — λ, тогда сдвиг фазы на π эквивалентен пространственному перемещению на $\frac{\lambda}{2}$. При отражении от зеркала происходит как бы изменение пути, пройденного волной, на $\frac{\lambda}{2}$, или, как говорят, при отражении от зеркала происходит потеря полуволны.

Потеря полуволны происходит только для волны электрического поля, но не для волны магнитного поля. Тем не менее, говорят, что при отражении света от зеркала происходит потеря полуволны. Дело в том, что с веществом в основном взаимодействует электрическое поле световой волны. Воздействием магнитного поля световой волны на среду можно пренебречь.

Если металлическое зеркало не идеально, то поверхностные токи имеют заметную толщину. Для оптического диапазона длин волн толщина слоя токов имеет порядок $\frac{\lambda}{10}$.



Излучение этих токов вглубь зеркала (направо) синфазно друг другу и полностью гасит прошедшую падающую волну. Излучения различных слоев тока в обратном направлении (налево) имеют несколько различные фазы, так как свет проходит до очередной плоскости с током и обратно различные расстояния. Волны, излученные назад, не совсем синфазны, не вполне усиливают друг друга. Поэтому отраженная от зеркала волна по амплитуде меньше падающей, и коэффициент отражения неидеального зеркала с толстым слоем токов меньше единицы. Свет частично поглощается таким зеркалом.

А что будет, если поверхностные токи текут в слое толщиной несколько длин волн или несколько десятков длин волн?

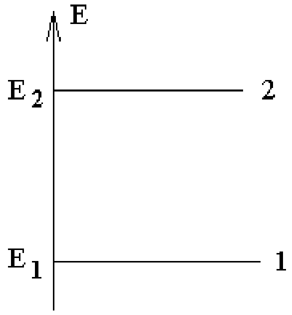
В этом случае волны, отраженные назад разными параллельными плоскостями токов, будут значительно сдвинуты по фазе, так как они проходят разные пути от входа в зеркало до плоскости с током и обратно до поверхности зеркала. При сложении волн в разных фазах суммарная отраженная волна имеет очень малую амплитуду. Следовательно, свет не отражается. Весь свет поглощается.

Интересно отметить, что если среда имеет очень большой коэффициент поглощения, то глубина проникновения света оказывается гораздо меньше длины волны. В таком случае весь свет отражается вместо того, чтобы поглощаться.

<u>**Факультативно. Коэффициенты Эйнштейна.**</u>

В этом вопросе описание будет проводиться в самом простом формализме, когда подразумевается, что атом может быть или на одном уровне энергии или на другом, но не может быть сразу на двух уровнях.

Рассмотрим двухуровневую схему уровней энергии атома. При этом справедливо предполагается, что наличие других уровней энергии ничего не изменяет.



Взаимодействие со светом этих двух уровней энергии описывается тремя процессами. Для каждого из этих процессов частота фотона связана с разностью энергий уровней соотношением

$E_2 - E_1 = h\nu = \hbar\omega$.

Первый процесс — спонтанное излучение. В этом процессе происходит ничем не спровоцированное излучение светового кванта с переходом атома с уровня 2 на уровень 1.

Второй процесс — поглощение света. В этом процессе происходит поглощение светового кванта с переходом атома с уровня 1 на уровень 2.

Третий процесс — вынужденное излучение. Это процесс вынужденного светом перехода атома с уровня 2 на уровень 1 с излучением светового кванта.

Обсудим, каковы вероятности этих трех процессов.

Для описания вероятностей Эйнштейн ввел в рассмотрение так называемые теперь коэффициенты Эйнштейна:

A_{21}, B_{12}, B_{21}.

$A_{21}\,dt$ — вероятность спонтанного перехода $2 \to 1$ для одного атома за время dt.

$B_{12}\, w_\omega\, dt$ — вероятность перехода $1 \to 2$ для одного атома за время dt под действием света, где $w_\omega \equiv \dfrac{dw}{d\omega}$ — спектральная плотность объемной плотности энергии электромагнитного (светового) поля на частоте рассматриваемого перехода $\omega = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$.

$B_{21}\, w_\omega\, dt$ — вероятность перехода $2 \to 1$ для одного атома за время dt под действием света.

Эйнштейн нашел отношения этих коэффициентов из термодинамических соображений, рассматривая тепловое равновесие между излучением и веществом. Эйнштейн при этом опирался на формулу Планка для спектральной плотности объемной плотности энергии излучения, находящегося в тепловом равновесии с абсолютно черным телом (спектр излучения абсолютно черного тела)

$$w_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}.$$

При очень высокой температуре спонтанным излучением можно пренебречь по сравнению с вынужденными световым полем переходами атома между уровнями энергии 1 и 2. Тогда вероятность перехода $1 \to 2$ за время dt равна вероятности перехода $2 \to 1$ за то же время dt:

$$B_{12}\, w_\omega\, dt = B_{21}\, w_\omega\, dt$$

откуда получаем

$$B_{12} = B_{21} \equiv B.$$

Получим теперь соотношение коэффициентов Эйнштейна A и B.

Для этого введем понятие заселенности уровня энергии. По определению $N_1 \equiv \rho_{11} N$ — заселенность или населенность уровня 1 с энергией E_1, здесь N — концентрация атомов или молекул, ρ_{11} — вероятность обнаружить атом на уровне E_1. N_1 — это квантовомеханический аналог концентрации атомов на уровне 1.

Вероятность ρ_{11} имеет два индекса, так как при квантовом описании атомов используется матрица плотности, диагональными элементами которой являются вероятности обнаружить атом на каждом из уровней энергии.

Аналогично $N_2 \equiv \rho_{22} N$ — заселенность уровня 2, ρ_{22} — вероятность обнаружить атом на уровне 2.

Согласно распределению Больцмана при термодинамическом равновесии

$$\rho_{ii} \sim e^{-\frac{E_i}{k_Б T}} \quad \text{и} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_Б T}}.$$

В нашем случае взаимодействия со световым полем $E_2 - E_1 = \hbar\omega$. Тогда

$N_2 = N_1 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}$.

При термодинамическом равновесии света и вещества в единице объема за время dt число переходов $1 \to 2$ равно числу переходов $2 \to 1$:

$N_1 B w_\omega dt = N_2 \left(B w_\omega dt + A dt \right)$

Подставим сюда $N_2 = N_1 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_Б T}}$, $w_\omega(T) = \dfrac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \dfrac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}$ и получим

$$\begin{cases} B_{21} = B_{12} \equiv B \\ \dfrac{A}{B} = \dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \end{cases}.$$

Интересно, что вероятность спонтанных переходов равна вероятности вынужденных переходов под действием света, в котором в каждом объеме когерентности содержится половина фотона. Позднее была разработана квантовая теория светового поля, в которой считается, что в пустом пространстве, из которого нельзя поглотить кванты света, тем не менее, в каждом объеме когерентности содержится энергия половины фотона.

Если вместо циклической частоты ω в определении коэффициентов Эйнштейна использовать обычную частоту ν, то коэффициенты B'_{21} и B'_{12} будут несколько отличаться от B_{21} и B_{12}. Дело в том, что w_ω в 2π раз меньше, чем w_ν. И действительно

$$w_\omega \equiv \frac{dw}{d\omega} = \frac{dw}{2\pi \cdot d\nu} = \frac{1}{2\pi} w_\nu .$$

Вероятность перехода $2 \to 1$ для одного атома за время dt под действием света может быть выражена и через B_{21} и через B'_{21}:

$B_{21} w_\omega dt = B'_{21} w_\nu dt$.

Тогда с учетом $w_\omega = \dfrac{1}{2\pi} w_\nu$ получаем $B'_{21} = \dfrac{1}{2\pi} B_{21}$ и окончательно:

$$\begin{cases} B'_{21} = B'_{12} \equiv B' \\ \dfrac{A}{B'} = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3} \end{cases}.$$

Экзамен. Инверсия заселенностей лазерной среды. Усиление света. Генерация света лазером.

Напомним, что по определению $N_1 \equiv \rho_{11} N$ — заселенность или населенность уровня 1 с энергией E_1, здесь N — концентрация атомов или молекул, ρ_{11} — вероятность обнаружить атом на уровне E_1.

Аналогично $N_2 \equiv \rho_{22} N$ — заселенность уровня 2, ρ_{22} — вероятность обнаружить атом на уровне 2.

Согласно распределению Больцмана

$\rho_{ii} \sim e^{-\frac{E_i}{k_Б T}}$, где $k_Б$ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Тогда в соответствии с распределением Больцмана

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_Б T}}.$$

В случае термодинамического равновесия при любой температуре T, если $E_2 > E_1$, то $N_2 < N_1$ — заселенность верхнего уровня энергии меньше заселенности нижнего уровня.

Вероятность перехода $1 \to 2$ для одного атома за время dt равна $B_{12}\, w_\omega\, dt$. Тогда количество переходов снизу вверх в единице объема за время dt равно $N_1 B_{12}\, w_\omega\, dt$. Вынужденные переходы снизу вверх и сверху вниз равновероятны $B_{12} = B_{21}$. Тогда количество переходов снизу вверх и сверху вниз пропорционально заселенностям уровней $N_1 \sim e^{-\frac{E_1}{k_Б T}}$ и $N_2 \sim e^{-\frac{E_2}{k_Б T}}$. Заселенность нижнего уровня больше, чем заселенность верхнего уровня $N_1 > N_2$. Следовательно, вынужденных переходов снизу вверх с поглощением света больше, чем сверху вниз с излучением. То есть два рассматриваемых процесса переходов снизу вверх и сверху вниз под действием света в сумме приводят к поглощению света в среде.

При термодинамическом равновесии среда поглощает свет на переходе между любой парой уровней энергии.

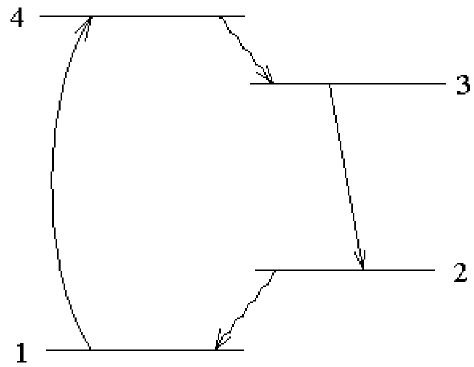
Лазерная усиливающая свет среда всегда находится в состоянии отличном от термодинамического равновесия.

Усиление света — это отрицательное поглощение. Поглощение будет отрицательным, если заселенность верхнего уровня больше заселенности нижнего уровня $N_2 > N_1$.

Это условие $N_2 > N_1$ противоположно равновесному соотношению заселенностей, поэтому условие $N_2 > N_1$ называется инверсией заселенностей.

При инверсии под действием света переходов $2 \to 1$ оказывается больше, чем переходов $1 \to 2$, и среда усиливает свет.

Рассмотрим пример создания инверсии заселенностей в четырехуровневой схеме уровней энергии в газовом разряде.



В плазме газового разряда свободные электроны ускоряются электрическим полем, ударяются о нейтральные атомы газа и, передавая часть энергии атому, переводят его из состояния с уровнем энергии 1 в состояние с уровнем энергии 4. Это так называемая накачка уровня 4 разрядом в газе.

Пусть в результате неупругих столкновений с другими атомами рассматриваемый атом быстро безизлучательно переходит с уровня энергии 4 на уровень 3. Такие переходы весьма вероятны, если кинетическая энергия атомов близка или больше разности энергий уровней 3 и 4. Другими словами столкновения молекул устанавливают термодинамическое равновесие (распределение Больцмана) между уровнями 3 и 4 (термализация уровней 3 и 4). При этом заселенность уровня 3 оказывается больше заселенности уровня 4.

Далее атом переходит с уровня 3 на уровень 2 с излучением фотона $h\nu = E_2 - E_1$.

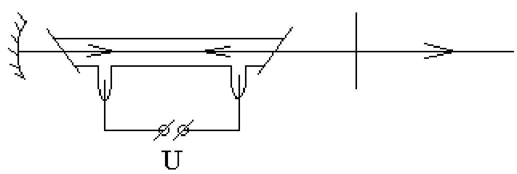
Пусть с уровня 2 атомы быстро переходят на уровень 1 в результате неупругих столкновений атомов. Аналогично переходам с уровня 4 на уровень 3.

Если переходы $4 \to 3$ происходят быстро, то атомы накапливаются на уровне 3. Если переходы $2 \to 1$ происходят быстро, то атомы уходят с уровня 2. В результате между уровнями энергии 2 и 3 возникает инверсия заселенностей $N_3 > N_2$. Инверсия означает усиление света на переходе $3 \to 2$.

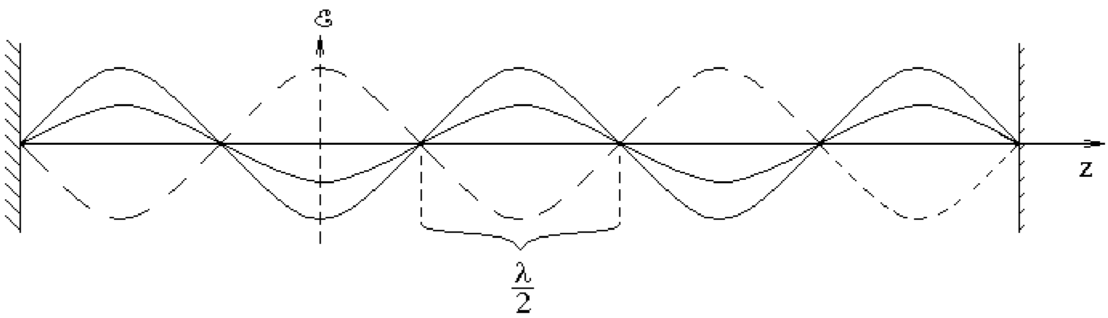
<u>Экзамен. Продольные и поперечные моды лазера. Управление частотой генерации лазера.</u>

Лазер — это устройство, излучающее свет с помощью усиливающей свет среды и зеркал, которые заставляют свет многократно проходить усиливающую среду. Зеркала лазера образуют так называемый лазерный резонатор.

Обычно одно зеркало лазера плоское и полупрозрачное, а другое — сферическое и глухое. Между зеркалами лазера находится усиливающая свет среда.



Мы для простоты рассмотрим резонатор лазера с двумя плоскими зеркалами.



В резонаторе работающего лазера присутствует стоячая волна. На зеркалах лазера находятся узлы стоячей волны. Следовательно, на длине резонатора L укладывается целое число полуволн $L = m\frac{\lambda}{2}$, где $m = 1, 2, 3, ...$ — целое число. Лазер может излучать только такой свет, длина волны λ которого удовлетворяет равенству $L = m\frac{\lambda}{2}$.

Число пучностей m стоячей волны внутри резонатора называют индексом продольной моды резонатора.

Обычно для лазера $L >> \lambda$, тогда $m >> 1$ — индекс продольной моды лазера очень велик.

Дискретным значениям длины волны света $L = m\frac{\lambda}{2}$ соответствуют дискретные значения частоты, найдем их.

Для волны любой природы произведение длины волны на ее частоту равно фазовой скорости волны $\lambda\nu = \frac{c}{n}$. Тогда частота света $\nu = \frac{c}{n\lambda}$.

Подставим сюда длину волны λ из выражения $L = m\frac{\lambda}{2}$ => $\lambda = \frac{2L}{m}$ и получим

$\nu = \frac{c}{n\lambda} = \frac{mc}{2nL}$, где m — целое число.

Целое число изменяется с шагом $\Delta m = 1$. Тогда $\Delta\nu = \frac{c}{2nL}$ — шаг изменения частоты или частотный интервал между соседними продольными модами лазера (межмодовый интервал).

Мы получили, что в резонаторе лазера разрешены частоты с постоянным шагом $\Delta\nu = \frac{c}{2nL}$ — расческа разрешенных частот.

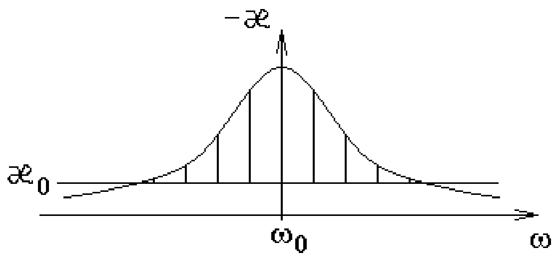
Усиливающая лазерная среда — это среда с отрицательным коэффициентом поглощения. Коэффициент поглощения среды определяется равенством:

$I(z) = I_0 e^{-\aleph z}$, где $\aleph$ — коэффициент поглощения, $I(z)$ — зависимость интенсивности света от координаты z вдоль луча.

Для лазерной среды коэффициент поглощения отрицателен $\aleph < 0$. Величину $(-\aleph)$ называют коэффициентом усиления среды.

Лазер генерирует излучение на частотах, разрешенных резонатором, для которых усиление среды $(-\aleph)$ больше, чем потери лазера $\aleph_0$, приведенные к единице длины резонатора. Поясним величину $\aleph_0$. Если свет без усиления проходит резонатор лазера туда и обратно и попадает в исходную точку в исходном направлении, то интенсивность света уменьшается хотя бы за счет не идеальности зеркал. Приравняем это отношение (меньшей интенсивности к большей интенсивности) к величине $e^{-\aleph_0 2L}$ как будто свет прошел путь $2L$ в среде с коэффициентом поглощения $\aleph_0$, здесь L — длина резонатора лазера. Это и будет определением $\aleph_0$ — потерь резонатора приведенных к единице его длины.

Спектр излучения лазера выглядит следующим образом,



если ширина спектральной линии усиления определяется эффектом Доплера. Здесь длины вертикальных отрезков пропорциональны величине мощности излучения лазера на соответствующих частотах.

Рассмотрим теперь возможность управления частотой генерации лазера.

$\nu = \dfrac{c}{n\lambda} = \dfrac{mc}{2nL}$ — частота генерации лазера зависит от длины резонатора L. Если, например, увеличивать длину резонатора L, то разрешенные резонатором длины волн будут пропорционально увеличиваться $L = m\dfrac{\lambda}{2}$. Частоты всех разрешенных мод будут уменьшаться, так как длина L стоит в знаменателе выражения для частоты ν. При этом разрешенные частоты на рисунке будут двигаться влево. В какой-то момент в частотное положение некоторой исходной моды придет соседняя справа мода. В этот момент длина резонатора лазера увеличится на половину этой длины волны. Между зеркалами снова будет целое число полуволн, только индекс продольной моды для рассматриваемой частоты увеличится на единицу.

При этом в процессе изменения длины резонатора расческа разрешенных частот сдвигается на один межмодовый интервал.

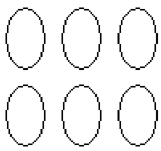
Таким образом, изменяя длину резонатора, мы можем изменять частоту генерации лазера. Причем изменять длину резонатора имеет смысл не больше, чем на половину длины световой волны, то есть на долю микрона. Для изменения длины резонатора одно из его зеркал укрепляют на пьезокерамике, которая, например, может быть в форме тонкостенного цилиндра. На внешнюю и внутреннюю поверхности цилиндра наносят фольгу. Подавая электрическое напряжение на цилиндр, можно в небольших пределах изменять его длину на величину порядка одного микрона.

Строго говоря, при изменении длины резонатора изменяется масштаб расчески разрешенных частот. Но обычно частотная ширина контура усиления лазерной среды гораздо меньше средней частоты генерации. В таком случае, при изменении длины резонатора, разрешенные частоты в пределах контура усиления сдвигаются почти без изменения межмодового интервала $\Delta\nu = \dfrac{c}{2nL}$, так как величина L пренебрежимо изменяется в процентном исчислении. То есть расческа разрешенных частот двигается относительно контура усиления лазерной среды почти без изменения шага расчески.

Обсудим теперь поперечные моды лазера.

Если лазерный луч направить на экран, то форма лазерного пятна в простейших случаях может иметь вид нескольких светлых пятен в узлах прямоугольной матрицы. Различное расположение этих пятен описывают поперечными индексами, поперечными модами.

Индекс поперечной моды равен числу нулей интенсивности, как функции соответствующей координаты.



Так если форма лазерного пятна представляет собой две строки по три светлых пятна, то индексы соответствующей поперечной моды 2,1 — две темные полосы при перемещении по x координате и одна темная полоса при перемещении по y координате.