Экзамен. Направление векторов $\vec{D},\vec{E},\vec{B},\vec{H},\vec{k},\vec{S}$ для плоской монохроматической световой волны в кристалле (продолжение).

Мы знаем, что волновые уравнения имеют решения в виде плоских монохроматических волн. В комплексном представлении эти волны имеют вид: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ и $\tilde{\vec{B}} = \tilde{B}_0 \vec{e}\,'_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Казалось бы, для разных проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на разные главные диэлектрические оси значения вектора $\vec{k}$ могут различаться. Однако есть решения, в которых значения вектора $\vec{k}$ одинаковые. Этих решений окажется достаточно много, чтобы можно было считать, что любое световое поле может быть представлено с достаточной точностью в виде суммы таких решений.

Вещественные поля представляют собой вещественную часть этих комплексных выражений. Подставим эти вещественные поля в уравнения Максвелла и посмотрим, при каких условиях поля могут быть решениями уравнений. Далее будем рассматривать вещественные плоские волны. Это рассмотрение полностью повторяет собой доказательство поперечности световых волн в прозрачной изотропной среде, только теперь придется различать направления векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

И электрическое и магнитное поле зависят от координат и времени только через величину $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту величину буквой $\varphi = \left(\vec{k},\vec{r}\right) - \omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы, которая может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$, $\vec{D}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$, как производную от сложной функции:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Что в операторном виде можно записать, как:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial t} = -\omega\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Аналогично рассмотрим производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = k_x \frac{d \cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z \frac{d}{d\varphi} = \vec{k} \frac{d}{d\varphi}.$$

Подставим эти соотношения в 4-е уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \left(\vec{\nabla}, \vec{D}\right) = 0 \\ \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \left(\vec{\nabla}, \vec{B}\right) = 0 \\ \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right] = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$
, где для прозрачной среды учтено $\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases}$.

В анизотропной среде диэлектрическая проницаемость ε — это тензор второго ранга, поэтому в отличие от изотропной среды теперь нужно различать направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

$$\begin{cases} \left(\vec{k}\frac{d}{d\varphi}, \vec{D}\right) = 0 \\ \left[\vec{k}\frac{d}{d\varphi}, \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\frac{d}{d\varphi}\vec{B} \\ \left(\vec{k}\frac{d}{d\varphi}, \vec{B}\right) = 0 \\ \left[\vec{k}\frac{d}{d\varphi}, \vec{H}\right] = -\frac{\omega}{c}\frac{d}{d\varphi}\vec{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k}, \vec{D}\right) = 0 \\ \frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega}{c}\vec{B}\right) \\ \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k}, \vec{B}\right) = 0 \\ \frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k}, \vec{H}\right] = -\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega}{c}\vec{D}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\vec{k}, \vec{D}\right) = const \\ \left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{B} + const \\ \left(\vec{k}, \vec{B}\right) = const \\ \left[\vec{k}, \vec{H}\right] = -\frac{\omega}{c}\vec{D} + const \end{cases},$$

где $const$ — константы, независящие от φ. То есть константа не зависит ни от времени, ни от координат, так как вся зависимость электрического и магнитного полей от времени и координат есть только через зависимость от $\varphi = \left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t$.

Нас интересуют электромагнитные поля на оптических частотах, а не постоянные поля, поэтому константы в правых частях равенств равны нулю. И действительно. Перенесем все слагаемые кроме константы в левую часть каждого равенства. Через половину периода световой волны левая часть равенства поменяет знак, а правая часть останется той же константой. Это возможно только в том случае, если константа равна нулю.

Тогда

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B} \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\frac{\omega}{c}\vec{D} \end{cases}.$$

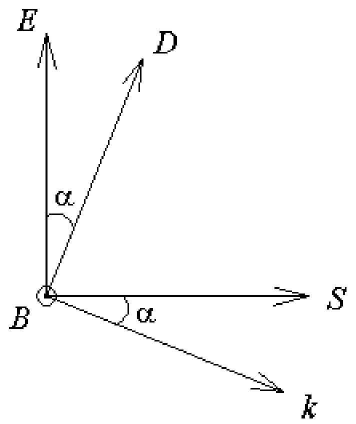
Добавим сюда уравнение $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ и заменим везде вектор $\vec{H}$ на вектор $\vec{B}$, так как $\vec{B}=\mu\vec{H}$, а в оптике $\mu=1$. В результате получим пять соотношений:

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B} \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{B}\right]=-\frac{\omega}{c}\vec{D} \\ \vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right] \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \vec{k}\perp\vec{D} \\ \vec{B}\perp\vec{E} \\ \vec{B}\perp\vec{k} \\ \vec{B}\perp\vec{D} \\ \vec{S}\perp\vec{E} \\ \vec{S}\perp\vec{B} \end{cases}.$$

Заметим, что из ортогональности векторов с вещественными координатами следует ортогональность тех же векторов с комплексными координатами.

Из полученных соотношений ортогональности видно, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен 4-м остальным векторам $\vec{k},\vec{D},\vec{E},\vec{S}$. Следовательно, эти 4-е вектора лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$.

Рассмотрим рисунок, на котором вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка, тогда остальные 4-е вектора окажутся в плоскости рисунка:



Из $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{S} \\ \vec{D} \perp \vec{k} \end{cases}$ следует, что углы между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ и углы между векторами $\vec{S}$ и $\vec{k}$ равны, как углы со взаимно ортогональными сторонами. Обозначим соответствующий угол за α:

$$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{D},\vec{E}}\right) = \left(\widehat{\vec{S},\vec{k}}\right) \qquad (7.1)$$

$$\begin{cases} \vec{k} \perp \vec{D} \\ \vec{k} \perp \vec{B} \\ \vec{B} \perp \vec{D} \end{cases} \quad => \quad \text{векторы } \vec{k}, \vec{D}, \vec{B} \text{ взаимно ортогональны,}$$

$$\begin{cases} \vec{S} \perp \vec{E} \\ \vec{S} \perp \vec{B} \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases} \quad => \quad \text{векторы } \vec{S}, \vec{E}, \vec{B} \text{ взаимно ортогональны.}$$

Напомним, почему в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ различаются по направлению.

В кристалле $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. $\hat{\varepsilon}$ — симметричный тензор второго ранга. В тензорной алгебре есть теорема о том, что симметричный тензор второго ранга поворотом системы координат можно привести к диагональному виду:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \vec{E}.$$

Если тензор диэлектрической проницаемости диагонален, то оси координат x, y, z — совпадают с главными диэлектрическими осями кристалла по определению главных диэлектрических осей.

Умножение вектора $\vec{E}$ слева на диагональный тензор $\hat{\varepsilon}$ означает разное растяжение по осям x, y, z, растяжение в $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ раз соответственно. Растяжение по осям различно, поэтому вектор произведения $\vec{D}$ и отличается по направлению от вектора $\vec{E}$ на некоторый угол $\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right)$, что можно рассматривать, как некоторый поворот (и растяжение) от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D}$ при умножении на матрицу $\hat{\varepsilon}$.

Факультативная вставка.

Раньше мы выяснили, что в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ должны быть ортогональны вектору $\vec{B}$ в плоской световой волне в анизотропной среде. А что будет, если рассматриваемый поворот от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$ выведет вектор $\vec{D}$ из плоскости перпендикулярной вектору $\vec{B}$?

Если условие ортогональности $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} \perp \vec{B}$ не выполнено, то такое направление вектора $\vec{E}$ невозможно в бегущей в кристалле плоской световой волне. Оказывается (без доказательства), что в этом случае, падающая на кристалл плоская световая волна распадается на две бегущие волны с разными разрешенными в кристалле направлениями поляризации (направлениями вектора $\vec{E}$). Для каждой из этих двух волн будут одновременны выполнены условия $\vec{E} \perp \vec{B}$ и $\hat{\varepsilon}\vec{E} \perp \vec{B}$.

Эти две волны распространяются в кристалле независимо друг от друга и несколько в различающихся направлениях. Это явление расщепления падающей на кристалл плоской волны на две волны называется двулучепреломлением, и связано с тем, что показатели преломления кристалла для этих поляризаций различаются по величине.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Лучевая и фазовая скорости световой волны в кристалле.

И лучевая и фазовая скорости световой волны в кристалле являются аналогами одной и той же фазовой скорости в некристаллической изотропной среде. Групповую скорость волн в кристалле мы рассматривать не будем.

Лучевая скорость $\vec{V}_л$ в кристалле по определению показывает направление движения энергии световой волны, то есть, совпадает по направлению с вектором Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$:

$$\vec{V}_л \uparrow\uparrow \vec{S}.$$

В некристаллической изотропной среде вектор Пойнтинга связан с фазовой скоростью $\frac{c}{n}$ и объемной плотностью энергии поля w соотношением:

$$S = w\frac{c}{n}.$$

В этом соотношении можно убедиться, если подставить в него величины:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot \left[\vec{E}, \vec{H} \right], \qquad w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi},$$

учесть соотношение $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ для бегущей световой волны и учесть, что $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

И действительно, с одной стороны $S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2$, а с другой стороны

$$w\frac{c}{n} = \left(\frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi} \right) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = 2\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2.$$

Аналогично, через вектор Пойнтинга $\vec{S}$ и объемную плотность энергии электромагнитного поля w вводится понятие лучевой скорости $\vec{V}_л$:

$\vec{S} = w\vec{V}_л$.

Рассмотрим теперь фазовую скорость света в кристалле.

Фазовая скорость — скорость движения поверхности постоянной фазы.

$\left(\left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0 \right)$ — фаза любой плоской волны независимо от ее природы.

Направим ось z вдоль волнового вектора $\vec{k}$ => $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$ =>

$\left(\vec{k}, \vec{r}\right) = k_x x + k_y y + k_z z = k_z z = kz$ =>

$kz - \omega t + \varphi_0$ — фаза волны с волновым вектором $\vec{k}$, направленным вдоль оси z.

Тогда $kz - \omega t + \varphi_0 = const$ — уравнение поверхности постоянной фазы, фазовой поверхности или фронта волны.

Возьмем производную по времени от уравнения постоянной фазы, считая, что z координата фронта волны — функция времени.

Тогда

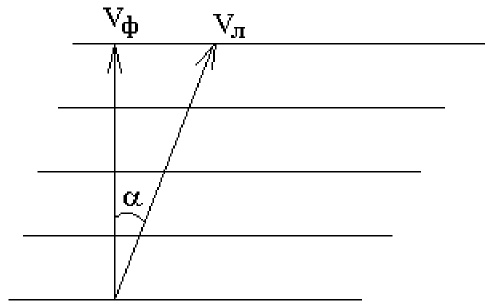
$k\frac{dz}{dt} - \omega = 0$ => $V_ф = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$ =>

$V_ф = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость света в кристалле.

Из формулы $V_ф = \frac{dz}{dt}$ следует, что фазовая скорость направлена вдоль оси z, направление которой было выбрано вдоль волнового вектора $\vec{k}$. То есть $\vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{k}$.

Максимумы световой волны содержат максимум энергии и поэтому перемещаются вместе с энергией светового поля с лучевой скоростью $\vec{V}_л$. Как же при этом возможно, что поверхности постоянной фазы перемещаются с другой, фазовой скоростью $V_ф$, и в другом направлении?

Рассмотрим рисунок, показывающий перемещение максимумов световой волны вместе с энергией со скоростью $\vec{V}_л$:



Пусть горизонтальные линии на рисунке — это максимумы напряженности электрического поля и одновременно максимумы энергии светового поля, которые перемещаются в направлении вектора лучевой скорости $\vec{V}_л$. Конечная длина горизонтальных линий отображает конечную ширину пучка лучей. Из рисунка видно, что пучок лучей по мере своего распространения смещается вверх и вправо. Если же считать, что поверхности равных фаз бесконечны по горизонтали и есть даже там, где нет энергии светового поля, то перемещение поверхности равных фаз вдоль самой поверхности равных фаз ничего для нее не меняет. По этой причине скорость перемещения поверхности равных фаз может быть направлена только перпендикулярно самой поверхности. Эта фазовая скорость равна составляющей лучевой скорости в направлении нормали к поверхности равных фаз. Величина фазовой скорости, соответственно, равна проекции лучевой скорости на нормаль к поверхности равных фаз:

$$V_ф = V_л \cos(\alpha).$$

Здесь угол α — угол между векторами $\vec{V}_ф$ и $\vec{V}_л$, а с учетом соотношений $\begin{cases} \vec{V}_л \uparrow\uparrow \vec{S} \\ \vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{k} \end{cases}$, α — угол между векторами $\vec{S}$ и $\vec{k}$, который в свою очередь согласно формуле (7.1) равен углу между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

Факультативная вставка.

Заметим, что рассчитать величину угла α можно на основе все той же формулы (7.1):

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right) \quad => \quad \left(\vec{D},\vec{E}\right) = D \cdot E \cdot \cos(\alpha) \quad => \quad \cos(\alpha) = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{D \cdot E},$$

где величину и направление вектора $\vec{D}$ можно найти из равенства $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$, а направление вектора $\vec{E}$ зависит от поляризации световой волны.

Напомним еще раз, что в некристаллической изотропной среде лучевая и фазовая скорости совпадают и называются фазовой скоростью света.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Лучевая и фазовая скорости в простейшем частном случае.

Скорость света в кристалле зависит не от направления света, а от направления поляризации или вектора $\vec{E}$ световой волны. Причина этого в следующем.

В одних направлениях вектор $\vec{E}$ поляризует кристалл сильнее, в других — слабее. Когда кристалл сильно поляризуется на оптической частоте, диполи атомов сильнее излучают, их излучение, интерферируя с проходящей мимо световой волной, не изменяет ее амплитуду, так как мы рассматриваем только прозрачные кристаллы. Сильное излучение диполей сильнее поворачивает фазу волны и сильнее замедляет волну.

В результате скорость света в кристалле зависит именно от направления вектора $\vec{E}$.

Рассмотрим свет, линейно поляризованный вдоль одной из главных диэлектрических осей x, y, z. В главных осях тензор диэлектрической проницаемости имеет следующий вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Пусть, например, вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси z:

$\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$, тогда

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_z \vec{E} \quad => \quad \alpha = \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right) = 0.$$

$$\left(\widehat{\vec{k},\vec{S}}\right) = \left(\widehat{\vec{D},\vec{E}}\right) = 0 \quad => \quad \left(\widehat{\vec{V}_ф,\vec{V}_л}\right) = \left(\widehat{\vec{k},\vec{S}}\right) = 0 \quad => \quad \vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{V}_л.$$

Тогда $\begin{cases} V_ф = V_л \cos(\alpha) \\ \alpha = 0 \end{cases}$, следовательно, $V_ф = V_л$, и с учетом $\vec{V}_ф \uparrow\uparrow \vec{V}_л$ получаем: $\vec{V}_ф = \vec{V}_л$ — фазовая и лучевая скорости в кристалле совпадают, если линейная поляризация (вектор $\vec{E}$) направлена вдоль одной из главных диэлектрических осей кристалла.

Для изотропной среды $V_ф = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Аналогично в рассматриваемом случае поляризации света вдоль главной диэлектрической оси z можно ввести определение величины n_z:

$$V_л = V_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}} \equiv \frac{c}{n_z} \qquad => \qquad n_z \equiv \sqrt{\varepsilon_z}.$$

Аналогично для других главных диэлектрических осей: $n_x \equiv \sqrt{\varepsilon_x}$ и $n_y \equiv \sqrt{\varepsilon_y}$.

Еще раз напомним, что показатели преломления n_x, n_y, n_z соответствуют свету, поляризованному вдоль осей x, y, z, а не свету направленному вдоль этих осей.

Экзамен. Фазовая пластинка.

Фазовая (волновая) пластинка (wave plate) — плоскопараллельная кристаллическая пластина, у которой две главные диэлектрические оси с разными диэлектрическими проницаемостями лежат в плоскости пластины.

Выберем направление оси z перпендикулярно фазовой пластинке, и направим оси x и y вдоль главных диэлектрических осей пластинки.

Пусть на фазовую пластинку нормально падает линейно поляризованный свет.

Электромагнитные волны поперечны, поэтому электрическое поле $\vec{E}$ падающей волны можно разложить по главным диэлектрическим осям x и y.

Каждая из двух составляющих будет иметь свою лучевую и одновременно фазовую скорость:

$\frac{c}{n_x} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}$ — скорость световой волны E_x, поляризованной вдоль оси x,

если как обычно пренебречь для световой волны отличием магнитной проницаемости от единицы $\begin{cases} n = \sqrt{\varepsilon\mu} \\ \mu = 1 \end{cases} \quad => \quad n \approx \sqrt{\varepsilon}$.

$\frac{c}{n_y} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$ — скорость световой волны E_y, поляризованной вдоль оси y.

Разная фазовая скорость приводит к появлению разности фаз на выходе из пластины для двух линейных поляризаций E_x и E_y.

Пластину называют фазовой, так как она вносит дополнительную разность фаз для двух линейных поляризаций.

Экзамен. Пластинки $\frac{\lambda}{4}$ и $\frac{\lambda}{2}$.

Пластинки $\frac{\lambda}{4}$ и $\frac{\lambda}{2}$ — фазовые пластинки.

Если оптическая разность хода двух линейных поляризаций равна $\frac{\lambda}{4}$, то это пластинка $\frac{\lambda}{4}$, если — $\frac{\lambda}{2}$, то пластинка — $\frac{\lambda}{2}$. Добавление к разности хода величины кратной λ не изменяет разности фаз волн, так как λ — пространственный период волн. Поэтому фазовую пластинку с разностью хода двух линейных поляризаций $\frac{\lambda}{4}+m\lambda$, где m — любое целое число, тоже называют пластинкой $\frac{\lambda}{4}$, а с разностью хода $\frac{\lambda}{2}+m\lambda$ — пластинкой $\frac{\lambda}{2}$.

Если для одной линейной поляризации оптическая толщина фазовой пластинки на $\frac{\lambda}{4}$ больше, то для ортогональной поляризации — на $\frac{\lambda}{4}$ меньше. Поворот фазовой пластинки вокруг луча на угол $\frac{\pi}{2}$ меняет местами поляризации падающей световой волны относительно пластинки, и пластинка $\frac{\lambda}{4}$ превращается в пластинку $\left(-\frac{\lambda}{4}\right)$, с учетом периода λ — в пластинку $\frac{3\lambda}{4}$. То есть пластинка $\frac{3\lambda}{4}$ — это та же пластинка $\frac{\lambda}{4}$, только повернутая на $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, для пластинки $\frac{\lambda}{4}$ добавление к оптической разности хода величины $\frac{\lambda}{2}$ оставляет фазовую пластинку пластинкой $\frac{\lambda}{4}$.

Для фазовой пластинки с геометрической толщиной h оптическая толщина равна nh. Тогда разность оптических толщин для двух поляризаций:

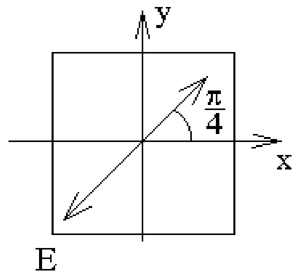
$n_1h-n_2h=\frac{\lambda}{4}+m\frac{\lambda}{2}$ для пластинки $\frac{\lambda}{4}$, где m — любое целое число;

$n_1h-n_2h=\frac{\lambda}{2}+m\lambda$ для пластинки $\frac{\lambda}{2}$, где m — любое целое число.

λ — пространственный период волны, 2π — период изменения фазы волны.

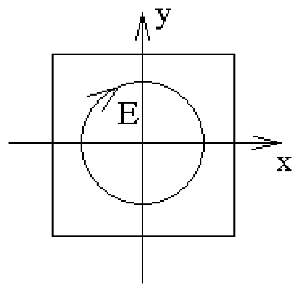
В таком случае разность хода $\frac{\lambda}{4}$ соответствует разности фаз $\frac{\pi}{2}$. Сложение ортогональных колебаний с разностью фаз $\frac{\pi}{2}$ и одинаковыми амплитудами дает вращение. Следовательно, если на пластинку $\frac{\lambda}{4}$ падает линейно поляризованный свет, который можно разложить на две линейные поляризации с одинаковыми амплитудами вдоль главных диэлектрических осей пластины, то на выходе из пластины будет свет с круговой поляризацией.

Если на входе пластинки $\frac{\lambda}{4}$



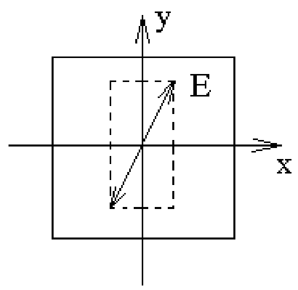
,

то на выходе



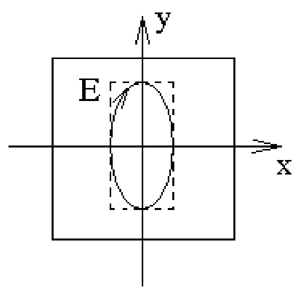
.

Если на входе пластинки $\frac{\lambda}{4}$



,

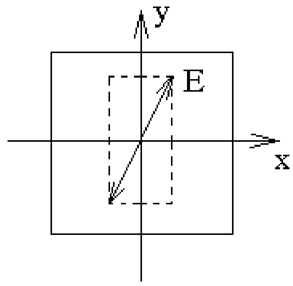
то на выходе



.

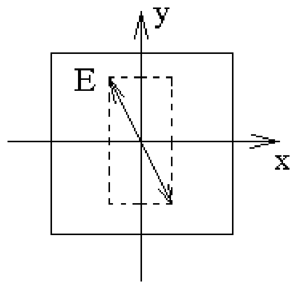
Если на пластинку $\dfrac{\lambda}{4}$ падает свет, линейно поляризованный вдоль оси y, то на выходе из пластинки он останется линейно поляризованным вдоль y. Аналогично для света, поляризованного вдоль оси x.

Для пластинки $\dfrac{\lambda}{2}$, если на входе пластинки



,

то на выходе



.

Повернем пластинку $\dfrac{\lambda}{2}$ так, чтобы поляризация падающей волны была направлена вдоль оси y. Затем повернем пластинку вместе с осью y на некоторый угол вокруг луча. Как видно из двух последних рисунков, поляризация света на выходе поворачивается на удвоенный угол.

Пластинка $\dfrac{\lambda}{2}$ обычно используется для поворота плоскости поляризации света.

Фазовые пластинки нулевого порядка $m=0$ в выражениях $n_1h-n_2h=\dfrac{\lambda}{4}+m\dfrac{\lambda}{2}$ для пластинки $\dfrac{\lambda}{4}$ и $n_1h-n_2h=\dfrac{\lambda}{2}+m\lambda$ для пластинки $\dfrac{\lambda}{2}$.

Экзамен. Лучевой эллипсоид (эллипсоид Френеля). Определение поляризации и лучевой скорости лучей по лучевому эллипсоиду (без доказательства).

Направим оси координат вдоль главных диэлектрических осей кристалла.

Рассмотрим эллипсоид, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{\varepsilon_x}{c^2}x^2+\frac{\varepsilon_y}{c^2}y^2+\frac{\varepsilon_z}{c^2}z^2=1.$$

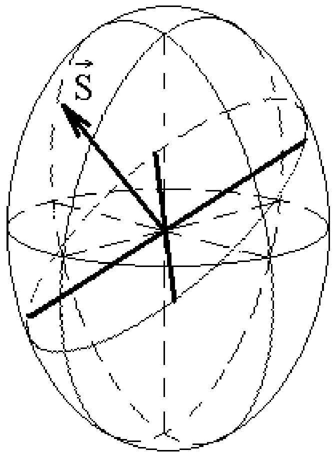
Это и есть лучевой эллипсоид. Эллипсоидом Френеля называют подобный ему эллипсоид $\varepsilon_x x^2+\varepsilon_y y^2+\varepsilon_z z^2=1$.

Считаем, что $\mu = 1$. Тогда длины полуосей лучевого эллипсоида $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}$ равны лучевым (и фазовым) скоростям V_x, V_y, V_z, когда вектор $\vec{E}$ направлен соответственно вдоль осей x, y, z. Через скорости V_x, V_y, V_z уравнение лучевого эллипсоида можно переписать в виде:

$$\frac{x^2}{V_x{}^2} + \frac{y^2}{V_y{}^2} + \frac{z^2}{V_z{}^2} = 1.$$

Лучевой эллипсоид позволяет определить направление поляризации света и величину лучевой скорости двух возможных волн для любого заданного направления луча $\vec{S}$.

Приведем без доказательства алгоритм определения лучевых скоростей и поляризаций:



1. Выберем произвольное направление луча $\vec{S}$.

2. Световые волны ортогональны $\vec{E} \perp \vec{S}$. Для такого направления вектора $\vec{E}$ рассмотрим центральное сечение лучевого эллипсоида плоскостью перпендикулярной направлению луча $\perp \vec{S}$.

3. Сечение эллипсоида — эллипс.

4. Оси эллипса — это направления двух единственно возможных линейных поляризаций вектора $\vec{E}$ для заданного направления вектора $\vec{S}$ (без доказательства).

5. Длины полуосей эллипса равны величинам лучевых (но не фазовых) скоростей двух лучей (без доказательства).

К сожалению это не все, что нужно знать о световых волнах в кристалле. Проблема в том, что свет, падающий на кристалл, распадается на два луча, идущие в разных направлениях $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Эти направления нам еще предстоит научиться находить.

Экзамен. Оптическая ось кристалла. Одноосные и двуосные кристаллы.

Оптическая ось кристалла — это направление луча, для которого любая линейная поляризация света имеет одну и ту же лучевую скорость.

Для того чтобы направление вектора $\vec{S}$ было бы оптической осью кристалла необходимо и достаточно, чтобы центральное сечение лучевого эллипсоида, перпендикулярное вектору $\vec{S}$, было бы окружностью. Такой вывод следует из приведенного выше алгоритма определения направления и величин лучевых скоростей по лучевому эллипсоиду. И действительно, если рассматривать окружность как эллипс, то оси эллипса этого можно направить как угодно, и длины полуосей будут равны.

Рассмотрим кристалл, для которого равны две из трех диэлектрических проницаемостей в главных диэлектрических осях $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$. Для такого кристалла лучевой эллипсоид — это эллипсоид вращения вокруг оси z.

Пусть луч света $\vec{S}$ идет вдоль оси z. Рассмотрим центральное сечение лучевого эллипсоида перпендикулярное $\perp$ оси z. Такое сечение эллипсоида — окружность.

Следовательно, лучевые скорости двух поляризаций равны, а сами поляризации могут быть направлены как угодно $\perp$ оси z.

Равенство лучевых скоростей означает, что ось z — оптическая ось кристалла, для которого $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$.

Такой кристалл называется одноосным, так как для любого другого центрального сечения длины полуосей не будут равны.

Рассмотрим кристалл, для которого $\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z$ и соответственно $V_x < V_y < V_z$, так как $V = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Лучевой эллипсоид при этом вытянут в вертикальном направлении z.

Это двуосный кристалл, так как в плоскости x,z существуют два направления, для каждого из которых сечения лучевого эллипсоида — окружность.

<u>Факультативная вставка.</u>

Это будет понятно, если рассмотреть сечение лучевого эллипсоида, в плоскости которого лежит ось y, и мысленно поворачивать плоскость сечения лучевого эллипсоида вокруг этой оси y, для которой главное значение диэлектрической проницаемости имеет среднее из трех значений.

В горизонтальном положении сечения ось y эллипса сечения длиннее второй оси x, так как $V_y > V_x$. В вертикальном положении сечения эллипса, ось y короче, чем вторая ось z, так как $V_y < V_z$. Тогда из соображений непрерывности существует такая промежуточная ориентация плоскости сечения при ее повороте вокруг оси y, не горизонтальная и не вертикальная, при которой обе оси эллипса сечения равны по длине.

Направление перпендикулярное этому сечению — оптическая ось. Если эту ось отразить относительно плоскости y,z или относительно плоскости x,y, то новое направление — это вторая оптическая ось. Обе оси лежат в плоскости x,z, если для диэлектрических осей кристалла выполняется неравенство $\varepsilon_x > \varepsilon_y > \varepsilon_z$.

Конец факультативной вставки.