Экзамен. Разложение светового поля по частотам.

Рассмотрим вещественную напряженность светового поля $\vec{E}(t)$ в одной пространственной точке.

Преобразование Фурье позволяет представлять световое поле $\vec{E}(t)$ в одной точке пространства, как суперпозицию гармонических колебаний разных частот.

Рассмотрим прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt \end{cases}$$

, здесь коэффициент $\dfrac{1}{2\pi}$ может быть разделен на два сомножителя в интегралах произвольным образом.

Вещественность зависимости $\vec{E}(t)$ накладывает некоторые ограничения на вид ее Фурье образа $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$. Рассмотрим $\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$:

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt\right)^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{E}(t)\right)^*\left(e^{i\omega t}\right)^*(dt)^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)e^{-i\omega t}dt = \tilde{\vec{E}}_0(-\omega)$$

Откуда:

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega) = \tilde{\vec{E}}_0(-\omega).$$

То есть, Фурье образ поля $\vec{E}(t)$ на отрицательных частотах может быть выражен, как комплексно сопряженная величина к Фурье образу на положительных частотах. Тогда Фурье интеграл по всем частотам можно выразить через Фурье интеграл только по положительным частотам

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

для этого в первом интеграле заменим ω на $(-\omega)$ и воспользуемся равенством $\tilde{\vec{E}}_0(-\omega) = \tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$, тогда получим

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

Заметим, что первое слагаемое является комплексно сопряженным ко второму, тогда

$$\vec{E}(t)=\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)^*+\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega=\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right),$$

так как при сложении комплексно сопряженных величин вещественная часть удваивается, а мнимая сокращается. Тогда

$\vec{E}(t)=\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)$ — разложение светового поля по положительным частотам.

В результате получаем разложение вещественного светового поля, как по всем частотам, так и по положительным частотам

$$\begin{cases}\vec{E}(t)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega=\mathrm{Re}\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}dt\end{cases}.$$

Будем называть комплексным световым полем $\tilde{\vec{E}}(t)$ выражение:

$$\tilde{\vec{E}}(t)=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega,$$

Тогда Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ показывает, сколько в поле $\tilde{\vec{E}}(t)$ содержится сигнала с частотой ω.

$\vec{E}(t)=\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}(t)\right)$ — связь вещественного $\vec{E}(t)$ и комплексного $\tilde{\vec{E}}(t)$ световых полей.

<u>Экзамен. Ряды Фурье для светового поля.</u>

Обычно мы не знаем величину электрического поля на бесконечном интервале времени.

Допустим, нам известно поле $\vec{E}(t)$ на промежутке времени T.

В таком случае за пределами известного интервала времени T либо считают поле $\vec{E}(t)$ равным нулю, либо считают, что поле периодически повторяется с периодом T. Пусть поле $\vec{E}(t)$ — периодическая функция времени. Периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье по кратным частотам.

$$\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}\text{, где }\omega_m=m\frac{2\pi}{T},\qquad m=0,\pm1,\pm2,...$$

Здесь амплитуды ряда Фурье находятся по формулам:

$$\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T}\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt .$$

Аналогично интегралу Фурье из вещественности поля $\vec{E}(t)$ следует, что амплитуды разложения по отрицательным частотам должны быть комплексно сопряженными амплитудам на положительных частотах

$$\tilde{\vec{E}}_m^* = \tilde{\vec{E}}_{-m} .$$

Объединяя парами комплексно сопряженные слагаемые Фурье разложения поля $\vec{E}(t)$, можно из разложения поля по частотам обоих знаков получить разложение по положительным частотам:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} = \frac{\vec{E}_0}{2} + \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} .$$

Окончательно для периодической функции $\vec{E}(t)$ получаем представление в виде ряда Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} = \frac{\vec{E}_0}{2} + \mathrm{Re}\sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t} \\ \tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt \end{cases} .$$

Экзамен. Спектр света. Разные определения спектра света. Спектр экспоненциально затухающего светового цуга.

Математики часто под спектром понимают Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ временно́й зависимости $\vec{E}(t)$. В физике исторически спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Эти изображения представляют собой спектр света, падающего на входную щель спектрометра. Вопрос состоит в том, как количественно описать этот спектр света. Есть несколько подходов к этому вопросу.

В любом случае в физике спектр связан с зависимостью от частоты либо энергии света, либо интенсивности. Энергия пропорциональна интенсивности, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Фурье образ светового поля как раз и играет роль комплексной амплитуды света на определенной частоте света, поэтому спектр света в физике пропорционален квадрату модуля Фурье образа светового поля. Коэффициент пропорциональности в разных случаях вводится по-разному, и обычно вообще не обсуждается, как величина несущественная. Световое поле вещественно, следовательно, квадрат модуля Фурье образа на отрицательных частотах равен квадрату модуля на соответствующих положительных частотах. Поэтому в физике под спектром понимают зависимость квадрата модуля Фурье образа только от положительных частот.

В соответствии с этим мы будем называть спектром света величину пропорциональную квадрату модуля Фурье образа светового поля, как функцию положительной частоты света.

При рассмотрении Фурье образа есть два варианта — интеграл Фурье и ряд Фурье.

Если рассматривается спектр короткого светового импульса G_ω, то берут интеграл Фурье. В качестве примера рассмотрим спектр светового цуга, излучаемого одним атомом при переходе атома из возбужденного в невозбужденное состояние. Амплитуда излучения атома экспоненциально затухает во времени, поэтому световое поле атома в фиксированной точке наблюдения имеет вид:

$$E(t) = E_0\, e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) \text{ при } t > 0$$

и световое поле отсутствует при $t < 0$.

Вычислим Фурье образ этого светового поля:

$$\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\Gamma t}\, \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left(e^{-(\Gamma - i(\omega+\omega_0))t} + e^{-(\Gamma - i(\omega-\omega_0))t} \right) dt =$$

$$= \frac{E_0}{2\pi}\left(\frac{1}{\Gamma - i(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{\Gamma - i(\omega-\omega_0)} \right).$$

Если $\omega \approx \omega_0$, то с учетом $\omega_0 \gg \Gamma$, второе слагаемое оказывается гораздо больше первого

$$\left| \frac{1}{\Gamma - i(\omega+\omega_0)} \right| << \left| \frac{1}{\Gamma - i(\omega-\omega_0)} \right|,$$

так как знаменатель второго слагаемого — величина порядка Γ, а знаменатель первого слагаемого — величина порядка $2\omega_0$. Фурье образ представляет интерес, когда он достаточно велик. Тогда интерес представляет область частот $\omega \approx \omega_0$, и Фурье образ примерно равен

$$\tilde{E}_0(\omega) \approx \frac{E_0}{2\pi\left(\Gamma - i(\omega - \omega_0)\right)}.$$

<u>Факультативная вставка.</u>

На экзамене вместо вещественного поля $E(t) = E_0\, e^{-\Gamma t}\cos(\omega_0 t)$ можно рассмотреть аналогичное комплексное поле $\tilde{E}(t) = \tilde{E}_0\, e^{-\Gamma t} e^{-i\omega_0 t}$ при $t > 0$.

Фурье образ комплексного поля

$$\tilde{E}_0(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{E}(t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{E}_0\,e^{(-\Gamma-i\omega_0+i\omega)t}dt=\frac{\tilde{E}_0}{\pi\left(\Gamma-i\left(\omega-\omega_0\right)\right)}$$

оказался в два раза больше, чем вещественного поля, зато вычисляется проще и безо всяких приближений. Больше, потому что у мнимой экспоненты есть не только косинус, но и синус. Коэффициент $\frac{1}{2}$ для вещественного поля все же нужен.

В каком-то смысле в этом результате без приближений даже больше смысла, чем в Фурье образе от вещественного поля $E(t)=E_0\,e^{-\Gamma t}\cos\left(\omega_0 t\right)$. Дело в том, что в вещественном поле нужно добавить начальную фазу и усреднить Фурье образ по всем возможным значениям этой начальной фазы.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Спектр света G_ω пропорционален квадрату модуля Фурье образа:

$$\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2=\frac{E_0^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\Gamma^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2}=\frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right)^2}=\frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right),$$

где $G_\omega\sim\mathscr{L}(x)\equiv\frac{1}{1+x^2}$ — так называемый лоренцевский контур спектральной линии излучения одиночного атома, где $x\equiv\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}$ — безразмерная отстройка частоты ω от центра линии излучения ω_0, Γ — полуширина на полувысоте спектрального контура.

<u>Факультативная вставка.</u>

Если все-таки вводить определенный коэффициент пропорциональности между спектром G_ω и квадратом модуля Фурье образа $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, то это можно сделать следующим образом. Пусть $G=\frac{dW}{dS}$ — энергия электромагнитного поля, которая падает на единичную площадку перпендикулярную свету. Тогда

$$G=\int\limits_0^{+\infty}G_\omega\,d\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t)\,dt\,,\qquad(1)$$

где $G_\omega\equiv\frac{dG}{d\omega}$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку в единичном интервале частот; $I(t)$ — интенсивность света или энергия, которая падает на единичную площадку в единицу времени.

Интенсивность света связана с его амплитудой $I(t)=\frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2(t)$. Если теперь для светового цуга взять $E_0(t)=E_0e^{-\Gamma t}$ при $t>0$, в равенство (1) подставить $G_\omega = \alpha\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ с неизвестным коэффициентом α и подставить $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right)$, то можно найти величину коэффициента α. В результате окажется, что

$$G_\omega = 2\pi\frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2.$$

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Если вместо светового импульса нужно анализировать изменение спектра света со временем, то рассматривают ряд Фурье. Для вычисления Фурье образа напряженности нужно рассматривать не один момент времени, а некоторый промежуток. Этот промежуток времени *T* усреднения спектра выбирают произвольно. Спектр будет существенно зависеть от этого выбора.

Сначала рассматривают первый промежуток времени *T* и на этом промежутке определяют спектр. С этой целью реальную зависимость светового поля от времени заменяют периодической зависимостью с периодом *T*. На этом периоде световое поле полагается равным реальному световому полю на первом промежутке времени *T*. Для полученного таким образом периодического светового поля находят разложение в ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов этого разложения представляют собой гистограмму спектра света на первом промежутке времени *T*. Затем рассматривают второй промежуток времени *T* с реальной зависимостью светового поля от времени. Чтобы найти спектр для этого второго промежутка времени *T*, реальную зависимость светового поля от времени опять заменяют на периодическую зависимость с периодом *T*. Только теперь на этом периоде световое поле совпадает с реальным световым полем на втором промежутке времени *T*. Опять вычисляют ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов ряда Фурье — гистограмма спектра на втором промежутке времени *T*. И так далее. Получается возможность рассмотрения зависимости спектра от времени.

Если квадрат модуля Фурье амплитуды умножить на некоторый коэффициент:

$$I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2,$$

то I_m окажется интенсивностью света на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$. Можно доказать, что общая интенсивность света $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$. Набор интенсивностей I_m удобно называть и называют спектром света. В этом определении спектр света — это некоторая гистограмма.

Если промежуток времени *T* выбрать слишком коротким, то спектр будет слишком бедным (мало палок в гистограмме спектра), в нем будет слишком мало подробностей. Если же промежуток времени *T* выбрать слишком длинным, то спектр будет определен через большие интервалы времени (не достаточно часто).

Факультативная вставка.

Покажем, что $I=\sum\limits_{m=0}^{+\infty} I_m$.

Выразим интенсивность света через среднее значение квадрата напряженности, а напряженность подставим в виде ряда Фурье.

$$I=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\vec{E}(t),\vec{E}(t)\right)\right\rangle_t=$$

$$=\frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m e^{-i\omega_m t},\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_k e^{-i\omega_k t}\right)\right\rangle_t$$

Вынесем комплексные экспоненты за знак скалярного произведения и получим

$$I=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{-i\omega_m t}\cdot\left(e^{-i\omega_k t}\right)^*\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right)=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right)$$

Если частоты ω_k и ω_m не совпадают, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t=0$, так как $e^{i(\omega_k-\omega_m)t}$ — комплексное число единичной длины, которое вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью $\omega_k-\omega_m$. Если же частоты совпадают $\omega_k=\omega_m$, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t=1$. Тогда

$\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t=\delta_{km}$ — дельта символ Кронекера. Тогда

$$I=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_m\right)=\frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|^2.$$

Учтем, что $\left|\tilde{\vec{E}}_{-m}\right|=\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|$, так как $\tilde{\vec{E}}_{-m}=\tilde{\vec{E}}_m^*$ и получим

$$I=\frac{cn}{16\pi\mu}E_0^2+\frac{cn}{8\pi\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2.$$

Сравним это выражение с выражением интенсивности через вещественную амплитуду светового поля E_0:

$$I=\frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2.$$

Вещественная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды, тогда

$I_m=\frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m=m\frac{2\pi}{T}$.

Введем для интенсивности на нулевой частоте определение: $I_0 \equiv \frac{cn}{16\pi\mu} E_0{}^2$, тогда интенсивность света $I = \frac{cn}{16\pi\mu} E_0^2 + \frac{cn}{8\pi\mu} \sum_{m=1}^{+\infty} \left|\tilde{E}_m\right|^2$ можно выразить, как сумму интенсивностей по положительным частотам:

$$I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m \,.$$

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Особняком при рассмотрении спектра стоит излучение абсолютно черного тела (формула Планка). Здесь тоже есть два варианта. Под спектром понимают либо спектральную плотность объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

либо энергию, которую излучает поверхность нагретого абсолютно черного тела. В этом случае под спектром понимают спектральную плотность энергии излучаемой единицей площади поверхности абсолютно черного тела в единицу времени:

$$\frac{c \cdot w_\nu(T)}{4} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Кроме того $w_\omega = \frac{1}{2\pi} w_\nu$, что дает еще две формулы для спектра излучения абсолютно черного тела.

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Есть еще один вариант определения спектра. Рассмотрим автокорреляционную функцию напряженности светового поля:

$$F(\tau) \equiv \left\langle E(t) E(t+\tau) \right\rangle_t,$$

где угловые скобки — это усреднение по времени.

Эту функцию можно измерить в эксперименте, как сигнал с приемника света в интерферометре Майкельсона (обсудим его позднее) при движении одного из зеркал интерферометра с постоянной скоростью. Функция $F(\tau)$ — четная функция, поэтому ее можно разложить в интеграл Фурье по косинусам. Фурье-образ функции $F(\tau)$ будет вещественной положительной функцией частоты. Частота в Фурье разложении через скорость движения зеркала связана с оптической частотой света. Этот Фурье-образ, как функцию от оптической частоты, тоже можно по определению считать спектром света. Подробнее об этом будет рассказано в вопросе о Фурье спектроскопии.

Конец факультативной вставки.

Факультативно. Теорема Парсеваля.

Если рассмотреть два выражения для поверхностной плотности энергии светового поля:

$$G = \int\limits_{0}^{+\infty} G_{\omega}\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt\,,$$

где G_{ω} — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку перпендикулярную направлению света в единичном интервале циклических частот, $I(t)$ — зависимость интенсивности света от времени. То из этого равенства можно получить теорему Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{E}_0(\nu)\right|^2 d\nu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\, dt\,,$$

где $\tilde{\vec{E}}_0(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i2\pi\nu t} \cdot dt$.

Или, если вместо нашего определения $\tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt$ положить, что $\tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt$, то получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\, dt\,.$$

Это та же теорема Парсеваля.

Заметим, что в математике теорема Парсеваля доказана для более общего случая унитарного преобразования. Преобразование Фурье — частный случай унитарного преобразования.