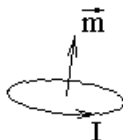


Магнитное поле в веществе.
Намагниченность и связанные токи.

$\vec{M} \equiv \frac{d\vec{m}}{dV}$ — намагниченность или объемная плотность магнитного

дипольного момента, где $\vec{m} \equiv I\vec{S}$ — магнитный дипольный момент.



Для электрического поля аналогично $\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация или

объемная плотность электрического дипольного момента, где $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ —

электрический дипольный момент.

Связанные токи, они же молекулярные токи, они же токи намагничения.

Связанные токи — внутриатомные и внутримолекулярные токи — токи с перемещением зарядов в пределах одной молекулы.

Токи проводимости или свободные токи — токи с макроскопическим перемещением зарядов — токи с перемещением зарядов много большим, чем размеры одной молекулы.

Будем обозначать:

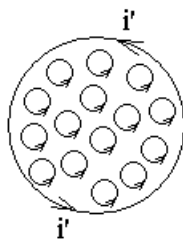
I', \vec{j}', \vec{i}' — связанные токи;

I, \vec{j}, \vec{i} — токи проводимости;

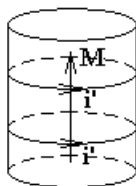
$(I'+I), (\vec{j}'+\vec{j}), (\vec{i}'+\vec{i})$ — полные токи.

Рассмотрим цилиндр, намагниченный вдоль оси, то есть с объемной плотностью магнитного дипольного момента, направленной вдоль оси цилиндра.

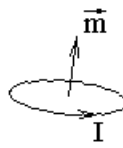
Вид с торца цилиндра со связанными токами:



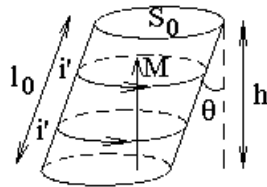
При сложении молекулярных токов получается ток, как бы идущий по боковой поверхности цилиндра — связанный ток.



Намагниченность цилиндра и связанные токи образуют правый винт, как и для магнитного момента каждого атома:



Рассмотрим теперь наклонный цилиндр, намагниченный перпендикулярно плоскости основания.



Чтобы найти связь между намагниченностью и связанными токами, выразим магнитный момент всего цилиндра двумя способами и приравняем эти два выражения.

$$\begin{cases} m = MV \\ m = I'S_0 \end{cases} \Rightarrow MV = I'S_0 \Rightarrow M \cdot S_0 h = i'l_0 S_0 \Rightarrow$$

$$M \cdot \frac{h}{l_0} = i' \Rightarrow M \cdot \cos(\theta) = i' \Rightarrow M_\tau = i'$$

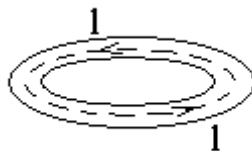
— связь тангенциальной составляющей намагниченности и плотности поверхностных связанных токов на границе магнетик-вакуум.

На границе двух магнетиков:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = i', \text{ где } \vec{\tau} = \left[\frac{\vec{i}'}{i'}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right].$$

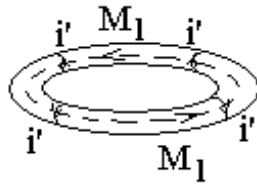
Скачок тангенциальной составляющей намагниченности образует правый винт с плотностью поверхностных связанных токов.

Рассмотрим замкнутый контур l , который целиком находится в намагниченном веществе. Пусть намагниченность вещества имеет различную величину в разных точках. Рассмотрим тонкую трубку вокруг контура в виде тора, который так же целиком находится внутри намагниченного вещества.



Рассмотрим M_l — составляющую намагниченности вдоль контура l . Забудем на время об остальных составляющих намагниченности.

Если тор намагничен вдоль контура l , то связанные токи будут течь по поверхности тора, охватывая намагниченность M_l по правилу правого винта.



Рассмотрим величину связанного тока, пронизывающего контур l , то есть протыкающего площадку, ограниченную контуром l .

Связанные токи протыкают площадку, ограниченную контуром l , пересекая линию внутренней окружности тора.

Для точек поверхности тора на этой линии $M_\tau = i'$ — это составляющая намагниченности вдоль этой линии, направленная по касательной к поверхности тора и перпендикулярно связанным токам.

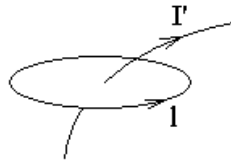
Тогда $M_l \approx M_\tau = i'$ — составляющая магнитного поля вдоль контура l .

Найдем связанный ток, пронизывающий весь контур l :

$$I' = \oint_l dI' = \oint_l i' dl = \oint_l M_l dl \quad \Rightarrow$$

$$\oint_l M_l dl = I', \quad \text{где направление обхода контура } l \text{ и направление}$$

пронизывающих контур связанных токов I' образуют правый винт.

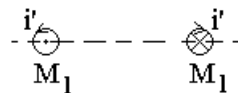


$$\text{В системе СГС Гаусса: } \oint_l M_l dl = \frac{I'}{c}.$$

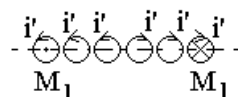
Факультативная вставка.

Докажем, что нет других связанных токов пронизывающих контур l , кроме токов, текущих по боковой поверхности тора.

Повернем плоскость рисунка так, чтобы плоскость контура l оказалась перпендикулярна плоскости рисунка.



Магнетик на площадке, ограниченной контуром, можно разбить на трубки (торы) других контуров.



Для новых трубок, сколько связанных токов втекает в площадку, ограниченную контуром l , столько и вытекает.

Кроме составляющей намагниченности M_l , остальные составляющие намагниченности создают связанные токи, которые так же имеют нулевой суммарный связанный ток через площадку, ограниченную контуром.

Конец факультативной вставки.

$$\oint_l M_l dl = I' \text{ — соотношение между намагниченностью } \vec{M} \text{ и связанными}$$

токами I' в интегральной форме.

Получим теперь соотношение между намагниченностью и связанными токами в дифференциальной форме.

$$\oint_l M_l dl = I' \quad \left| \cdot \frac{1}{S} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\text{rot}(\vec{M}) \right)_n = \frac{I'}{S} = j'_n, \text{ где } \vec{n} \uparrow \uparrow \vec{S} \text{ — любое}$$

направление. Тогда

$$\text{rot}(\vec{M}) = \vec{j}'$$

$$\text{В системе СГС Гаусса: } \text{rot}(\vec{M}) = \frac{\vec{j}'}{c}.$$

В трех формах связь намагниченности среды \vec{M} и связанных токов в дифференциальном, интегральном виде и для границы намагниченной среды имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{M}) = \vec{j}' \\ \oint_l M_l dl = I' \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = i' \end{cases}.$$

Связанные токи и намагниченность среды образуют правый винт или

$$\vec{\tau} = \left[\begin{array}{l} \vec{i}' \\ \frac{\vec{i}'}{i'}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right].$$

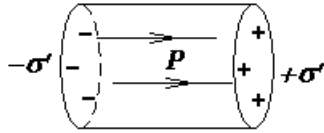
Намагниченность и связанные токи для переменных полей.

Соотношение $\text{rot}(\vec{M}) = \vec{j}'$ справедливо только для постоянных магнитных полей, независящих от времени.

В более общем случае

$$\vec{j}' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{M}).$$

Чтобы понять природу слагаемого $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ представим себе диэлектрический цилиндр, который поляризован вдоль оси цилиндра. Пусть поляризация цилиндра \vec{P} линейно нарастает во времени.



На торцах цилиндра образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P$, что следует из граничных условий $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$.

Производная от зарядов по времени равна силе тока, а производная от поверхностной плотности заряда по времени равна плотности тока

$$j' = \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{dP}{dt}.$$

Частная производная по времени вместо полной производной подчеркивает неизменность пространственных координат при вычислении производной.

Напряженность магнитного поля.

На внутриатомном микроскопическом уровне нет разницы между молекулярными токами I' и токами проводимости I . И те и другие находятся в вакууме и создают магнитное поле \vec{B} . Тогда для поля \vec{B} на микроскопическом уровне

$$\oint_l (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 (I + I').$$

Усредненное микроскопическое магнитное поле \vec{B} называют полем \vec{B} в среде. Для усредненного поля \vec{B} будет выполнено то же соотношение

$$\oint_l (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 (I + I').$$

Вычтем из этого равенства следующее равенство, умноженное на μ_0

$$\oint_l (\vec{M}, d\vec{l}) = I' \text{ и получим}$$

$$\oint_l (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}, d\vec{l}) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, d\vec{l} \right) = I.$$

Определим напряженность магнитного поля \vec{H} следующим равенством:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \text{ Тогда}$$

$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, что похоже на соотношение для электрических полей $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Из равенства $\oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, d\vec{l} \right) = I$ следует

$\oint_l H_l dl = I$ — теорема о циркуляции напряженности магнитного поля в

интегральной форме. Из интегральной формы следуют две другие: дифференциальная форма и форма для границы раздела сред.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \\ \oint_l H_l dl = I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{array} \right. \quad \text{— связь напряженности магнитного поля } \vec{H} \text{ и токов}$$

проводимости в трех формах.

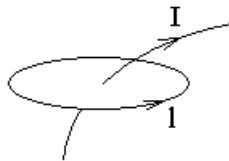
В системе СГС Гаусса: $\oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I$ $\oint_l M_l dl = I'$ $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$ $\vec{m} = \frac{I}{c} \vec{S}$

Основные формулы для магнитного поля в среде.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \\ \oint_l H_l dl = I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{M}) = \vec{j}' \\ \oint_l M_l dl = I' \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = i' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}') \\ \oint_l B_l dl = \mu_0 (I + I') \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \mu_0 (i + i') \end{array} \right.$$

Во всех равенствах направление обхода контура и направление тока образуют правый винт,



$\vec{\tau} = \left[\frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \right]$ — единичный вектор по касательной к поверхности, по

которой текут токи, и перпендикулярный токам.

Сравнение формул для электрического и магнитного полей.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \int_V \rho \vec{r} dV$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho'$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\}$$

$$\vec{m} = I\vec{S} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}, \vec{j}] dV = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}, \rho \vec{r}] dV$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}')$$

$$\operatorname{rot}(\vec{M}) = \vec{j}'$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\}$$

Электрическое и магнитное поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Граничные условия позволяют найти поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Если на границе полости нет свободных поверхностных зарядов и поверхностных токов проводимости $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \vec{i} = 0 \end{cases}$, то граничные условия для

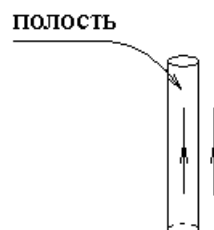
электрического и магнитного полей выглядят одинаково:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Поэтому дальнейшие рассуждения одинаковы для электрического и магнитного полей.

Рассмотрим полость в виде длинного цилиндра с осью цилиндра направленной вдоль поля.

Для цилиндрической полости, вытянутой вдоль поля, линии поля идут по касательной к боковой поверхности цилиндра полости и почти не искривляются.



Граничные условия на боковой поверхности полости:

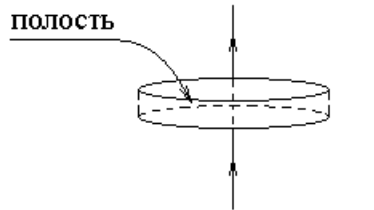
$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \quad \text{или} \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0. \quad \Rightarrow$$

Напряженность в полости, вытянутой вдоль поля, одинаковая в среде и в полости.

Индукция поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем напряженность электрического или магнитного поля в веществе.

Для цилиндрической полости, сплюснутой перпендикулярно полю, линии поля направлены перпендикулярно доньшкам полости и, проходя через доньшки, почти не искривляются.



Граничные условия на доньшках полости:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad \text{или} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad \Rightarrow$$

Индукция в полости, сплюснутой перпендикулярно полю, одинаковая в среде и в полости. Напряженность поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем электрическую или магнитную индукцию в веществе.

Совсем факультативная вставка.

Рассмотрим полость в форме шара. Электрическое поле.

Пусть:

\vec{E}_0 — напряженность электрического поля вдали от полости.

Придумаем, что $\vec{E}_1 = \overline{const}$ — напряженность однородного электрического поля внутри полости.

Придумаем, что поле снаружи полости $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, где

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\} \quad \text{— напряженность электрического поля точечного}$$

диполя расположенного в центре полости.

Проверим, что придуманное поле удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_0 \epsilon E_{2n} - \epsilon_0 E_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1n} = \epsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

Подставим

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos(\theta) \\ E_{1\tau} = E_1 \sin(\theta) \\ E_{2n} = E_0 \cos(\theta) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{p \cos(\theta)}{R^3} - \frac{p \cos(\theta)}{R^3} \right\} = E_0 \cos(\theta) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \frac{p \cos(\theta)}{R^3} \\ E_{2\tau} = E_0 \sin(\theta) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \sin(\theta)}{R^3} \end{cases}$$

в два следующих равенства

$$\begin{cases} E_{1n} = \epsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

и после сокращения первого равенства на $\cos(\theta)$, а второго — на $\sin(\theta)$, получим

$$\begin{cases} E_1 = \epsilon E_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\epsilon \frac{p}{R^3} \\ E_1 = E_0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{R^3} \end{cases}$$

Откуда

$$E_1 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_0 \quad \text{и} \quad p = -4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{2\epsilon+1} R^3 E_0.$$

Аналогично для магнитного поля:

$$H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu} H_0, \quad m = -\frac{4\pi}{\mu_0} \cdot \frac{\mu-1}{2\mu+1} R^3 H_0 \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{3}{1+2\mu} B_0$$

В системе СГС Гаусса:

$$E_1 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_0 \quad \text{и} \quad p = -\frac{\epsilon-1}{2\epsilon+1} R^3 E_0.$$

Аналогично для магнитного поля:

$$H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu} H_0, \quad m = -\frac{\mu-1}{2\mu+1} R^3 H_0 \quad \text{и} \quad B_1 = \frac{3}{1+2\mu} B_0$$

Конец совсем факультативной вставки.

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ — определение χ_m — магнитной восприимчивости среды.

Аналогично $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ для электрического поля.

$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ — определение μ — магнитной проницаемости среды.

Аналогично $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ для электрического поля.

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$\mu = 1 + \chi_m \quad \text{аналогично} \quad \epsilon = 1 + \chi.$$

В системе СГС Гаусса:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \quad \mu = 1 + 4\pi \chi_m$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi$$

Связанные токи обычно присутствуют только на поверхности намагниченной среды.

$$\vec{j}' = \text{rot}(\vec{M}) = \text{rot}(\chi_m \vec{H})$$

Если магнетик однородный, то магнитную восприимчивость χ_m можно вынести за знак производной везде, кроме точек границы магнетика. Вынесем χ_m за знак ротора и получим

$$\vec{j}' = \chi_m \cdot \text{rot}(\vec{H}) = \chi_m \cdot \vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{j}' = \chi_m \vec{j}.$$

Если в объеме намагниченной среды нет токов проводимости \vec{j} , то нет и связанных токов \vec{j}' . Поэтому связанные токи обычно протекают только по поверхности намагниченной среды.

Два способа вычисления векторного потенциала A магнитного поля, создаваемого намагниченной средой.

Можно считать, что вещества нет, а связанные токи висят в вакууме, тогда

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} dV}{cr} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}'(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{i}'(\vec{r}') \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Здесь в правой части равенства обычно отлично от нуля только второе слагаемое, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика.

Можно считать, что вещества нет, а магнитные диполи висят в вакууме, тогда

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Факультативная вставка.

Интегралы для векторного потенциала, как и для потенциала, создаваемого поляризованным диэлектриком, содержат интегрируемую особую точку $\vec{r} - \vec{r}' = 0$. Особенность интегрируемая, так как ее можно устранить заменой переменной интегрирования \vec{r}' на $\vec{r}_0 = \vec{r}' - \vec{r}$.

Конец факультативной вставки.

Два способа вычисления магнитного поля B , создаваемого намагниченной средой.

Первый способ. Можно считать, что вещества нет, а связанные токи висят в вакууме, тогда

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{[\vec{i}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

Здесь отличен от нуля обычно только второй интеграл, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика. Вторым интегралом имеет неинтегрируемую особую точку, если точка вычисления магнитного поля находится на поверхности со связанными токами. На такой поверхности поле \vec{B} испытывает скачок и не имеет определенного значения, так как магнитное поле испытывает скачок на токонесущей поверхности.

Второй способ. Можно считать, что вещества нет, а магнитные диполи висят в вакууме, тогда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3} \pi \vec{m} \delta(\vec{r}) \right\} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ 3 \frac{(\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV' + \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}(\vec{r})$$

Здесь интегралы нужно понимать в смысле главного значения. Подробнее смотрите аналогичный вопрос для электрического поля.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{r})$$