

## Лекционные демонстрации (13 минут)

### Третий способ вычисления магнитного поля намагниченной среды.

Третий способ вычисления магнитного поля — найти напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

Магнитное поле, создаваемое намагниченной средой, во всех отношениях такое, как будто оно создано магнитными зарядами.

По аналогии с электрическим полем можно построить и теорию магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} & \Rightarrow & \vec{H} = \frac{q_m}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{p} &= q\vec{l} & \Rightarrow & \vec{m} = q_m\vec{l} \\ \vec{P} &= \frac{d\vec{p}}{dV} & \Rightarrow & \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \\ P_{2n} - P_{1n} &= -\sigma' & \Rightarrow & M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m \\ \vec{D} &= \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} & \Rightarrow & \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

В системе СГС Гаусса:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= q \frac{\vec{r}}{r^3} & \Rightarrow & \vec{H} = q_m \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{p} &= q\vec{l} & \Rightarrow & \vec{m} = q_m\vec{l} \\ \vec{P} &= \frac{d\vec{p}}{dV} & \Rightarrow & \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \\ P_{2n} - P_{1n} &= -\sigma' & \Rightarrow & M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} & \Rightarrow & \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \end{aligned}$$

На самом деле магнитное поле создается токами, а не зарядами, именно поэтому при усреднении внутриатомного магнитного поля получается поле  $\vec{B}$ , а не поле  $\vec{H}$ .

Третий способ вычисления магнитного поля  $\vec{B}$  имеет следующий алгоритм:  $\vec{M} \rightarrow \sigma'_m \rightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{B}$ .

Здесь  $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$  аналогично  $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$  для диэлектриков.

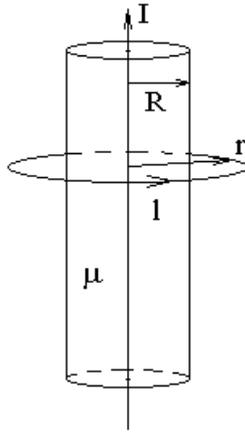
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma'_m(\vec{r}') \cdot dS'$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}).$$

### Примеры решения задач с магнетиками.

#### 1. Магнитное поле длинного провода с током в цилиндрической оболочке из магнитного материала.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_\varphi + \vec{B}_r + \vec{B}_z \\ H_\varphi &= ? \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \oint H_l dl = I \\ l \\ H_l = H_\varphi \end{cases} \Rightarrow H_\varphi l = I \Rightarrow 2\pi r H_\varphi = I \Rightarrow$$

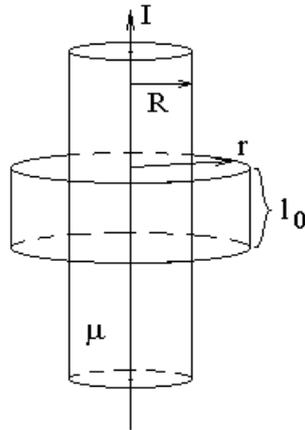
$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$ . Тогда с учетом  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  получим

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} \text{ при } r < R \quad \text{и} \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ при } r > R$$

-----  
Докажем, что двух других составляющих магнитного поля нет.

$$B_r = ?$$

Рассмотрим поток поля  $\vec{B}$  через поверхность цилиндра, положение которого соответствует симметрии задачи.



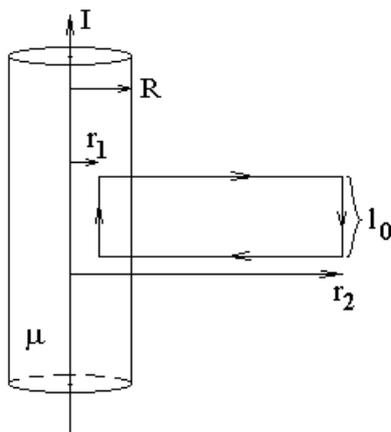
Поток поля  $\vec{B}$  может создавать только составляющая  $B_r$ . Эта составляющая может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

$$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r S = 2\pi r l_0 \cdot B_r$$

Поток поля  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю  $\Phi_B = 0$ , следовательно,  $B_r = 0$ .

-----  
 $H_z = ?$

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по прямоугольному контуру, в плоскости которого лежит провод с током.



$$\oint_l H_l dl = I$$

Правая часть равенства равна нулю, так как нет токов проводимости, пронизывающих контур интегрирования.

В левую часть равенства в циркуляцию магнитного поля дают вклад только вертикальные отрезки контура, так как горизонтальные отрезки направлены радиально, а радиальная составляющая магнитного поля равна нулю  $B_r = 0$ .

Вклад в циркуляцию на вертикальном отрезке равен произведению вертикальной составляющей магнитного поля на длину вертикального отрезка  $l_0$ . На левом вертикальном отрезке  $H_l = H_z$ , а на правом отрезке  $H_l = -H_z$ . Тогда

$$\oint_l H_l dl = I \Rightarrow H_l(r_1) \cdot l_0 + H_l(r_2) \cdot l_0 = 0 \Rightarrow$$

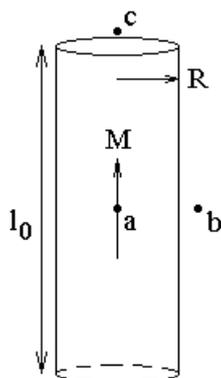
$$H_z(r_1) \cdot l_0 - H_z(r_2) \cdot l_0 = 0 \Rightarrow H_z(r) = const$$

$$\text{Но } H_z(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \text{ тогда } H_z(r) = 0 \Rightarrow$$

$$B_z = 0.$$

## 2. Магнитное поле длинного намагниченного цилиндра в трех характерных точках.

Пусть длинный цилиндр намагничен вдоль оси. Найдем магнитное поле в точках а, b, с:

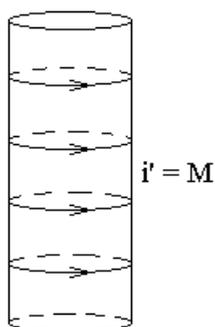


Здесь точка  $a$  находится в центре цилиндра, точка  $b$  — у боковой поверхности цилиндра в середине его высоты, точка  $c$  — непосредственно над серединой торца цилиндра.

В этих трех точках найдем магнитное поле связанных токов.

Можно считать, что есть только связанные токи, а материала магнетика нет, что токи висят в вакууме. Найдем магнитное поле токов.

Связанные токи текут по поверхности цилиндра вокруг вектора намагниченности по правилу правого винта.



Из симметрии задачи следует, что магнитное поле в этих трех точках направлено вдоль оси цилиндра. Для каждой малой площадки с током составляющая вдоль оси цилиндра перпендикулярна току и перпендикулярна нормали к поверхности, по которой течет ток. Следовательно,

$$B = B_z = B_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} i' \Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} M \Omega, \text{ где } \Omega \text{ — телесный угол, под которым из}$$

точки наблюдения поля видна поверхность с током. Последнее равенство в цепочке определяется равенством  $M_{\tau} = i'$ , которое следует из граничных условий для намагниченности  $M_{2\tau} - M_{1\tau} = i'$ .

Для определения величины магнитного поля  $B$  в рассматриваемых трех точках достаточно найти телесный угол  $\Omega$ , под которым поверхность с током видна из точки наблюдения магнитного поля.

Для точки  $a$  телесный угол  $\Omega$  — это полный телесный угол  $4\pi$  минус два телесных угла, под каждым из которых видно одно доньшко цилиндра из его середины. Этот телесный угол равен отношению площади доньшка к квадрату расстояния от точки наблюдения до доньшка. Тогда:

$$B_a = \frac{\mu_0}{4\pi} M \Omega_a \approx \frac{\mu_0}{4\pi} M \cdot \left( 4\pi - 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} \right) = \left( 1 - \frac{2R^2}{l_0^2} \right) \mu_0 M$$

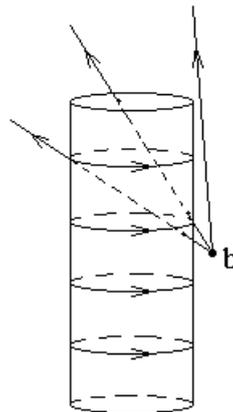
$$H_a = \frac{B_a}{\mu_0} - M \approx -\frac{2R^2}{l_0^2} M.$$

-----

Рассмотрим магнитное поле в точке  $b$ . В этой точке токи, расположенные на ближней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вниз, а токи, расположенные на дальней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вверх.

Чтобы вычислить суммарное магнитное поле нужно найти разность телесных углов, под которыми видна ближняя к точке наблюдения поверхность с током и дальняя поверхность с током.

Разность телесных углов равна телесному углу, под которым из точки наблюдения поля видны два доньшка цилиндра. Чтобы убедиться в этом рассмотрим три разных луча, выходящих из точки  $b$ .



Рассмотрим малый телесный угол вокруг каждого из этих трех лучей.

Нижний луч протыкает боковую поверхность цилиндра дважды. Внутри соответствующего ему малого телесного угла окажется часть ближней поверхности с током и часть дальней поверхности с током. Эти две площадки с током дают равные по величине и противоположно направленные вклады в вертикальную составляющую магнитного поля в точке  $b$  в соответствии с формулой  $dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} i' d\Omega$ , где  $d\Omega$  — рассматриваемый малый телесный угол.

Верхний из трех лучей и малый телесный угол вокруг него не касаются поверхности цилиндра и не дают вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке  $b$ .

Средний из трех лучей входит в цилиндр через ближнюю часть боковой поверхности цилиндра, а выходит через верхнее доньшко. В малый телесный угол вокруг луча попадает только часть ближней токонесущей боковой

поверхности цилиндра. Эта часть токнесущей поверхности дает не скомпенсированный вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке наблюдения. Телесные углы именно вокруг таких лучей, которые входят в цилиндр через его боковую поверхность, а выходят через доньшко, дают вклад в телесный угол  $\Omega$ , который определяет величину магнитного поля в точке  $b$ .

$$B_b = -\frac{\mu_0}{4\pi} M \Omega_b \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} M \cdot 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -\frac{2R^2}{l_0^2} \mu_0 M,$$

$$H_b = \frac{B_b}{\mu_0} \approx -\frac{2R^2}{l_0^2} M.$$

-----  
 В точке  $c$  телесный угол, под которым видна поверхность с током — это половина полного телесного угла  $2\pi$  для нижнего полупространства минус телесный угол  $\frac{\pi R^2}{l_0^2}$ , под которым видно нижнее доньшко. Тогда

$$B_c = \frac{\mu_0}{4\pi} M \Omega_c \approx \frac{\mu_0}{4\pi} M \left( 2\pi - \frac{\pi R^2}{l_0^2} \right) = \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2} \right) \mu_0 M$$

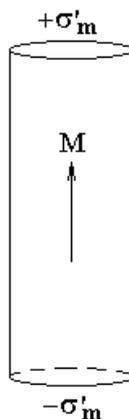
$$H_c = \frac{B_c}{\mu_0} \approx \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2} \right) M.$$

### **Решение 2.**

В той же задаче можно найти магнитное поле магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

По аналогии с электрическими зарядами  $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ , напишем для магнитных зарядов

$M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m \quad \Rightarrow \quad \sigma'_m = M$  — поверхностная плотность связанных магнитных зарядов на торцах цилиндра.



Эти заряды создают напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ . Затем поле  $\vec{B}$  можно найти по формуле  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .

Точка  $a$  в центре цилиндра расположена далеко от торцов цилиндра. Тогда магнитный заряд на каждом торце можно считать точечным. Напряженности полей обоих зарядов в центре цилиндра направлены сверху вниз.

$$H_a = -2 \frac{q'_m}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 M}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -\frac{2R^2}{l_0^2} M$$

$$B_a = \mu_0(H_a + M) = \left(1 - \frac{2R^2}{l_0^2}\right) \mu_0 M$$

Цилиндр узкий, точка  $b$  близко расположена к точке  $a$ , поэтому напряженность магнитного поля в точке  $b$  почти такая же, как и в точке  $a$ :

$$H_b = -\frac{2R^2}{l_0^2} M, \quad B_b = \mu_0 H_b = -\frac{2R^2}{l_0^2} \mu_0 M.$$

Точка  $c$  расположена близко к торцу цилиндра, при этом торец выглядит бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $\sigma'_m$ .

Напряженность электрического поля бесконечной плоскости равна  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ,

так как  $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ . По аналогии напряженность магнитного поля

бесконечной плоскости равна  $H = \frac{\sigma'_m}{2} = \frac{M}{2}$ . Заряд нижнего торца цилиндра можно считать точечным. Тогда

$$H_c = \frac{\sigma'_m}{2} - \frac{q'_m}{4\pi} \frac{1}{l_0^2} = \frac{\sigma'_m}{2} - \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{4\pi} \frac{1}{l_0^2} = \frac{M}{2} - \frac{\pi R^2 M}{4\pi} \frac{1}{l_0^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2}\right) M$$

$$B_c = \mu_0 H_c = \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2}\right) \mu_0 M$$

Ответы совпадают с ответами первого решения.

### **Четыре предварительных замечания к решению задач по теме магнитопровод.**

#### 1-ое замечание.

Аналогично краевой задачи электростатики для уравнения  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

уравнение  $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$  имеет единственное решение в объеме, если на границах

объема задано одно из граничных условий аналогичных условиям Дирихле или Неймана. В среде  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$  и  $\Delta\vec{A} = -\mu_0\mu\vec{j}$ .

В среде уравнение  $\Delta\vec{A} = -\mu_0\mu\vec{j}$  для векторного потенциала эквивалентно паре дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$  для полей  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . При

условиях:  $\begin{cases} \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} \\ \vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \\ \text{div}(\vec{A}) = 0 \end{cases}$

На границе намагниченных сред система  $\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$  превращается в

граничные условия  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$

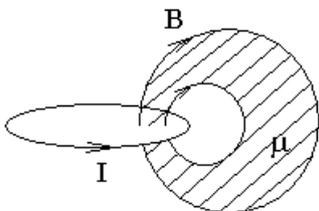
В результате, решение для магнитного поля можно придумывать. Для придуманного решения нужно проверять условия  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$  на границе объема и на границах намагниченных сред внутри рассматриваемого объема, здесь  $i$  — плотность поверхностного тока проводимости.

Внутри рассматриваемого объема нужно проверять условия  $\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$ ,

где  $\vec{j}$  — плотность токов проводимости.

### 2-ое замечание.

Если в задаче без магнетиков любую трубку линий поля  $\vec{B}$  заполнить магнетиком, то напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  нигде не изменится.



Доказательство этого замечания.

Придумаем решение, в котором поле  $\vec{H}$  нигде не изменилось.

Проверим выполнение граничных условий  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$  на границе

магнетика внутри рассматриваемого объема, то есть на границах трубки линий поля  $\vec{B}$ , заполненной магнетиком.

Граница магнетика выбрана вдоль линий поля  $\vec{B}$ , следовательно, нормальной составляющей поля  $\vec{B}$  на границе магнетика нет. Тогда условие  $B_{2n} - B_{1n} = 0$  выполнено на границе магнетика.

Условие  $H_{2\tau} - H_{1\tau} = i$  выполнено на границе магнетика, так как на этой границе нет токов проводимости  $i = 0$ , и у придуманного поля  $\vec{H}$  нет скачка на границе.

Уравнения  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$  будут выполнены в остальных точках внутри

объема, так как они были выполнены для поля  $\vec{H}$  в задаче без магнетиков.