## Магнитная энергия взаимодействия системы токов.

(с учетом работы ЭДС индукции)

$$-dW = dA + \sum_k \mathcal{E}_k I_k dt \quad => \quad dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} - \sum_k \left(-\frac{d\Phi_k}{dt}\right) I_k dt, \quad \text{где}$$

$\Phi_k = \sum_i L_{ki} I_i$, откуда $W = \sum_{k,i} \frac{L_{ki} I_k I_i}{2}$ и $W = \frac{LI^2}{2}$.

Пусть $W$ — магнитная энергия системы токов.

При уменьшении магнитной энергии системы токов эта энергия расходуется на механическую работу магнитных сил и на работу $\mathcal{E}_k I_k dt$ ЭДС индукции в каждом контуре. ЭДС индукции черпают энергию из магнитной энергии системы токов. Работа ЭДС индукции расходуется на Ленц-Джоулево тепло в соответствии с законом Джоуля-Ленца $N = \mathcal{E} I + UI = \mathcal{E} I$.

$$-dW = dA + \sum_k \mathcal{E}_k I_k dt$$

Поменяем знаки в равенстве и подставим сюда выражение для работы $dA$ из предыдущего вопроса. Тогда получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} - \sum_k \mathcal{E}_k I_k dt.$$

Подставим сюда выражение для ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} - \sum_k \left(-\frac{d\Phi_k}{dt}\right) I_k dt.$$

Сократим $dt$ в числителе и знаменателе, тогда

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} - \sum_k \left(-d\Phi_k\right) I_k.$$

Подставим сюда выражение для потока через коэффициент взаимной индукции $\Phi_k = \sum_i L_{ki} I_i$ и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} + \sum_k I_k d\left(\sum_i L_{ki} I_i\right).$$

Разложим $d\left(L_{ki} I_i\right)$, как дифференциал от произведения и получим

$$dW = -\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_k I_i dL_{ki} + \sum_{k,i} I_k I_i dL_{ki} + \sum_{k,i} I_k L_{ki} dI_i.$$

Первые две суммы имеют разные знаки. Объединим эти две суммы в одну и получим

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i} I_k I_i dL_{ki} + \sum_{k,i} I_k L_{ki} dI_i.$$

Разобьем правую сумму на две тождественные суммы с точностью до замены $i \leftrightarrow k$ и получим

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i} I_k I_i dL_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{k,i} I_k L_{ki} dI_i + \frac{1}{2}\sum_{k,i} I_i L_{ki} dI_k .$$

Объединим две правые суммы с учетом того, что $I_k dI_i + I_i dI_k = d\left(I_k I_i\right)$ и получим

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i} I_k I_i dL_{ki} + \frac{1}{2}\sum_{k,i} L_{ki} d\left(I_k I_i\right).$$

Эти две суммы тоже можно объединить в одну сумму, как дифференциал от произведения $L_{ki}$ на $I_k I_i$, тогда

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k,i} d\left(L_{ki} I_k I_i\right) \qquad =>$$

$$W = \sum_{k,i} \frac{L_{ki} I_k I_i}{2}$$ — магнитная энергия взаимодействия системы токов. Эту формулу нужно запомнить к экзамену, а ее вывод помнить не нужно.

Если контур один, например, катушка индуктивности, то

$$W = \frac{LI^2}{2}$$ — энергия магнитного поля соленоида с током. Эту формулу можно рассматривать, как определение индуктивности $L$, если энергию $W$ удастся найти другим способом. Этот способ будет рассмотрен подробнее чуть позже.

Формулу $W = \frac{LI^2}{2}$ нужно помнить к экзамену без ее вывода.

В системе СГС Гаусса: $W = \frac{LI^2}{2c^2}$.

## Энергия магнитного поля.

$$W = \sum_{k,i} \frac{L_{ki} I_k I_i}{2} \quad => \quad W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i \quad => \quad W = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{A}, \vec{j}\right) dV \quad =>$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{V=\infty} \left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right]\right) dV \quad => \quad W = \int_{V=\infty} \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2} dV \quad =>$$

$$w = \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2} \qquad \text{и} \qquad dw = \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$$

Это та же магнитная энергия токов, только выраженная через поле, а не через токи.

$$W = \sum_{k,i} \frac{I_k I_i L_{ki}}{2} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \left(\sum_i L_{ki} I_i\right) = \frac{1}{2}\sum_k I_k \left(\sum_i \Phi_{ki}\right) = \frac{1}{2}\sum_k I_k \Phi_k$$

Подставим сюда полученное раньше выражение для потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right)$ и получим

$$W = \frac{1}{2}\sum_k I_k \oint\limits_{l_k} \left(\vec{A}, d\vec{l}_k\right).$$

Заменим здесь элемент тока $Id\vec{l}$ на $\vec{j}dV$, тогда

$$W = \frac{1}{2}\sum_k \int\limits_{V_k} \left(\vec{A}, \vec{j}_k\right) dV_k \qquad =>$$

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\vec{A}, \vec{j}\right) dV .$$

Подставим сюда плотность токов проводимости $\vec{j}$ из равенства $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$, откуда $\vec{j} = \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right]$. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\vec{A}, \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right]\right) dV .$$

Возьмем интеграл по частям. Перебросим производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя $\vec{H}$ на другой $\vec{A}$ и получим

$$W = \frac{1}{2}\oint\limits_S \left(\vec{A}, \left[d\vec{S}, \vec{H}\right]\right) - \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\underline{\vec{A}}, \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right]\right) dV$$

Здесь в правом интеграле производную $\vec{\nabla}$ нужно брать от подчеркнутого выражения $\vec{A}$. Левый интеграл по поверхности стремится к нулю при стремлении объема, ограниченного поверхностью, к бесконечности. В правом интеграле поменяем местами сомножители векторного произведения с изменением знака интеграла и сделаем циклическую перестановку векторов в смешанном скалярно векторном произведении. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{V=\infty} \left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right]\right) dV$$

Здесь $\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = rot\left(\vec{A}\right) = \vec{B}$, тогда

$W = \int\limits_{V=\infty} \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2} dV$ — энергия магнитного поля. Эту формулу нужно знать к экзамену, но ее вывод помнить не нужно.

Тогда $w = \dfrac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}$ — объемная плотность энергии магнитного поля.

В изотропной среде $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ и $w = \dfrac{\mu_0 \mu H^2}{2}$.

В самом общем случае нелинейной или гистерезисной зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ справедлива следующая формула (без доказательства)

$$dw = \left(\vec{H}, d\vec{B}\right).$$

В системе СГС Гаусса: $w=\dfrac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$ и $dw=\dfrac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$.

$$\oint_S \xrightarrow[V\to\infty]{} 0.$$

Докажем, что $\oint_S \left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0$.

Пусть $S$ — сфера с очень большим радиусом. Тогда из любой точки на поверхности $S$ все токи выглядят, как один точечный магнитный диполь. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} H \sim \dfrac{1}{r^3} \\ A \sim \dfrac{1}{r^2} \\ S \sim r^2 \end{array}\right\} \quad => \quad \oint_S \sim \frac{1}{r^3} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

## Строгое определение индуктивности.

$$W = \frac{LI^2}{2} = \int\limits_{V=\infty} \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{2} dV \qquad =>$$

$L \equiv \dfrac{1}{I^2} \int\limits_{V=\infty} \left(\vec{B},\vec{H}\right)\cdot dV$ — индуктивность контура $L$ не зависит от величины тока $I$ в контуре, так как магнитные поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ пропорциональны току $I$.

Аналогично можно определить коэффициент взаимной индукции:

$L_{ki} \equiv \dfrac{1}{I_i I_k} \int\limits_{V=\infty} \mu_0 \mu \left(\vec{H}_k,\vec{H}_i\right)\cdot dV$, где $\vec{H}_k$ и $\vec{H}_i$ — напряженности магнитного поля, создаваемые токами в $k$-м и $i$-м контурах.

## Сравнение формул для энергии электрического и магнитного полей.

| Электричество | Магнетизм |
| --- | --- |
| $W = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum\limits_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \dfrac{q_k q_i}{r_{ki}}$ (в вакууме) | $W = \sum\limits_{k,i} \dfrac{L_{ki} I_k I_i}{2}$ |

$$\frac{1}{r_{ki}} = \frac{1}{\left|\vec{r}_k - \vec{r}_i\right|}$$

$$L_{ki} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{l_k} \oint\limits_{l_i} \frac{\left(d\vec{l}_k, d\vec{l}_i\right)}{\left|\vec{r}_k - \vec{r}_i\right|}$$ (в вакууме)

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

(сумма по свободным зарядам)

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i$$

(сумма по токам проводимости)

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho \varphi \, dV$$

(по свободным зарядам)

$$W = \frac{1}{2} \int\limits_V \left(\vec{j}, \vec{A}\right) dV$$

(по токам проводимости)

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$$

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

$$w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2}$$

$$w = \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}$$

$$dw = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$$

$$dw = \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$$

## **Гипотеза Максвелла о токах смещения.**

Не путайте токи смещения со связанными токами намагниченных сред.

Рассмотрим дивергенцию равенства $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$.

Дивергенция левой части равенства равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right]\right) = \left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right]\right) = 0$.

Дивергенция правой части равенства $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$ не равна нулю при $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$:

$div\left(\vec{j}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.

Чтобы обобщить равенство $rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j}$ на случай $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ можно предположить, что

$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \vec{X}$, где $\vec{X}$ — необходимая поправка к уравнению магнитостатики.

$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \vec{X}$ =>

$0 = div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = div\left(\vec{j} + \vec{X}\right) = div\left(\vec{j}\right) + div\left(\vec{X}\right)$.

Учтем, что $div\left(\vec{j}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и получим

$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\vec{X}\right)$

Учтем теперь, что $\rho = div\left(\vec{D}\right)$ и получим

$$0 = -\frac{\partial\left(div\left(\vec{D}\right)\right)}{\partial t} + div\left(\vec{X}\right) = div\left(\vec{X} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad .$$

Из того, что дивергенция некоторого поля равна нулю, вовсе не следует, что само поле равно нулю. Например, $div\left(\vec{B}\right) = 0$ не означает равенства нулю магнитного поля $\vec{B}$.

Максвелл сделал предположение, что $\vec{X} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ =>

$\vec{X} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, которое не обязательно следует из того, что $div\left(\vec{X}\right) = div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$.

Таким образом Максвелл получил:

$$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Максвелл ввел понятие токов смещения $\vec{j}_{см} \equiv \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, тогда

$$rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \vec{j}_{см}$$

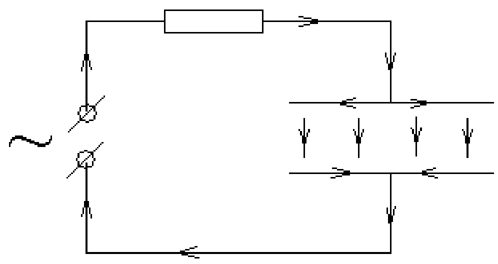
Токи смещения, потому что они выражаются через вектор электрического смещения $\vec{D}$. Аналогично $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ — ЭДС индукции выражается через вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

--------

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \vec{j}_{см} \\ div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = 0 \end{cases} \quad => \quad div\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right) = 0 \quad => \quad \Phi_{\vec{j}+\vec{j}_{см}} = 0 \quad —$$

поток вектора $\vec{j} + \vec{j}_{см}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Тогда линии суммы токов проводимости и токов смещения замкнуты (не рвутся).

Например, в следующей схеме линии токов проводимости замыкаются линиями токов смещения внутри конденсатора.




## <u>Система уравнений Максвелла.</u>

(основной вопрос курса)

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

— система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Для решения задач обычно удобнее использовать те же уравнения Максвелла только в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right)=Q \\ \oint\limits_l E_l dl=-\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=0 \\ \oint\limits_l H_l dl=I+\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{D},d\vec{S}\right) \end{cases}$$

Прокомментируем каждое из 4-х уравнений.

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D=Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема не может быть доказана, но Максвелл предположил, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла половины закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд}=-\dfrac{d\Phi_B}{dt}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Заметим, что закон Фарадея содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl=-\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ содержит частную производную от потока $\Phi_B=\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)$ по времени. Дело в том, что изменение потока при перемещении контура дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд}=\mathcal{E}\equiv\oint\limits_l\left(\vec{E}_{стор},d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца $\vec{F}_Л$, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью $\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_Л}{q} = \left[\vec{V}, \vec{B}\right]$, но перемещение контура никак не влияет на циркуляцию $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ поля $\vec{E}$. Отличная от нуля циркуляция поля $\vec{E}$ появляется только при изменении магнитного поля $\vec{B}$, поэтому вклад в циркуляцию поля $\vec{E}$ дает только частная производная по времени от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ при неизменных координатах, а изменение потока при перемещении контура в клад в циркуляцию поля $\vec{E}$ не дает.

Конец факультативной вставки.

Третье уравнение $\Phi_B = 0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $\oint\limits_l H_l dl = I + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла.

Чтобы систему уравнений Максвелла имело смысл решать относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить их так называемыми материальными связями:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В некоторых случаях уравнения можно дополнить законом Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, если он выполнятся, и если токи не заданы явным образом, например, в пучке электронов в вакууме.

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$

В системе СГС Гаусса: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = \lambda \vec{E} \end{cases}.$

Факультативная вставка.

Система уравнений Максвелла избыточна. В ней есть лишние уравнения.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{E},0\right)=0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении $\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0=div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=div\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right) \qquad =>$$

$\dfrac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right)=0 \qquad => \qquad div\left(\vec{B}\right)=const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ в каждой точке пространства не изменяется во времени.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right)=0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно

$$div\left(\vec{B}\right)=0.$$

Аналогично взяв дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ с учетом равенства $div\left(\vec{j}\right)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ можно получить, что

$$div\left(\vec{D}\right)=\rho.$$

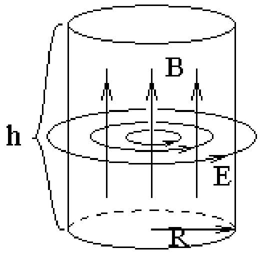
<u>Конец факультативной вставки.</u>

## <u>Токи Фуко.</u>

Токи Фуко — это те же токи индукции только в сплошном проводнике, а не в проводящем контуре, как обычные токи индукции.

Рассмотрим проводящий цилиндр в однородном переменном магнитном поле $B=B_0\cdot\cos\left(\omega t\right)$, которое направлено вдоль оси цилиндра.

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля




$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad <=> \qquad \oint\limits_{l} E_l dl = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad =>$$

$$E \cdot 2\pi r = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r^2 B\right) \qquad =>$$

$$E = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial\left(B_0 \cdot \cos\left(\omega t\right)\right)}{\partial t} = \frac{B_0 \omega}{2} r \sin\left(\omega t\right) \qquad =>$$

$$E = \frac{B_0 \omega}{2} r \sin\left(\omega t\right).$$

Это электрическое поле вызывает токи Фуко

$$j = \lambda E = \frac{\lambda B_0 \omega}{2} r \sin\left(\omega t\right).$$

В системе СГС Гаусса: $j = \lambda E = \dfrac{\lambda B_0 \omega}{2c} r \sin\left(\omega t\right)$.

--------

Интересно рассмотреть среднюю мощность ленц-джоулева тепла, идущего на нагрев цилиндра.

Пусть $\left\langle \nu \right\rangle$ — среднее по времени и по объему значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла.

$\nu = \left(\vec{j}, \vec{E}\right) = \lambda E^2 = \dfrac{\lambda \omega^2 B_0^2}{4} r^2 \sin^2\left(\omega t\right)$ — объемная плотность мощности в соответствии с законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Усреднение по времени сомножителя синус в квадрате дает: $\left\langle \sin^2\left(\omega t\right) \right\rangle_t = \dfrac{1}{2}$. И действительно, $\sin$ и $\cos$ отличаются только сдвигом фаз на $\dfrac{\pi}{2}$, тогда средние значения их квадратов равны, а сумма средних значений квадратов равна единице, так как $\sin^2\left(\omega t\right) + \cos^2\left(\omega t\right) = 1$.

Тогда

$\left\langle \nu \right\rangle_t = \dfrac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8} r^2$ — среднее по времени значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла. Осталось усреднить эту величину по объему цилиндра.

$$\langle \nu \rangle = \int_V \langle \nu \rangle_t \frac{dV}{V} = \frac{\int_V \langle \nu \rangle_t \, dV}{V}$$

Для вычисления интеграла мысленно разобьем объем цилиндра цилиндрическими поверхностями с близкими радиусами, тогда

$$\int_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \int_0^R \langle \nu \rangle_t \cdot h \cdot 2\pi r \, dr = \int_0^R \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8} r^2 \cdot h \cdot 2\pi r \, dr =$$

$$= \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16} R^4 \qquad =>$$

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{V} \int_V \langle \nu \rangle_t \, dV = \frac{1}{h \cdot \pi R^2} \cdot \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16} R^4 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{16} R^2 \sim R^2 \qquad =>$$

чем больше радиус цилиндра $R$, тем сильнее нагрев в единице объема.

Качественно такой результат можно объяснить тем, что в случае большого радиуса цилиндра токам Фуко есть, где разбежаться.

--------

Железный сердечник трансформатора делают наборным из большого числа тонких пластин, чтобы уменьшить потери на нагрев сердечника токами Фуко.

Дело в том, что если в первичную обмотку трансформатора подать переменное напряжение, то в сердечнике возникает переменное магнитное поле и токи Фуко.

В наборном сердечнике им трудно разбежаться.

В системе СГС Гаусса: $\langle \nu \rangle = \frac{\lambda {B_0}^2 \omega^2}{16 c^2} R^2$.

## **Вектор Пойнтинга.**

(вектор Умова — Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw_э = d\left(\frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) + \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)\right\}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине.
Факультативная вставка.
И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика
$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$ => $D_k = \sum_i \varepsilon_{ki} E_i$ =>

$$\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \sum_k D_k dE_k = \sum_k \left( \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \right) dE_k = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki} E_i dE_k$$

$$\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d\left( \sum_k \varepsilon_{ik} E_k \right) = \sum_{k,i} \varepsilon_{ik} E_i dE_k$$

С учетом $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$ получаем $\left(\vec{D}, d\vec{E}\right) = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$.
Конец факультативной вставки.
Тогда

$$dw_э = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right).$$

Аналогично для энергии магнитного поля $dw_м = \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$.

$dw = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$ — изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем исходная формула $w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{2} + \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{2}$. Формула $dw = \left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$ справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда $\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$, куда в правую часть производные по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = rot\left(\vec{H}\right) - \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -rot\left(\vec{E}\right) \end{cases} \quad =>$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right) - \vec{j}\right) + \left(\vec{H}, -rot\left(\vec{E}\right)\right) \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right) - \left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) + \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right) \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{E},\vec{j}\right)-\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{H}}\right]\right)+\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{E}}\right]\right)$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$.

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{E}},\vec{H}\right]\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\underline{\vec{H}}\right]\right).$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной $\vec{\nabla}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$\underline{-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)}$, где $\underline{\vec{S}\equiv\left[\vec{E},\vec{H}\right]}$ — вектор Пойнтинга. Эти два равенства нужно помнить к экзамену.

Из равенства $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ виден физический смысл вектора Пойнтинга $\vec{S}$. Чтобы его понять рассмотрим объем, в котором нет потерь на ленц-джоулево тепло, то есть $\left(\vec{j},\vec{E}\right)=0$. Тогда получим равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$. Рассмотрим другое, но очень похожее равенство $\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\left(\vec{j}\right)=0$. Это равенство следует, из закона сохранения заряда. Если объемная плотность заряда уменьшается, то заряд вытекает из объема, так что $\vec{j}$ — плотность потока заряда, то есть заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току заряда. Равенство $\frac{\partial w}{\partial t}+div\left(\vec{S}\right)=0$ с учетом закона сохранения энергии можно прочитать аналогично. Если объемная плотность энергии уменьшается, то энергия вытекает из объема, так что $\vec{S}$ — плотность потока энергии, то есть энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току энергии.

В системе СГС Гаусса: $\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Равенство $-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\vec{S}\right)$ можно уточнить с учетом возможного присутствия батареек или аккумуляторов со сторонними силами с напряженностью $\vec{E}_{стор}$.

Рассмотрим закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил:

$$\nu = \left(\vec{j},\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right) \quad => \quad \left(\vec{j},\vec{E}\right) = \nu - \left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) \quad =>$$

$$\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) - \frac{\partial w}{\partial t} = \nu + div\left(\vec{S}\right)$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i - \frac{\partial W}{\partial t} = N + \oint_S \left(\left[\vec{E},\vec{H}\right], d\vec{S}\right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуются на нагрев (ленц-джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь $\mathcal{E}_i$ — любые другие ЭДС (батарейки, аккумуляторы), кроме ЭДС индукции, работа которых добавляется к уменьшению энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы также следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

Заметим, что для одного фотона

$$\left.\begin{aligned} W &= mc^2 \\ p &= mc \end{aligned}\right\} \quad => \quad p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Из равенств $\begin{cases} \vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right] \\ p = \dfrac{W}{c} \end{cases}$ следует, что

$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{c}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — плотность потока импульса.

<u>Конец факультативной вставки.</u>