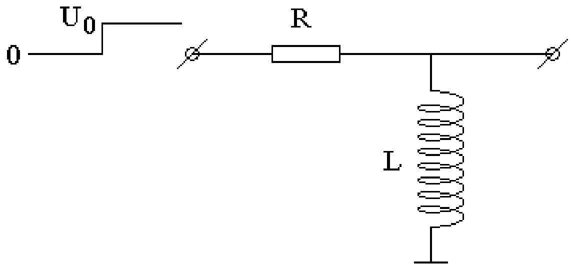
## Пример 2. Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения.




Пусть резистор и катушка индуктивности включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной $U_0$. Нужно найти напряжение на катушке индуктивности, как функцию времени.

Рассмотрим уравнение $\sum\limits_i \mathcal{E}_i = \sum\limits_i U_i$ для единственного контура. Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения $U_0 = RI + L\dot{I}$ =>

$\dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}$ — неоднородное дифференциальное уравнение для тока.

Ищем его частное решение в виде константы $I = const$ => $\dot{I} = 0$ =>

$\frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}$ => $I = \frac{U_0}{R}$ — частое решение неоднородного уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение:

$\dot{I} + \frac{R}{L}I = 0$.

Ищем его решение в виде $I = Ae^{\lambda t}$. Подставим его в уравнение $\dot{I} + \frac{R}{L}I = 0$ и получим характеристическое уравнение

$\lambda + \frac{R}{L} = 0$ => $\lambda = -\frac{R}{L}$ =>

$I = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение однородного уравнения. Тогда

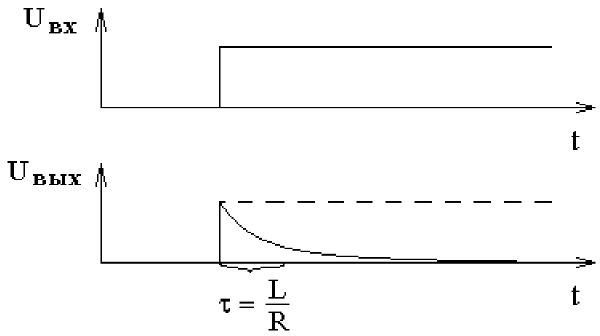
$I = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ — общее решение неоднородного уравнения.

Произвольную константу интегрирования $A$ находим из условия $I_L(0) = 0$

=> $0 = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}\cdot 0}$ => $A = -\frac{U_0}{R}$ =>

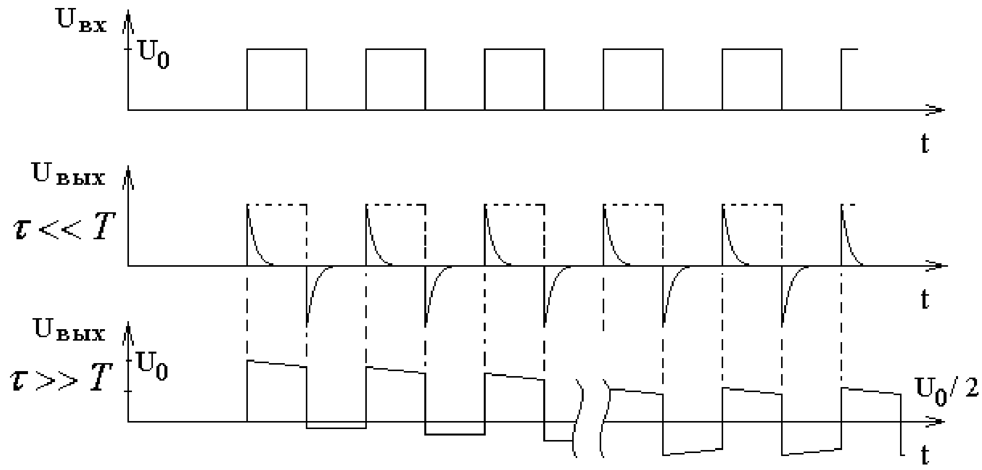
$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad =>$$

$$U_{вых} = L\dot{I} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$




<u>Факультативная вставка.</u>

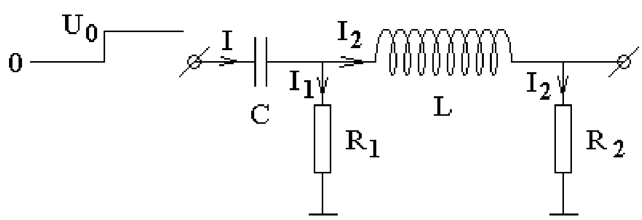
Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов, то




Здесь $T$ — период прямоугольников, $\tau = \frac{L}{R}$ — постоянная времени $RL$-цепочки.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

## **Пример 3.**



На схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения с амплитудой $U_0$. Нужно найти напряжение на выходе схемы, как функцию времени.

Для трех неизвестных токов $I$, $I_1$, $I_2$ напишем два уравнения Кирхгофа для контуров и одно уравнение для узла:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1, \\ I = I_1 + I_2 \end{cases}$$

Здесь $I$ — входной ток схемы, $I_1$ — сила тока через сопротивление $R_1$, $I_2$ — сила тока через катушку индуктивности $L$ и сопротивление $R_2$.

$I = \dot{q}$, где $q$ — заряд на конденсаторе.

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{q}{C} + R_1 I_1 \\ 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ \dot{q} = I_1 + I_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы в ответе получить напряжение на выходе схемы нам понадобиться узнать только ток $I_2$. Поэтому нам будет удобно выражать и подставлять в другие уравнения другие неизвестные: $q$ и $I_1$. Переменную $I_1$ можно выразить из любого из трех уравнений, а переменную $q$ можно выразить только из первого уравнения. Вот и выразим $q = CU_0 - R_1 C I_1$.

Подставим в оставшиеся уравнения и получим

$$\begin{cases} 0 = L\dot{I}_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 \\ -R_1 C\dot{I}_1 = I_1 + I_2 \end{cases}.$$

Теперь $I_1$ можно выразить только из нового первого (бывшего второго) уравнения $I_1 = \dfrac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \dfrac{R_2}{R_1} I_2$. Тогда получим дифференциальное уравнение для единственной переменной $I_2$

$$-LC\ddot{I}_2 - R_2 C\dot{I}_2 = \frac{L}{R_1}\dot{I}_2 + \frac{R_2}{R_1} I_2 + I_2 \qquad =>

$$\ddot{I}_2+\left(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C}\right)\cdot\dot{I}_2+\frac{R_1+R_2}{R_1LC}\cdot I_2=0$$

Подставим сюда $I_2=Ae^{\lambda t}$ и получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\left(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C}\right)\lambda+\frac{R_1+R_2}{R_1LC}=0.$$

Его решения имеют вид:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R_2}{L}+\frac{1}{R_1C}\right)^2-\frac{R_1+R_2}{R_1LC}}.$$

Общее решение дифференциального уравнения для тока $I_2$ имеет вид

$$I_2=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}.$$

Произвольные константы интегрирования $A_1$ и $A_2$ можно найти из условий: $\begin{cases} q(0)=0 \\ I_2(0)=0 \end{cases}$. Чтобы найти $A_1$ и $A_2$ нам нужно знать $I_2$ и $\dot{I}_2$ в нулевой момент времени. Подставим $q(0)=0$ в первое уравнение системы (1) и получим $I_1(0)=\frac{U_0}{R_1}$. Подставим это значение и $I_2(0)=0$ во второе уравнение системы (1) и получим $0=L\dot{I}_2(0)+0-U_0$. Откуда $\dot{I}_2(0)=\frac{U_0}{L}$. Тогда

$$\begin{cases} I_2(0)=0 \\ \dot{I}_2(0)=\frac{U_0}{L} \end{cases}.$$

Подставим в эти условия общее решение $I_2=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$ для $I_2$ и получим

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ \lambda_1A_1+\lambda_2A_2=\frac{U_0}{L} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} A_1=\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)} \\ A_2=-\frac{U_0}{L\cdot(\lambda_1-\lambda_2)} \end{cases}$$

Подставим эти значения произвольных констант интегрирования в общее решение $I_2=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$ и получим

$$I_2=\frac{U_0}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\cdot\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right) \quad =>$$

$$U_{вых}=R_2I_2=\frac{R_2U_0}{L(\lambda_1-\lambda_2)}\cdot\left(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}\right)$$

Заметим, что $U_{вых}(t)$ — вещественная функция даже при комплексных $\lambda_1$ и $\lambda_2$, так как в этом случае $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — комплексно сопряженные величины.

Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ вещественные, то напряжение на выходе схемы — разность двух затухающих экспонент. Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ комплексные, то напряжение на выходе схемы — произведение затухающей экспоненты на синусоиду.

## Реакция произвольной линейной схемы на ступеньку напряжения

(на функцию Хевисайда).

Постановка задачи. Внешний источник подает на схему ступеньку напряжения в нулевой момент времени. Найти токи и напряжения на элементах схемы, как функции времени.

Этапы решения задачи:

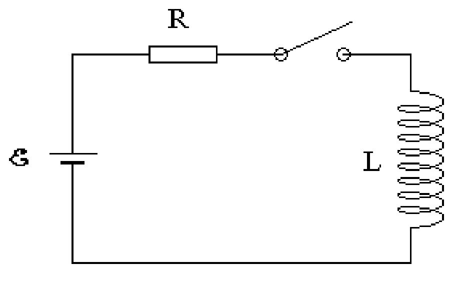
1. Внешний источник напряжения рассмотрим, как ЭДС, зависящую от времени.
2. Напишем уравнения Кирхгофа 1-го и 2-го рода, которые окажутся дифференциальными уравнениями для токов.
3. Исключая переменные, перейдем от системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка.
4. Решим это уравнение, а затем через его решение найдем все токи.
5. Зная токи, найдем напряжения на всех элементах схемы.
6. Произвольные константы интегрирования обычно можно найти из условий:

$U(0)=0$ для каждого конденсатора, так как заряд конденсатора в нулевой момент времени не может измениться скачком. Такое изменение означало бы бесконечную силу тока.

$I(0)=0$ для каждой катушки индуктивности, так как ток катушки в нулевой момент времени не может измениться скачком. Такое изменение тока означало бы бесконечное напряжение на катушке.

## Экстраток размыкания.

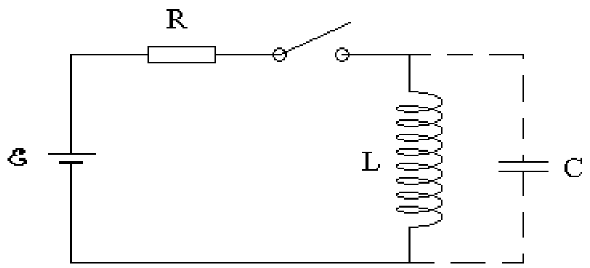
Рассмотрим схему, в которой последовательно включены постоянная ЭДС $\mathcal{E}$, резистор $R$, ключ и катушка индуктивности $L$.



Ключ долгое время был замкнут, и в цепи установился ток $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, потому что для постоянного тока напряжение на индуктивности $U_L = L\dot{I}$ равно нулю.

При размыкании ключа ток в индуктивности должен скачком измениться до нуля, при этом производная от тока по времени обращается в бесконечность, и на индуктивности возникает бесконечное напряжение $U_L = L\dot{I}$. Это напряжение пробивает ключ. Напряженность пробоя $E_0 = 30$ кВ/см. Ток, возникающий во время пробоя ключа, называют экстратоком размыкания.

Чтобы оценить, при каких условиях наступает пробой ключа в реальной схеме, нужно учесть паразитные емкости между витками катушки индуктивности. Объединяя эти последовательные включенные емкости, можно считать, что параллельно катушке индуктивности включен конденсатор с очень малой емкостью $C$.




После размыкания ключа в контуре из индуктивности и емкости возникают электрические колебания. В начальный момент в катушке течет ток $I_{max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Напряжение на катушке, как и на конденсаторе почти нулевое. В катушке индуктивности при этом запасена энергия магнитного поля. Ток катушки заряжает конденсатор. При максимальном напряжении на конденсаторе ток равен нулю, и вся энергия превращается в энергию электрического поля конденсатора. Тогда

$$\frac{LI_{max}^2}{2} = \frac{CU_{max}^2}{2} \quad => \quad U_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_{max}.$$

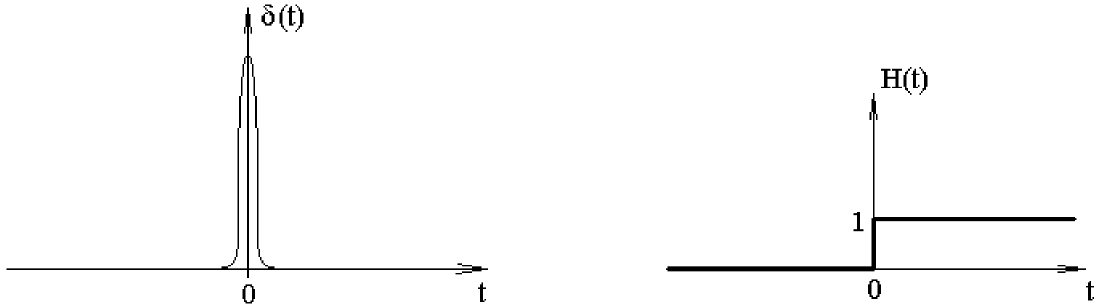
Емкость $C$ — мала, следовательно, $U_{max}$ — велико; $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ — так называемое волновое сопротивление колебательного контура, $I_{max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

## <u>Напряжение на выходе линейной схемы при произвольной зависимости напряжения на входе схемы от времени.</u>

Единичная ступенька напряжения в нулевой момент времени или функция Хевисайда $H(t)$ связана с дельта-функцией Дирака $\delta(t)$ соотношениями:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' \qquad <=> \qquad \delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}$$

Напомним, что дельта-функция Дирака — это очень узкий и одновременно очень высокий пик вначале координат, площадь под графиком которого равна единице $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.




Рассмотрим какую-либо конкретную линейную схему. Если напряжение на входе — единичная ступенька $U_{вх}(t) = H(t)$, то мы умеем решать такую задачу.

Пусть ее решение — некоторая функция $F(t)$: $\qquad U_{вых}(t) = F(t)$

Схема линейная, поэтому если

$U_{вх}(t) = \delta(t) = \dfrac{dH(t)}{dt}$, то

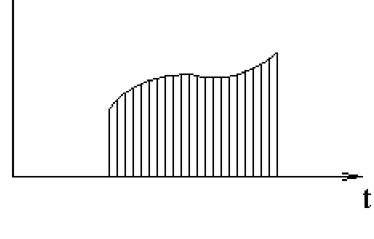
$U_{вых}(t) = \dfrac{dF(t)}{dt} \equiv G(t)$ — функция Грина для данной задачи.

Функция Грина — отклик на дельта-функцию Дирака. В нашем случае — отклик электрической схемы на дельта-функцию Дирака на входе схемы.

Если $U_{вх}(t) = \delta(t - t_0)$, то $U_{вых}(t) = G(t - t_0)$.

--------

Произвольная зависимость напряжения на входе схемы может быть представлена интегралом, как большая сумма узких прямоугольников, каждый из которых похож на дельта-функцию Дирака с некоторым весом.



Рассмотрим один из прямоугольников около точки $t = t_0$. Высота прямоугольника $U_{вх}(t_0)$, ширину обозначим, как $dt_0$. Тогда площадь прямоугольника $U_{вх}(t_0)dt_0$. Площадь под дельта-функцией равна единице, следовательно, рассматриваемый прямоугольник, как функция времени $t$ примерно равен $U_{вх}(t_0)dt_0\,\delta(t - t_0)$.

Вся функция $U_{вх}(t)$ может быть представлена, как сумма таких прямоугольников:

$$U_{вх}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\,\delta(t - t_0)\,dt_0$$

Если напряжение на входе — сумма дельта функций $\delta(t - t_0)$, то напряжение на выходе — сумма функций Грина $G(t - t_0)$ с теми же весовыми множителями $U_{вх}(t_0)dt_0$:

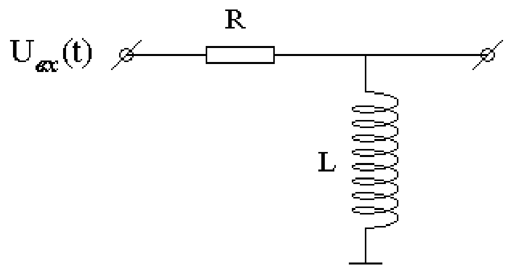
$$U_{вых}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_{вх}(t_0)\,G(t - t_0)\,dt_0 .$$

Это и есть решение для напряжения на выходе схемы $U_{вых}(t)$ при произвольной зависимости входного напряжения $U_{вх}(t)$ от времени.

Здесь $G(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}$, где $F(t)$ — реакция схемы на единичную ступеньку напряжения на входе $U_{вх}(t) = H(t)$.

--------

Рассмотрим, например, реакцию $RL$-цепочки на единичную ступеньку напряжения:




Как мы выяснили раньше в вопросе "Реакция $RL$-цепочки на ступеньку напряжения" напряжение на выходе схемы для единичной ступеньки на входе:

$$F(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot H(t) \qquad => \qquad G(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot H(t),$$

— функция Грина для данной задачи, полученная как производная от произведения.

Следовательно

$$U_{вых}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{вх}(t_0)\left\{\delta(t-t_0)-\frac{R}{L}\,e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}H(t-t_0)\right\}dt_0\,.$$

Интеграл распадается на сумму двух интегралов, первый из которых можно взять в явном виде, а во втором оставить пределы интегрирования только по области, в которой отлична от нуля функция Хевисайда, и сделать замену переменной интегрирования $t'=t-t_0$. Тогда

$$U_{вых}(t)=U_{вх}(t)-\frac{R}{L}\int\limits_{0}^{+\infty}U_{вх}(t-t')\,e^{-\frac{R}{L}t'}\,dt'.$$

## **Комплексные токи и напряжения.**

Комплексные токи и напряжения вводят для рассмотрения гармонически изменяющихся токов и напряжений. Комплексные токи и напряжения позволяют заменить дифференциальные уравнения Кирхгофа для токов комплексными алгебраическими уравнениями Кирхгофа.

Рассмотрим вещественное напряжение:

$U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_0)$, где $U_0$ — вещественная амплитуда, $\omega$ — циклическая частота, $\varphi_0$ — начальная фаза.

Будем называть соответствующим комплексным напряжением величину:

$\widetilde{U}(t)=U_0\,e^{i(\omega t+\varphi_0)}$, где волной сверху $\widetilde{U}$ будем обозначать, что величина комплексная.

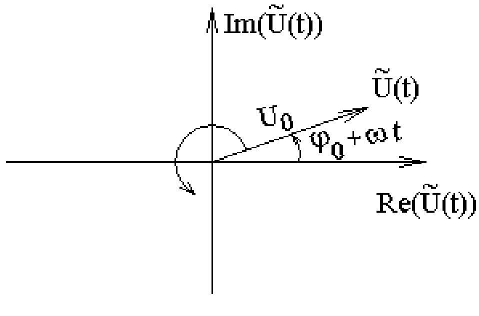
Тогда $\quad U(t)=\mathrm{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)$

$\widetilde{U}=U_0\,e^{i(\omega t+\varphi_0)}=U_0\,e^{i\varphi_0}\,e^{i\omega t}=\widetilde{U}_0\,e^{i\omega t}$, где

$\widetilde{U}_0\equiv U_0\,e^{i\varphi_0}$ — комплексная амплитуда напряжения, $U_0$ — вещественная амплитуда, $\varphi_0$ — начальная фаза или фаза в нулевой момент времени.

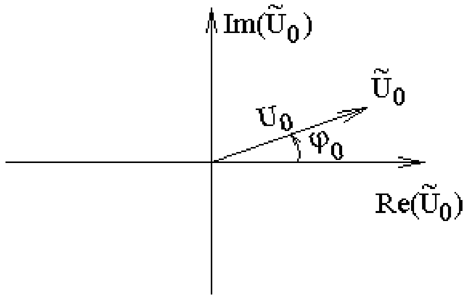
$\widetilde{U}(t)=\widetilde{U}_0\,e^{i\omega t}$

Гармонически изменяющееся напряжение можно изобразить на комплексной плоскости напряжений.




Напряжение, которое есть на самом деле, — это вещественное напряжение равное проекции комплексного напряжения на вещественную ось $\mathrm{Re}\left(\widetilde{U}(t)\right)=U(t)$.

Комплексная амплитуда напряжения тоже может быть изображена на комплексной плоскости — плоскости комплексных амплитуд. В отличие от комплексного напряжения комплексная амплитуда не изменяется во времени и не вращается на комплексной плоскости.




Аналогично комплексным напряжениям вводятся комплексные токи.

$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi_0)$ — вещественный ток.

$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \psi_0)}$ — соответствующий ему комплексный ток.

$I(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{I}(t)\right)$

$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \psi_0)} = I_0 e^{i\psi_0} e^{i\omega t} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ =>

$\tilde{I}_0 \equiv I_0 e^{i\psi_0}$ — комплексная амплитуда тока, $I_0$ — вещественная амплитуда тока, $\psi_0$ — начальная фаза тока или фаза в нулевой момент времени.

$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$

## Эффективное напряжение.

Эффективное значение периодического переменного напряжения любой формы равно по величине постоянному напряжению, которое также нагревает резистор, как и рассматриваемое переменное напряжение.

Мощность Ленц-Джоулева тепла $N = \dfrac{U^2}{R}$. Согласно определению эффективного напряжения

$$\langle N \rangle = \left\langle \frac{U^2}{R} \right\rangle = \frac{U_{эфф}^2}{R} \quad =>$$

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle.$$

Аналогично для тока $N = I^2 R$ => $\langle N \rangle = \left\langle I^2 R \right\rangle = I_{эфф}^2 R$ =>

$$I_{эфф}^2 \equiv \left\langle I^2(t) \right\rangle.$$

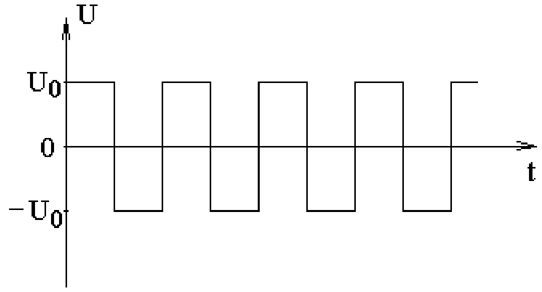
Для гармонически изменяющихся напряжений $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle = U_0^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\rangle = U_0^2 \, \frac{1}{2} \quad =>$$

$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично для гармонически изменяющегося тока: $I_{эфф} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

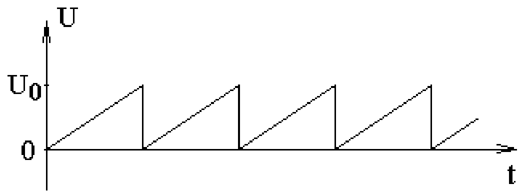
Рассмотрим напряжение (или ток) в форме меандра — прямоугольных импульсов со скважностью равной двум $\dfrac{T}{\tau} = 2$, где $T$ — период, $\tau$ — длительность импульса положительной полярности.




Для меандра:

$$U_{эфф}^2 \equiv \left\langle U^2(t) \right\rangle = \left\langle U_0^2 \right\rangle = U_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad U_{эфф} = U_0.$$

Для пилообразного напряжения




$$U_{эфф}^2 = \left\langle U^2(t) \right\rangle = \int_0^T U^2(t)\frac{dt}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(U_0 \frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{U_0^2}{T^3}\int_0^T t^2 dt = \frac{U_0^2}{3} \qquad \Rightarrow$$

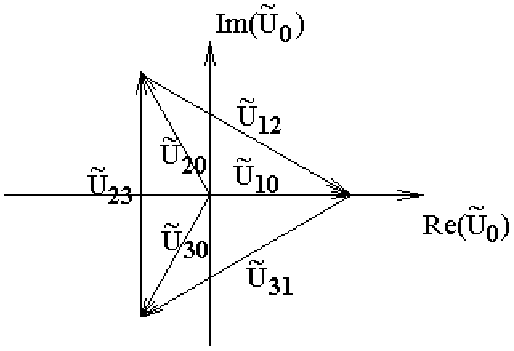
$$U_{эфф} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$$

Бытовое напряжение сети переменного тока 220 Вольт — это эффективное значение напряжения.

## Трехфазное напряжение.

Трехфазное напряжение обычно выводится на специальный трехфазный электрический щит с четырьмя клеммами. На три клеммы подано напряжение трех фаз относительно общего провода, который подключен к четвертой клемме. Где-то далеко от щита нулевой провод соединен с землей, то есть заземлен.

Напряжение каждой из трех фаз имеет одинаковую амплитуду, но эти напряжения сдвинуты по фазе на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ друг относительно друга. На следующем рисунке изображена плоскость комплексных амплитуд.




Здесь три вектора из начала координат — это комплексные амплитуды трех фаз. Эти векторы развернуты друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{3}$. Концы этих трех векторов связаны еще тремя векторами — комплексными амплитудами напряжений между фазами.

Из рисунка видно, что амплитуда напряжения между фазами $\left|\tilde{U}_{23}\right|$, $\left|\tilde{U}_{12}\right|$, $\left|\tilde{U}_{31}\right|$ в $\sqrt{3}$ больше, чем амплитуда напряжения одной фазы $\left|\tilde{U}_{10}\right|$, $\left|\tilde{U}_{20}\right|$, $\left|\tilde{U}_{30}\right|$.

Подключаясь к клеммам трехфазного электрического щитка можно использовать всё трехфазное напряжение или напряжение между двумя фазами (между клеммами двух фаз) или напряжение одной фазы (между клеммой фазы и клеммой общего провода).

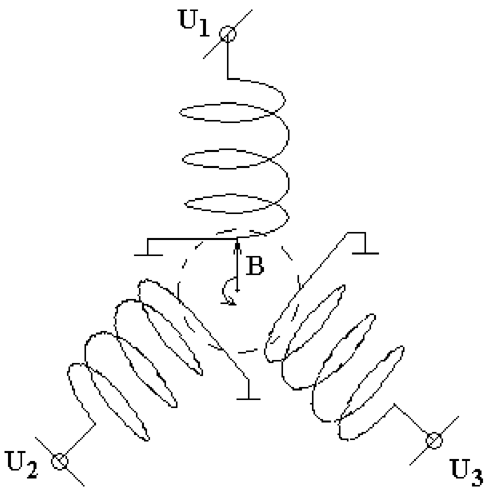
Для трехфазной сети переменного тока есть два стандарта.

1). Сеть 220/127 Вольт. Это сеть с эффективным напряжением 127 Вольт каждой фазы относительно нулевого провода. Эффективное напряжение между фазами —220 Вольт. Бытовые приборы в такой сети включаются между двумя фазами.

2). Сеть 380/220 Вольт. В этой сети эффективное напряжение каждой фазы — 220 Вольт, напряжение между фазами — 380 Вольт. Бытовые приборы включаются между фазой и нулевым проводом.

## Асинхронный трехфазный электродвигатель.

Двигатель имеет три неподвижных статорных обмотки, на которые подают три фазы трехфазного напряжения.




В пунктирной области между обмотками образуется вращающееся магнитное поле $\vec{B}$, так как магнитное поле достигает максимального значения сначала в одной обмотке, затем во второй, затем в третьей.

В эту область вращающегося магнитного поля помещают ротор электродвигателя. Ротор вращается так, что ось вращения ротора перпендикулярна плоскости рисунка.

На роторе электродвигателя закреплена короткозамкнутая роторная обмотка.

Для простоты будем считать, что роторная обмотка — это один виток провода. Виток ротора расположен перпендикулярно плоскости рисунка, и ось его вращения тоже расположена перпендикулярно плоскости рисунка, так что ось вращения ротора лежит в плоскости его витка.

В области ротора вращается магнитное поле, создаваемое статорными обмотками. Виток ротора стремится поворачиваться за магнитным полем, чтобы сохранять неизменной величину потока магнитного поля $\vec{B}$ через рамку обмотки. Это происходит по правилу Ленца, согласно которому ток индукции в роторной обмотке имеет такое направление, что силы Ампера, действующие на ток индукции, стремятся устранить причину возникновения тока индукции — изменение магнитного потока через рамку роторной обмотки.

Электродвигатель, совершая полезную работу, вращает вал с некоторым усилием. Вращаясь под механической нагрузкой, ротор понемногу отстает от магнитного поля, поэтому двигатель называется асинхронным.