Лекционные демонстрации (7 минут).

Дополнение к теореме Лармора.

Мы доказали, что в магнитном поле электронная оболочка может вращаться с угловой скоростью $\vec{\Omega}=\frac{e}{2m_e}\vec{B}$.

Однако будет ли она раскручиваться при включении магнитного поля?

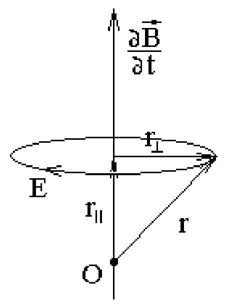
Оказывается, что будет.

Дело в том, что при включении магнитного поля вокруг его производной по времени $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ возникает вихревое электрическое поле $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, которое и раскручивает электронную оболочку.

Для доказательства достаточно доказать, что в системе K', которая вращается с возрастающей угловой скоростью $\vec{\Omega}=\frac{e}{2m_e}\vec{B}$, сила со стороны вихревого электрического поля $\vec{F}'\approx\vec{F}=q\vec{E}$ уравновешивается силой инерции, которая возникает при ускоренном вращении системы K':

$$\vec{F}'_{ин}=-m_e\left[\dot{\vec{\Omega}},\vec{r}\,'\right]=-m_e\left[\frac{e}{2m_e}\dot{\vec{B}},\vec{r}\,'\right]=-\frac{e}{2}\left[\dot{\vec{B}},\vec{r}\,'\right]\approx\frac{e}{2}\left[\vec{r},\dot{\vec{B}}\right]=\frac{e}{2}\left[\vec{r}_{\perp},\dot{\vec{B}}\right].$$

Найдем величину $\vec{E}$ вихревого электрического поля, которое возникает вокруг $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ производной от магнитного поля.



Здесь O — центр атома — атомное ядро, $\vec{r}$ — радиус-вектор электрона, $\vec{r}_{||}$ — составляющая радиус-вектора электрона вдоль производной $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{r}_{\perp}$ — составляющая радиус-вектора электрона перпендикулярная производной $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Вихревое электрическое поле можно найти из уравнения Максвелла $rot\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, которое в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl=-\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}$ следует из закона электромагнитной индукции Фарадея.

Возьмем в качестве контура интегрирования окружность, перпендикулярную производной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dot{\vec{B}}$.

Тогда $2\pi r_\perp E = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r_\perp^2 B\right)$ => $E = -\frac{r_\perp}{2}\dot{B}$ =>

Как видно из рисунка, направление вихревого векторного поля $\vec{E}$ совпадает с направлением векторного произведения, $\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right]$ тогда с учетом $E = -\frac{r_\perp}{2}\dot{B}$ получим

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right].$$

Сила, действующая на электрон с зарядом $q = -e$ со стороны вихревого электрического поля, равна

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} = -\frac{e}{2}\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right] \approx \vec{F}'.$$

Тогда

$\vec{F}' + \vec{F}_{ин}' = 0$ — дополнение к теореме Лармора доказано.

Гиромагнитное отношение.

Гиромагнитное отношение — отношение магнитного момента электрона к его механическому моменту импульса.

Рассмотрим сначала отношение магнитного момента к механическому моменту импульса при движении электрона по окружности вокруг ядра атома.

Магнитный момент импульса:

$$|\vec{m}| = \left|I\vec{S}\right| = I\pi r^2$$

Теперь найдем момент импульса:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m_e\vec{V}\right] \quad => \quad L = rm_eV.$$

Разделим магнитный момент на механический и получим модуль гиромагнитного отношения

$$|\gamma| = \frac{|\vec{m}|}{L} = \frac{I\pi r^2}{rm_eV} = \frac{\pi r I}{m_eV}.$$

Подставим в правую часть равенства $V = \frac{2\pi r}{T}$, где скорость равна отношению длины пути $2\pi r$ ко времени T — к периоду обращения электрона. Тогда

$$|\gamma| = \frac{\pi r I \cdot T}{m_e \cdot 2\pi r} = \frac{IT}{2m_e} = \frac{e}{2m_e},$$

где последнее равенство получено с учетом того, что сила тока $I = \frac{e}{T}$ равна отношению заряда ко времени его прохождения через сечение проводника (в нашем случае — через сечение орбиты электрона).

Момент импульса $\vec{L}$ образует правый винт с направлением движения электрона по орбите. Магнитный момент образует правый винт с направлением тока. Но заряд электрона отрицательный, поэтому ток направлен навстречу движению электрона по орбите. В результате, момент импульса атома и его магнитный момент имеют противоположные направления.

$\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{L}$

Если $\vec{m} = \gamma \vec{L}$ — определение гиромагнитного отношения γ, то гиромагнитное отношение отрицательно

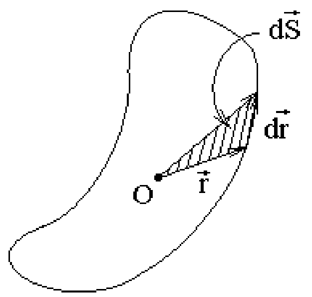
$$\gamma = -\frac{e}{2m_e} < 0.$$

В системе СГС Гаусса: $\gamma = -\frac{e}{2m_e c}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Найдем теперь гиромагнитное отношение в более общем случае движения электронного облака в атоме.

Магнитный дипольный момент для контура с током $\vec{m} = I\vec{S}$. Выразим площадь $\vec{S}$, ограниченную контуром, в виде интеграла.



Из рисунка видно, что $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$, так как вектор площадки $d\vec{S}$ направлен, как и векторное произведение $[\vec{r}, d\vec{r}]$, а длина вектора $dS = |d\vec{S}|$ равна площади заштрихованного треугольника $dS = \frac{1}{2} \cdot r \cdot dr \cdot \sin(\angle \vec{r}, d\vec{r})$, что совпадает с половиной длины векторного произведения $[\vec{r}, d\vec{r}]$.

Тогда $\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_l [\vec{r}, d\vec{r}]$. Заменим здесь $d\vec{r}$ на $d\vec{l}$ — отрезок вдоль контура и получим

$$\vec{m} = I\vec{S} = \frac{I}{2}\oint_l \left[\vec{r}, d\vec{l}\,\right].$$

Заменим теперь элемент тока $I\,d\vec{l}$ на элемент тока $\vec{j}\,dV$ и получим:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \left[\vec{r}, \vec{j}\,\right] dV .$$

$\vec{j} = nq\vec{\mathcal{V}} = \rho\vec{\mathcal{V}}$, где n — концентрация зарядов, q — величина каждого заряда, $\vec{\mathcal{V}}$ — скорость движения зарядов (не путать с объемом V), ρ — объемная плотность заряда.

Тогда

$$\vec{m} = \int_V \left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right]\frac{\rho}{2} dV .$$

Момент импульса электронной оболочки:

$\vec{L} = m_e\left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right] = \int_V \left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right]\rho_m dV$, где m_e — масса электрона, $\rho_m = \dfrac{dm}{dV}$ — плотность массы.

Сравним $\vec{m} = \int_V \left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right]\frac{\rho}{2} dV$ и $\vec{L} = \int_V \left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right]\rho_m dV$. Откуда

$d\vec{m} = \left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right]\frac{\rho}{2} dV$ и $d\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{\mathcal{V}}\right]\rho_m dV$. Тогда

$$d\vec{m} = \frac{\rho}{2}\cdot\frac{d\vec{L}}{\rho_m} = \frac{\rho}{2\rho_m}d\vec{L} = \frac{-e}{2m_e}d\vec{L} = -\frac{e}{2m_e}d\vec{L} \qquad =>$$

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}.$$

С учетом определения гиромагнитного отношения $\vec{m} = \gamma\vec{L}$ получим

$$\gamma = -\frac{e}{2m_e}.$$

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Спин электрона.

Изучение спектральных дублетов (пар линий) щелочных металлов (Na, K, ...) показало, что у каждого электрона кроме орбитального момента импульса должен быть еще и другой так называемый спиновый момент импульса и соответствующий ему магнитный момент. Причем гиромагнитное отношение для спина вдвое больше, чем для орбиты:

$\vec{m} = -\dfrac{e}{m_e}\vec{S}$, где $\vec{S}$ — спиновый момент импульса.

Этот момент импульса для наглядности можно приписать вращению электрона вокруг своей оси.

Никому неизвестно, почему спиновое гиромагнитное отношение ровно вдвое больше орбитального.

Согласно квантовой механике спиновый момент импульса частицы может иметь только значение, выражающееся по формуле $\sqrt{S(S+1)}\hbar$, где S — так называемое спиновое квантовое число или спин. Каждой элементарной частице соответствует свое значение спина. Спин элементарных частиц может иметь одно из следующих значений $S=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$. Так для фотона $S=1$, для электрона $S=\frac{1}{2}$. Спин электронной оболочки атома складывается из спинов отдельных электронов оболочки. Спины электронов могут складываться в одном направлении (буквально складываться) или могут попарно вычитаться друг из друга, давая нулевой спин какой-то пары электронов. В случае четного числа электронов на электронной оболочке атома суммарный спин оболочки может принимать целочисленные значения от нуля до половины от числа электронов на оболочке. В случае нечетного числа электронов на оболочке атома суммарный спин может принимать только полуцелые значения $\frac{1}{2},\frac{3}{2},...$ до половины от числа электронов на оболочке. Спиновый момент импульса оболочки атома равен $\sqrt{S(S+1)}\hbar$, где S — полный спин оболочки.

Согласно квантовой механике орбитальный момент импульса электрона тоже может принимать только некоторые значения, которые удовлетворяют формуле $\sqrt{L(L+1)}\hbar$ при целочисленном значении L. Как говорят, орбитальный момент импульса квантуется. Здесь L — квантовое число орбитального момента импульса, оно может принимать значения $L=0,1,2,\ldots$.

В так называемом приближении *LS*-связи для электронной оболочки атома сначала нужно сложить орбитальные моменты импульса разных электронов друг с другом и получить орбитальный момент электронной оболочки *L*. Потом нужно сложить спины разных электронов друг с другом и получить спин электронной оболочки *S*. И наконец, сложить орбитальный и спиновый моменты импульса электронной оболочки и получить полный момент импульса электронной оболочки *J*. Все они складываются как векторы. Так орбитальный момент импульса с длиной $\left|\vec{L}\right|=\sqrt{L(L+1)}\hbar$ и спиновый момент импульса с длиной $\left|\vec{S}\right|=\sqrt{S(S+1)}\hbar$ складываются в полный момент импульса $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ с длиной $\left|\vec{J}\right|=\sqrt{J(J+1)}\hbar$, где J — квантовое число полного момента импульса. Длина суммы двух векторов находится в пределах от модуля разности длин до суммы длин двух векторов, поэтому квантовое число J может принимать значения от $|L-S|$ до $|L+S|$ с шагом единица: $J=|L-S|,\ |L-S|+1,\ |L-S|+2,\ \ldots,\ |L+S|$.

С учетом орбитального и спинового моментов импульса:

$\vec{m} = -\dfrac{e}{2m_e} g\vec{J}$, где $1 \le g \le 2$, $\vec{J}$ — полный момент импульса. Здесь g — это поправочный множитель — множитель Ланде или фактор Ланде. Согласно квантовой теории

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Частота ларморовской прецессии тоже содержит множитель Ланде, то есть

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e} g\vec{B}.$$

И действительно. Рассмотрим атом, как магнитный диполь. В магнитном поле на магнитный диполь будет действовать момент сил

$$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right].$$

Момент сил равен производной от момента импульса по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right] = \left[\gamma\vec{L}, \vec{B}\right] = \left[-\gamma\vec{B}, \vec{L}\right] \quad => \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \left[-\gamma\vec{B}, \vec{L}\right].$$

Сравним это с вращением твердого тела

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] \quad => \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right].$$

Из сравнения двух правых формул следует, что момент импульса вращается вокруг магнитного поля с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = -\gamma\vec{B} = \frac{e}{2m_e} g\vec{B}.$$

Здесь, таким образом, доказано, что, если ларморовская прецессия есть, то ее частота $\vec{\Omega} = \dfrac{e}{2m_e} g\vec{B}$.

Диамагнетизм.

Магнитное поле $\vec{B}$ вызывает намагниченность среды $\vec{M}$ следующим образом:

$$\vec{B} \to \vec{\Omega} \to \vec{L} \to \vec{m} \to \vec{M}.$$

Рассмотрим эту цепочку в обратную сторону.

$$\vec{M} = n \cdot \vec{m} = n \cdot \gamma\vec{L} = -n \cdot \frac{e}{2m_e} g \cdot \vec{L} = -n \cdot \frac{e}{2m_e} g \cdot I\vec{\Omega} = -nI\left(\frac{e}{2m_e} g\right)^2 \vec{B}.$$

Здесь n — концентрация диполей с магнитным моментом $\vec{m}$, γ — гиромагнитное отношение, $\vec{L}$ — механический момент импульса каждого атома, $1 < g < 2$ — фактор Ланде, I — момент инерции электронной оболочки атома, $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения электронной оболочки, $e > 0$ — модуль заряда электрона, m_e — масса электрона, $\vec{B}$ — магнитное поле. И так

$$\vec{M} = -nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2 \vec{B}.$$

В системе СГС Гаусса: $\vec{M} = -nI\left(\frac{e}{2m_e c}g\right)^2 \vec{B}$.

Найдем теперь магнитную проницаемость μ диамагнетика.

$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$ =>

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2 \vec{B} = \left(\frac{1}{\mu_0} + nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2\right)\vec{B},$$

а с учетом $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$, получаем $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\mu}\vec{B}$ и

$\frac{1}{\mu_0\mu} = \frac{1}{\mu_0} + nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2$. Откуда

$\mu = \frac{1}{1 + \mu_0 nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2} \approx 1 - \mu_0 nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2$ и окончательно

$$\mu \approx 1 - \mu_0 nI\left(\frac{e}{2m_e}g\right)^2 < 1.$$

Для диамагнетиков $\mu < 1$.

В системе СГС Гаусса: $\mu \approx 1 - 4\pi nI\left(\frac{e}{2m_e c}g\right)^2 < 1$.

Диамагнетизм есть у всех материалов, но у парамагнетиков и ферромагнетиков намагниченностью за счет диамагнетизма пренебрегают по сравнению с другими вкладами в намагниченность.

Парамагнетизм газов в слабых полях.

(неквантовая теория)

Парамагнетики — это вещества, состоящие из атомов, которые имеют магнитный момент без внешнего магнитного поля.

Факультативная вставка.

Атомы парамагнетика — жесткие магнитные диполи. $\vec{m} \equiv I\vec{S}$ — магнитный дипольный момент рамки площадью $\vec{S}$ с током I,

$\vec{m} \equiv I\vec{S} = \frac{I}{2}\oint\limits_l \left[\vec{r}, d\vec{r}\right] = \frac{I}{2}\oint\limits_l \left[\vec{r}, d\vec{l}\right] = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\vec{r}, \vec{j}\right] dV$ — орбитальный магнитный момент электронной оболочки атома.

Конец факультативной вставки.

Выражение для энергии магнитного диполя $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right)$ очень похоже на выражение для энергии электрического диполя $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$. Поэтому для слабых магнитных полей и без учета квантовых эффектов теория парамагнетизма в газах полностью аналогична теории поляризации полярных газообразных диэлектриков с точностью до замены:

$$\begin{cases} \vec{p} \to \vec{m} \\ \vec{E} \to \vec{B} \\ \vec{P} \to \vec{M} \end{cases}$$

Факультативная вставка.

Теорию поляризации полярных диэлектриков в сильных электрических полях не рассматривают, так как заметные нелинейные по полю эффекты могли бы проявиться только в таких сильных полях, в которых наступает электрический пробой газа, а напряженность электрического поля при этом падает. Газ превращается в ионизованный проводящий газ — плазму.

В сильном магнитном поле в отличие от сильного электрического поля никакого пробоя не наступает. Поэтому имеет смысл рассматривать теорию парамагнетизма в сильных магнитных полях. Мы этого делать не будем, чтобы не заострять внимания на математических выкладках.

В квантовой теории парамагнетизма учитывается, что проекция момента импульса атома на направление магнитного поля может принимать только дискретные значения $J_z \hbar$, где ось z направлена вдоль магнитного поля $\vec{B}$, J_z — квантовое число проекции полного момента импульса атома на направление магнитного поля $\vec{B}$. Величина J_z может принимать следующие значения $J_z = -J, -J+1, -J+2, \dots, J-1, J$. Здесь J — квантовое число полного момента импульса атома, векторной суммы орбитального L и спинового S моментов импульса.

Дискретность проекции момента импульса $J_z \hbar$ приводит к дискретности проекции магнитного момента электронной оболочки атома $m_z = \gamma \cdot J_z \hbar$ и к дискретности энергии магнитного диполя атома: $W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right) = -m_z B$. Ниже следующие интегралы при этом заменяются конечными суммами.

Конец факультативной вставки.

Мы не будем рассматривать квантовую теорию парамагнетизма, заметим только, что ее предсказания для намагниченности близки к предсказаниям неквантовой классической теории, которую и рассмотрим.

$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} \cdot d\Omega$ — вероятность направления магнитного диполя в телесный угол $d\Omega$ с учетом распределения Больцмана по энергиям W.

Энергию магнитного диполя W можно выразить через θ — угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{B}$:

$W = -\left(\vec{m}, \vec{B}\right) = -\left|\vec{m}\right| \cdot B \cdot \cos\left(\theta\right)$.

Телесный угол тоже может быть выражен через угол θ:

$d\Omega = \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

От угла φ сферической системы координат ничего не зависит. Тогда после суммирования по углам φ получим

$d\Omega = 2\pi \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta$.

Подставим выражения для энергии W и телесного угла $d\Omega$ в формулу для вероятности $d\xi$ и получим:

$$d\xi = A \cdot e^{-\frac{W}{kT}} \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta = A \cdot e^{\frac{\left|\vec{m}\right| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta \approx$$

$$\approx A \cdot \left(1 + \frac{\left|\vec{m}\right| \cdot B \cdot \cos\left(\theta\right)}{kT}\right) \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta$$

Здесь экспонента заменена отрезком ряда Тейлора с учетом того, что магнитное поле слабое.

Константу A можно найти из условия нормировки: $\int d\xi = 1$ =>

$$1 = \int_0^{\pi} A \cdot \left(1 + \frac{\left|\vec{m}\right| \cdot B \cdot \cos\left(\theta\right)}{kT}\right) \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta = 2A \quad => \quad A = \frac{1}{2} \quad =>$$

$$d\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\left|\vec{m}\right| \cdot B \cdot \cos\left(\theta\right)}{kT}\right) \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta$$

$$M = n \cdot \left|\left\langle \vec{m} \right\rangle\right| = n \cdot \left\langle \left(\vec{m}\right)_B \right\rangle = n \cdot \int \left(\vec{m}\right)_B \cdot d\xi = n \cdot \int \left|\vec{m}\right| \cdot \cos\left(\theta\right) \cdot d\xi \;=>$$

$$M = n \cdot \int_0^{\pi} \left|\vec{m}\right| \cdot \cos\left(\theta\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\left|\vec{m}\right| \cdot B \cdot \cos\left(\theta\right)}{kT}\right) \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot \left|\vec{m}\right|^2 \cdot B}{kT} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\left(\theta\right) \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot \left|\vec{m}\right|^2 \cdot B}{kT} \cdot \frac{2}{3} = \frac{n \cdot \left|\vec{m}\right|^2 \cdot B}{3kT} \quad =>$$