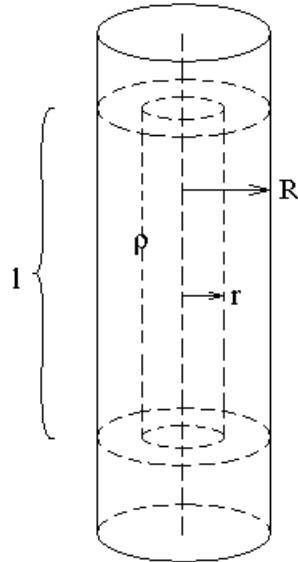


Поля симметричных распределений зарядов. 2. Цилиндрическая симметрия.

Задача. Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R с плотностью заряда ρ . Найти поле \vec{E} .

Решение.

Чтобы найти поле E внутри заряженного цилиндра рассмотрим применение теоремы Гаусса к соосному цилиндру с радиусом $r \leq R$ и длиной l .



$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

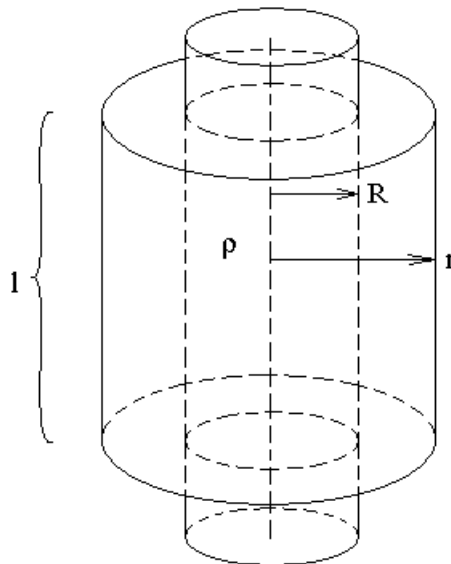
$$ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \cdot \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \quad \text{при } r \leq R.$$

В системе СГС Гаусса: $E=2\rho r$ при $r \leq R$.

Найдем теперь поле \vec{E} снаружи заряженного цилиндра при $r \geq R$.
Рассмотрим цилиндр с радиусом $r \geq R$ и высотой l .



$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$ES = \frac{\rho V}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \cdot \pi R^2 l}{\epsilon_0}$$

Здесь объем $V = \pi R^2 l$, так как только в этой части объема $\pi r^2 l$ есть заряды. Тогда

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad \text{при } r \geq R.$$

В системе СГС Гаусса: $E = 2\pi\rho \frac{R^2}{r}$ при $r \geq R$.

Факультативная вставка.

Попробуем найти потенциал φ .

Пусть точка наблюдения находится снаружи заряженного цилиндра $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_l dl = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r) \Big|_r^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, так как $\ln(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$.

В реальном опыте потенциал не будет бесконечным, так как не бывает бесконечно длинных заряженных цилиндров.

Если h — длина заряженного цилиндра, то при $r \gg h$ цилиндр выглядит, как точечный заряд. Тогда

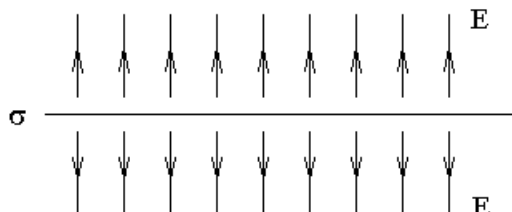
$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}, \quad \text{где } Q = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h.$$

Конец факультативной вставки.

Поля симметричных распределений зарядов. 3. Плоская симметрия.

Бесконечная заряженная плоскость создает напряженность поля $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

с каждой стороны от плоскости:



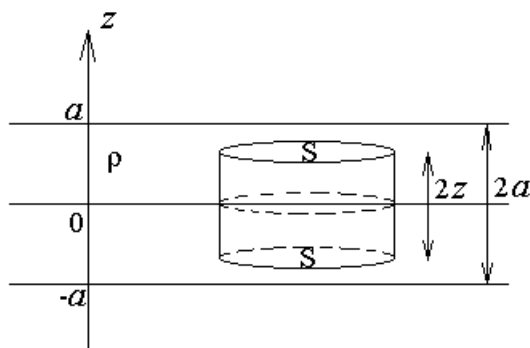
Это можно доказать, опираясь только на симметрию задачи и на скачок поля \vec{E} при переходе через заряженную поверхность: $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Задача. Дан бесконечный слой толщиной $2a$ с плотностью заряда ρ . Найти поле \vec{E} .

Решение.

Сначала поищем напряженность внутри заряженного слоя при $|z| \leq a$.

Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания S и высотой $2z$. Пусть цилиндр симметрично расположен относительно заряженного слоя.

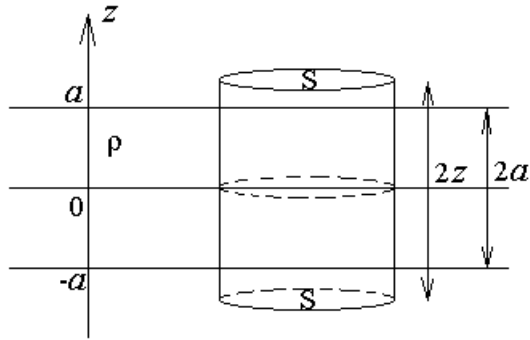


$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2ES = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot S \cdot 2z \quad \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{\rho}{\varepsilon_0} z \quad \text{при } |z| \leq a, \text{ где ось } z \text{ направлена перпендикулярно заряженному слою.}$$

В системе СГС Гаусса: $E_z = 4\pi\rho z$ при $|z| \leq a$.

Теперь поищем напряженность снаружи заряженного слоя при $|z| \geq a$.



$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2ES = \frac{\rho V}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2ES = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot S \cdot 2a \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \text{ при } |z| \geq a, \text{ где ось } z \text{ направлена перпендикулярно заряженному}$$

слою.

В системе СГС Гаусса: $E_z = 4\pi\rho a$ при $|z| \geq a$.

Дифференциальное уравнение для потенциала.

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \operatorname{div}(\vec{E}) = \operatorname{div}(-\vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla}, -\vec{\nabla}\varphi) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi = -\nabla^2\varphi = -\Delta\varphi, \text{ где}$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа или лапласиан. Тогда}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ — уравнение Пуассона. Это и есть дифференциальное}$$

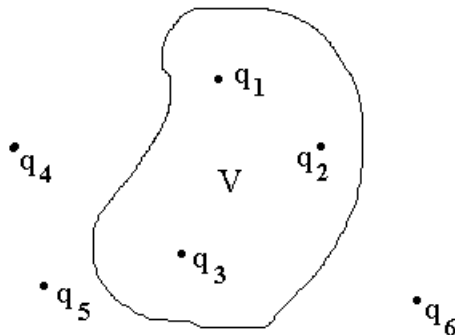
уравнение для потенциала φ .

Если $\rho = 0$, то

$\Delta\varphi = 0$ — уравнение Лапласа — уравнение для потенциала в области без зарядов.

Понятие о краевой задаче электростатики.

Рассмотрим систему зарядов и некоторый объем V . Пусть одна часть зарядов находится внутри объема V , а другая — снаружи.



Если известно расположение всех зарядов, то потенциал в любой точке найти легко:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Пусть расположение зарядов известно только внутри объема V , но не известно за его пределами.

Можно ли заменить неизвестное расположение зарядов снаружи объема какой-нибудь информацией о потенциале на границе объема, чтобы можно было единственным образом найти потенциал внутри объема?

В этом и состоит краевая задача электростатики.

Краевая задача Дирихле.

Уравнение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V , если в каждой точке границы S объема V задан потенциал $\varphi(\vec{r})|_{\vec{r} \in S} \equiv \varphi|_S$ (не одинаковый потенциал во всех точках границы, а в каждой точке границы задано свое значение потенциала).

Подразумевается, что в каждой точке внутри объема V задана плотность зарядов $\rho(\vec{r})$.

Краевая задача Неймана.

Уравнение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V , если в каждой точке границы S задана производная $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ от потенциала по нормали к границе и хотя бы в одной точке из всех границ задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границ, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Краевая задача с границами в виде проводников.

Уравнение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V , если каждая граница объема — проводник, на каждой i -ой границе задан полный заряд Q_i и хотя бы в одной точке границ задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границ, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Краевая задача общего вида.

Уравнение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ имеет единственное решение в объеме V , если на каждой границе объема V задано одно из условий вида 1, 2 или 3 и хотя бы в одной точке границ задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границ, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2 , и для каждого из них выполнены граничные условия. Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ соответствующие этим двум решениям для потенциала. Покажем, что для тождественности φ_1 и φ_2 достаточно доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$. Это равенство эквивалентно равенству $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке S_0 границы S выполнено условие $\varphi_1|_{S_0} = \varphi_2|_{S_0}$. Откуда следует, что в этой точке границы некоторая функция, равная разности решений, равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_0} = 0$.

Производная от разности потенциалов во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а сама разность равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_0} = 0$ хотя бы в одной точке S_0 . Тогда разность потенциалов во всех точках объема равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_V = 0$ или $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$, и два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

То есть для тождественности решений φ_1 и φ_2 теперь достаточно доказать равенство $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ для всех точек объема, и тогда теорема о единственности решения для потенциала φ в рассматриваемом объеме будет доказана. Чтобы доказать $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ докажем два равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) \\ \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0 \end{array} \right. .$$

Если мы их докажем, то получим $\int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = 0$ или

$$\int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV = 0, \text{ то есть } \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0 \text{ в каждой точке объема.}$$

Докажем сначала первое равенство системы. Рассмотрим правую часть равенства:

$$\oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = \int_V \operatorname{div} \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) dV \quad \text{по теореме}$$

Гаусса — Остроградского для векторного поля $(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда

$$\oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = \int_V \operatorname{div} \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV = \int_V \left(\vec{\nabla}, (\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV$$

Левая набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$\begin{aligned} \dots &= \int_V \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \cdot dV = \\ &= \int_V \left(\vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2, \vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \right) \cdot dV = \\ &= \int_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \cdot dV. \end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0.$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду.

Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right)_{d\vec{S}} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) \right)_{\vec{n}} \cdot dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS \end{aligned}$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

1. Рассмотрим доказательство равенства $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$

для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ в любой точке границы S .

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0 \Rightarrow$ Первый сомножитель $(\varphi_1 - \varphi_2)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства

$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ для задачи Неймана.

В краевой задаче Неймана $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_S = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_S$, следовательно, на поверхности

S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства

$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ для задачи с границами в виде проводников.

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\varphi|_{S_i} = const_i$, где S_i — поверхность i -го проводника границы, если граница многосвязная.

Тогда $(\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_i} = const_i$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i -го проводника:

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS \end{aligned}$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, где σ — поверхностная плотность зарядов

на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} \left(-\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \right) \cdot dS =$$

$$= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varepsilon_0} \cdot \left(\oint_{S_i} \sigma_2 dS - \oint_{S_i} \sigma_1 dS \right) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varepsilon_0} \cdot (Q_{2i} - Q_{1i}).$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i -ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ будет выполнено для каждой границы, так как в краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint_S \left((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S} \right) = 0$ доказано для краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.

Дифференциальное уравнение Пуассона $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ с заданным потенциалом на границе $\varphi|_S$ можно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения задачи доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле в электростатике всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют, если объем бесконечен. Если объем ограничен, то в этих задачах решение существует не всегда, а только при некоторых ограничениях на граничные условия на внешней границе объема.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода в одномерном случае:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' + f(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, для которой составлено уравнение; λ — параметр уравнения (константа); $K(x, x')$ — ядро уравнения.

$$\int_a^b K(x, x') \varphi(x') dx' = f(x) \text{ — уравнение Фредгольма 1 рода.}$$

Основные свойства проводников в электростатическом поле.

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля \vec{E} течет электрический ток.

Свойства проводников в электростатике.

1. $\vec{E}_{внутри} = 0$ — поле \vec{E} внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри} \neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что в электростатике поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем напряженность электрического поля и электрический ток.

2. $0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla} \varphi_{внутри} = 0 \Rightarrow \varphi_{внутри} = const$ — каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_{внутри}}{\epsilon_0} = \text{div}(\vec{E}_{внутри}) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_{внутри} = 0 \Rightarrow$$

В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

$$4. \left\{ \begin{array}{l} E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ — нормальная составляющая}$$

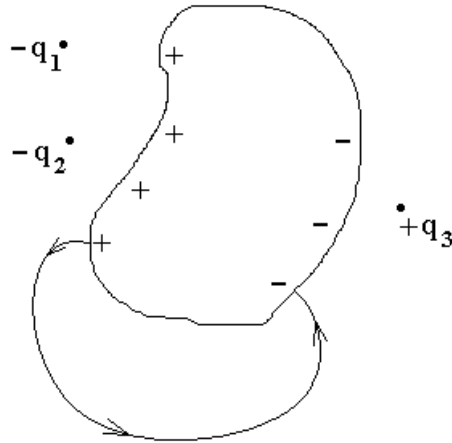
поля \vec{E} над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ , где \vec{n} — нормаль, направленная из проводника наружу.

$$5. \left\{ \begin{array}{l} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_\tau = 0 \text{ — тангенциальная}$$

составляющая поля \vec{E} над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля \vec{E} начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля \vec{E} потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

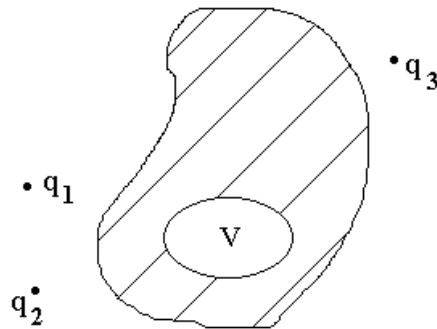
Невозможно:



Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но хуже. Постоянное магнитное поле проводник не экранирует, магнитное поле проникает в проводник. Переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле. Если же магнитное поле проникает внутрь проводника и изменяется, то оно порождает в проводнике и переменное электрическое поле. Именно поэтому переменное электрическое поле экранируется проводником не полностью.

Экранирование электростатического поля состоит в том, что если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E} = 0$ независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0 . Тогда $\varphi|_S = \varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi|_S = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ в объеме V , так

как в этом объеме нет зарядов: $\rho = 0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi = 0$.

Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$$\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0 = const \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0$$

Внутри полости поле \vec{E} отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.