Момент сил, действующих на точечный диполь в электрическом поле.

Рассмотрим систему зарядов $\{q_i\}$, близко расположенных друг к другу. Суммарный момент внутренних сил равен нулю в соответствии с третьим законом Ньютона. Тогда момент сил, действующих на систему зарядов, можно найти, как сумму моментов только внешних сил, действующих на каждый из зарядов:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] = \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i \vec{E}_i\right].$$

Если расстояния между зарядами малы, то напряженности внешнего электрического поля в точках расположения разных зарядов примерно равны $\vec{E}_i \approx \vec{E}$. =>

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i \vec{E}_i\right] \approx \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i \vec{E}\right] = \sum_i \left[q_i \vec{r}_i, \vec{E}\right] = \left[\sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right] \quad =>$$

$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$, где $\vec{M}$ — момент сил, $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{E}$ — внешнее по отношению к диполю электрическое поле.

Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле.

Сумма внутренних сил между зарядами диполя равна нулю по третьему закону Ньютона. Тогда силу, действующую на диполь, можно найти, как сумму внешних сил, действующих на отдельные заряды диполя:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i \vec{E}_i .$$

Если, как и в предыдущем вопросе считать, что $\vec{E}_i \approx \vec{E}$, то для диполя с нулевым суммарным зарядом суммарная сила будет равна нулю. Поэтому для определения величины силы потребуется учесть небольшое различие величин $\vec{E}_i = \vec{E}(\vec{r}_i)$ в точках $\vec{r}_i$ расположения разных зарядов q_i рассматриваемого диполя. Чтобы учесть это различие, разложим напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ в ряд Тейлора по степеням $\vec{r}$ в малой окрестности рассматриваемого диполя.

$$f(\vec{r}_i) \approx f(0) + df = f(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} f\right) = f(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right) f .$$

Если $\vec{f}$ — векторная величина, то предыдущее равенство справедливо для каждой проекции этого вектора и для всего вектора:

$$\vec{f}(\vec{r}_i) \approx \vec{f}(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right) \vec{f} .$$

Поместим начало координат вблизи зарядов диполя. Рассмотрим разложение поля $\vec{E}$ в ряд Тейлора в точке расположения заряда q_i.

$$\vec{E}_i \equiv \vec{E}(\vec{r}_i) \approx \vec{E} + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right) \vec{E} \qquad =>$$

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i \approx \sum_i q_i \left\{\vec{E} + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E}\right\} = \vec{E} \cdot \sum_i q_i + \left(\sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = Q\vec{E} + \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

В последнем выражении первое слагаемое — сила, действующая на полный заряд системы зарядов, а второе слагаемое — сила, действующая на диполь.

$\vec{F}=\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)\vec{E}$ — сила, действующая на точечный диполь, где $\vec{F}$ — сила, $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{E}$ — электрическое поле.

Энергия диполя в электрическом поле.

Рассмотрим правило "бац минус цап"

$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ для векторов $\vec{p}$, $\vec{\nabla}$, $\vec{E}$ и получим

$\left[\vec{p},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)$.

В левой части равенства $\left[\vec{p},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=\left[\vec{p},rot\left(\vec{E}\right)\right]$, но по теореме о циркуляции электростатического поля в дифференциальной форме $rot\left(\vec{E}\right)=0$. Тогда $\left[\vec{p},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right]=0$ => $\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)=0$ =>

$\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{E}\right)=\vec{E}\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)=\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)\vec{E}$

Тогда из $\vec{F}=\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)\vec{E}$ следует $\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{E}\right)$.

Для любой природы сил, если $\vec{F}=-\vec{\nabla}W$, то W — потенциальная энергия. Тогда из $\vec{F}=\vec{\nabla}\left(\vec{p},\vec{E}\right)=-\vec{\nabla}\left(-\left(\vec{p},\vec{E}\right)\right)$ следует, что

$W=-\left(\vec{p},\vec{E}\right)$ — энергия точечного диполя в электрическом поле.

Энергия наведенного диполя.

Формула $W=-\left(\vec{p},\vec{E}\right)$ безусловно справедлива для жесткого диполя, который может поворачиваться в поле $\vec{E}$, но в котором заряды не могут изменять взаимного расположения. Некоторые молекулы не имеют дипольного момента, пока нет внешнего поля $\vec{E}$. При включении поля $\vec{E}$ положительные заряды молекулы смещаются по полю, а отрицательные — против поля. В результате молекула приобретает так называемый наведенный дипольный момент пропорциональный полю: $\vec{p}=\alpha\vec{E}$, где α — поляризуемость молекулы.

Наведенный диполь имеет две разных энергии:

$W_1=-\left(\vec{p},\vec{E}\right)$ — чисто электрическая энергия, которая зависит только от расположения зарядов диполя и не зависит от природы диполя жесткого или наведенного.

Вторая энергия аналогична энергии растянутой пружины $\frac{kx^2}{2}$. Это энергия $W_2 = +\frac{1}{2}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) = \frac{\alpha E^2}{2}$ — энергия упругих сил внутри молекулы, которые пытаются вернуть заряды на исходное место.

С учетом этих двух энергий энергия наведенного диполя:

$$W = -\frac{1}{2}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$$

Обычно под энергией наведенного диполя подразумевают именно эту величину, полученную с учетом энергии упругих сил, пытающихся вернуть заряды диполя на свои места, занимаемые без внешнего поля.

Заметим, что выражение для силы $\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ справедливо и для жесткого и для наведенного диполя.

Электростатика диэлектриков.

Диэлектрик — материал, в котором не течет ток под действием постоянного электрического поля.

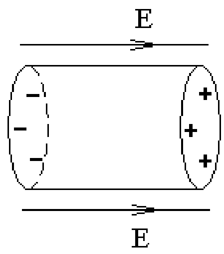
Поляризация диэлектрика и связанные заряды.

В электрическом поле некоторые молекулы ведут себя, как жесткие диполи, например HCl, другие — как наведенные диполи, например N_2.

Жесткие диполи поворачиваются вдоль поля, а наведенные — наводятся вдоль поля.

В любом случае под действием электрического поля положительные заряды смещаются по полю $\vec{E}$, а отрицательные — против поля.

Если электрическое поле одинаковое в разных точках диэлектрика, то при смещении зарядов заряды не появляются в объеме диэлектрика. Не скомпенсированные заряды появляются на границах диэлектрика.



Эти заряды называются связанными зарядами.

Будем называть заряды связанными, если это макроскопические заряды, которые образуются только в результате смещения зарядов внутри каждой молекулы. Любые другие заряды будем называть свободными.

Все заряды либо связанные, либо свободные.

Введем обозначения:

ρ — плотность свободных зарядов,

ρ' — плотность связанных зарядов,

$\rho + \rho'$ — плотность всех зарядов.

$\vec{P} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация среды, объемная плотность дипольного момента или дипольный момент единицы объема.

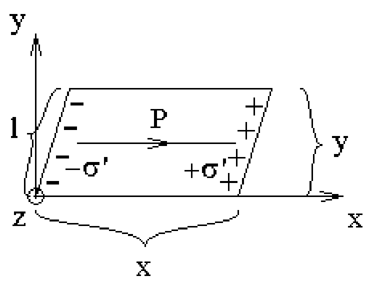
Если n — концентрация молекул или число молекул в единице объема, то, разделив дипольный момент единицы объема $\vec{P}$ на число молекул в единице объема n, получим средний дипольный момент молекулы $\dfrac{\vec{P}}{n} = \langle \vec{p} \rangle$. Тогда

$\vec{P} = n\langle \vec{p} \rangle$, где $\vec{P}$ — поляризация среды, n — концентрация молекул, $\langle \vec{p} \rangle$ — средний дипольный момент молекулы.

Найдем связь между величиной поляризации и плотностью связанных зарядов.

При поляризации среды положительные связанные заряды смещаются вдоль вектора поляризации, а отрицательные — навстречу вектору поляризации.

Рассмотрим наклонный параллелепипед, который поляризован вдоль одного из ребер:



Рассмотрим два выражения для дипольного момента всего куска диэлектрика и приравняем их друг к другу:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = P \cdot V = P \cdot xyz \\ p = Q' \cdot x = \sigma' \cdot S \cdot x = \sigma' \cdot lz \cdot x \end{array} \right\} \qquad =>$$

$$yP = \sigma' l \qquad =>$$

$$\sigma' = \frac{y}{l} P = P \cdot \cos\left(\widehat{\vec{P}, d\vec{S}}\right) = P_n .$$

На границе диэлектрик-вакуум образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Аналогично на границе двух диэлектриков:

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ — скачок нормальной составляющей поляризации на границе двух диэлектрических сред определяется поверхностной плотностью связанных зарядов σ', здесь нормаль направлена из среды 1 в среду 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1\to 2}$.

Заметим, что поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$. Чтобы понять это представим себе, что рассматриваемый параллелепипед разрезан надвое произвольной плоскостью. Раздвинем две части параллелепипеда вправо и влево. На двух новых границах появятся связанные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Рассмотрим плоскость параллельную разрезу, но проходящую под поверхностью одной из частей параллелепипеда. На поверхности диэлектрика рядом с этой плоскостью появились заряды $\sigma' = P_n$, следовательно, с этой поверхности в процессе поляризации ушли заряды той же величины, но противоположного знака. Напомним, что направление плоскости выбрано произвольно. Следовательно, процесс поляризации среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим диэлектрик, который по-разному поляризован в разных точках.

Мысленно выделим внутри этого диэлектрика некоторый объем V.

Рассмотрим единичную площадку на поверхности S этого объема.

Через эту единичную площадку при поляризации диэлектрика перемещается заряд $\sigma' = P_n$, так как поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим, какой заряд Q' смещается через замкнутую поверхность S, которая является границей объема V.

$$Q' = \oint_S dQ' = \oint_S \sigma' dS = \oint_S P_n dS = \oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right)$$

Смещается заряд, равный потоку вектора поляризации через замкнутую поверхность.

Заряд, который остается внутри замкнутой поверхности S отличается знаком:

$\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q'$ — связь потока поляризации через границу объема и связанного заряда Q' внутри объема.

В системе СГС Гаусса связь такая же.

Разделим это равенство на объем V и устремим объем к нулю:

$$\oint_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \quad \left| \frac{1}{V}; \quad \right| V \to 0 \qquad =>$$

$$div\left(\vec{P}\right) = -\rho'$$

Для внутриатомного поля $\vec{E}$ рассмотрим три формы соотношения поля $\vec{E}$ и всех зарядов в диэлектрике. На микроскопическом внутриатомном уровне свободные и связанные заряды неразличимы и равноправны, поэтому

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \dfrac{Q + Q'}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \end{cases}.$$

Под напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в диэлектрике будем понимать усредненное внутриатомное микроскопическое поле $\vec{E}$ по макроскопическому, но малому, объему, хотя и содержащему много атомов. Следовательно, для напряженности поля $\vec{E}$ в диэлектрике будут выполняться те же соотношения, что и для микроскопического внутриатомного поля $\vec{E}$.

Дополним эти уравнения следующими соотношениями:

$$\begin{cases} div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Здесь, как и раньше, единичный вектор нормали к границе направлен из объема 1 в объем 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1\to 2}$.

<u>Два способа вычисления электростатического потенциала φ, создаваемого поляризованным диэлектриком.</u>

1-ый способ — вычисление потенциала связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r}$ и получим:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \int\limits_{V'} \frac{\rho'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} + \oint\limits_{S'} \frac{\sigma'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \right\}$$

В системе СГС Гаусса $\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \dfrac{\rho'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} + \oint\limits_{S'} \dfrac{\sigma'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$.

2-ой способ — вычисление потенциала молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$ и получим:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V'} \frac{\left(\vec{P}\left(\vec{r}\,'\right), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

В системе СГС Гаусса $\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \dfrac{\left(\vec{P}\left(\vec{r}\,'\right), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$.

Оба интегральных выражения для потенциала имеют особую точку при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$, в которой знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. Эта особая точка является интегрируемой особенностью. И действительно, если сделать замену переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на переменную $\vec{r}_0 = \vec{r}\,' - \vec{r}$, то в окрестности особой точки получим:

$$dV' = 4\pi r_0^2 dr_0 \qquad \text{и} \qquad dS' = 2\pi r_0 dr_0 .$$

Тогда после сокращения r_0 в знаменателе и числителе подынтегральных выражений особая точка пропадает. В этом смысле рассматриваемая особая точка — интегрируемая особая точка.

Два способа вычисления электростатического поля *E*, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление напряженности поля связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \int\limits_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \rho'(\vec{r}\,') \cdot dV' + \oint\limits_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \sigma'(\vec{r}\,') \cdot dS' \right\}$$

В системе СГС Гаусса $\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \rho'(\vec{r}\,') \cdot dV' + \oint\limits_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \sigma'(\vec{r}\,') \cdot dS'$.

Особая точка в интеграле по объему — интегрируемая особенность, которая пропадает при замене переменной интегрирования, а особая точка в интеграле по поверхности — это неинтегрируемая особенность. Причина этого в том, что при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$ точка наблюдения находится на поверхности со связанными зарядами, а напряженность поля $\vec{E}$ испытывает скачок при переходе через заряженную поверхность. То есть, поле $\vec{E}$ не имеет определенного значения на заряженной поверхности диэлектрика.

2-ой способ — вычисление напряженности поля молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ 3\dfrac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}}{r^3} - \dfrac{4}{3}\pi \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r}) \right\}$, заменим здесь $\vec{r} \to (\vec{r} - \vec{r}\,')$ и $\vec{p} \to \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot dV'$, просуммируем поле $\vec{E}$ по диполям всего объема $\int\limits_{V'} \bullet$ и получим поле $\vec{E}$ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V'} \left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \right) \cdot dV' - \frac{1}{3\varepsilon_0} \int\limits_{V'} \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot dV'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V'} \left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \right) \cdot dV' - \frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}(\vec{r})$$

В системе СГС Гаусса $\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'), \vec{r} - \vec{r}\,'\right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \right) \cdot dV' - \frac{4}{3}\pi \vec{P}(\vec{r})$.

Здесь интеграл содержит неинтегрируемую в обычном смысле особую точку. Но интеграл по объему имеет определенное значение, если рассматривать интеграл в смысле главного значения. В окрестности особой точки мысленно вырезают шар с малым радиусом r_0 и с центром в особой точке. В объеме без этого шара интеграл берется и имеет определенное значение. Интеграл в смысле главного значения — это предел, к которому стремится интеграл по объему без шара при стремлении радиуса шара к нулю.

Вектор электрической индукции или электрического смещения.

$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ — определение вектора электрической индукции или электрического смещения.

В СГС Гаусса: $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P}$.

Рассмотрим дивергенцию поля $\vec{D}$:

$$div\left(\vec{D}\right) = div\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \varepsilon_0 div\left(\vec{E}\right) + div\left(\vec{P}\right) = \left(\rho + \rho'\right) + \left(-\rho'\right) = \rho \quad =>$$

$$div\left(\vec{D}\right) = \rho .$$

В системе СГС Гаусса: $div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$.

Аналогичные выражения можно получить в интегральной форме $\Phi_D = Q$ и для границы раздела сред $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$. Здесь величины ρ, Q, σ относятся только к свободным зарядам.

Четыре основных формулы для диэлектриков в трех формах:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = Q \\ div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \dfrac{Q + Q'}{\varepsilon_0} \\ div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \\ E_{2n} - E_{1n} = \dfrac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

В этих формулах, как и обычно, нормаль к границе раздела направлена из объема 1 в объем 2: $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

В системе СГС Гаусса $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \\ div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} \end{cases}$.