

## Поляризация полярных газообразных диэлектриков (продолжение).

$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega$ , где малый телесный угол можно выразить через углы сферической системы координат  $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . Тогда

$$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Подставим сюда  $W = -(\vec{p}, \vec{E}) = -p_0 E \cdot \cos(\theta)$ , где ось  $z$ , от которой отсчитывается угол  $\theta$  сферической системы координат, направлена вдоль внешнего электрического поля  $\vec{E}$ , и получим

$$d\xi \sim e^{\frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

С учетом того, что  $p_0 E \ll kT$  (в сильном электрическом поле  $p_0 E \approx kT$  происходит электрический пробой газа) вместо экспоненты оставим отрезок ряда Тейлора:

$$d\xi \sim \left(1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Задача обладает симметрией относительно поворотов вокруг оси  $z$ , поэтому от угла  $\varphi$  ничего не зависит, и суммирование по углу  $\varphi$  дает множитель  $2\pi$ , который можно включить в некоторую константу  $A$ :

$$d\xi = A \cdot \left(1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \quad \text{— вероятность того, что}$$

направление диполя составляет с направлением внешнего электрического поля угол, который лежит в пределах от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ .

Константу  $A$  можно найти из так называемого условия нормировки  $\int d\xi = 1$ , которое означает, что сумма всех вероятностей равна единице.

$$\begin{aligned} 1 = \int d\xi &= \int_0^\pi A \cdot \left(1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = \\ &= A \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot d\theta + A \frac{p_0 E}{kT} \int_0^\pi \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен нулю, а первый равен двойке. Тогда  $1 = 2A \Rightarrow$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$d\xi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E \cos(\theta)}{kT}\right) \sin(\theta) d\theta, \quad \text{где } d\xi \text{ — вероятность того, что}$$

направление диполя составляет угол с направлением напряженности поля от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ ,  $p_0$  — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Найдем поляризацию среды:

$$\begin{aligned}
P &= P_E = n \langle p_E \rangle = n \int p_E d\xi = n \int p_0 \cos(\theta) d\xi = \\
&= n \int_0^\pi p_0 \cos(\theta) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_0 E \cos(\theta)}{kT} \right) \sin(\theta) d\theta = \\
&= \frac{np_0}{2} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta + \frac{np_0^2 E}{2kT} \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен нулю, а второй интеграл равен  $\frac{2}{3}$ . Тогда

$$\vec{P} = \frac{np_0^2 \vec{E}}{3kT} \text{ — поляризация полярных газообразных диэлектриков.}$$

С учетом  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$  получаем

$$\chi = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \text{ — диэлектрическая восприимчивость среды и}$$

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \text{ — диэлектрическая проницаемость среды.}$$

$$\text{В системе СГСГ: } \chi = \frac{np_0^2}{3kT}, \vec{P} = \chi \vec{E} = \frac{np_0^2}{3kT} \vec{E} \text{ и } \varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT}.$$

Заметим, что в отличие от поляризации неполярных диэлектриков поляризация полярных диэлектриков зависит от температуры:  $\chi(T)$  и  $\varepsilon(T)$ .

### Диэлектрики с особыми свойствами.

#### Пьезоэлектрики.

Ключевые слова: деформация — электрическое напряжение.

Прямой пьезоэффект — пьезозажигалка. При деформации диэлектрика возникает электрическое напряжение.

Обратный пьезоэффект — пьезокерамика для микроперемещений зеркала лазера и управления его частотой. Под действием электрического напряжения диэлектрик деформируется.

#### Пироэлектрики.

Ключевые слова: теплота — электрическое напряжение.

Прямой пироэлектрический эффект наблюдается в веществах, в которых поляризация есть без воздействия внешнего электрического поля. При длительном хранении пироэлектрика связанные заряды на его поверхности нейтрализуются свободными зарядами из воздуха:  $\sigma' + \sigma = 0$ . Поляризация пироэлектрика изменяется при изменении температуры  $\Delta P = \gamma \cdot \Delta T$ , компенсация зарядов нарушается, и вокруг диэлектрика возникает электрическое поле.

Прямой пироэлектрический эффект используется в приемниках электромагнитного излучения. Излучение пропускают через вращающийся диск с прорезями. Пирокристалл нагревается модулированным излучением.

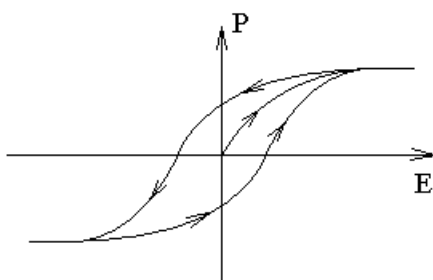
Пирокристалл находится между обкладками конденсатора, с которого снимается переменное электрическое напряжение на частоте модуляции излучения. Амплитуда напряжения с конденсатора пропорциональна изменению температуры и пропорциональна мощности регистрируемого излучения.

Обратный пирозлектрический эффект — при адиабатическом изменении поля  $\vec{E}$  изменяется температура диэлектрика.

#### Сегнетоэлектрики.

Ключевое слово: гистерезис — отставание.

При периодическом изменении напряженности поляризация тоже изменяется периодически, но с отставанием по фазе.



Очень похоже на ферромагнетики: спонтанная поляризация, переполяризация электрическим полем, насыщение поляризации, остаточная поляризация. Ферромагнетики позднее будут рассмотрены подробнее.

#### Факультативная вставка.

Электрострикция — небольшая квадратичная по электрическому полю деформация диэлектрика в отличие от линейной по полю деформации пьезоэлектриков.

Электреты — диэлектрики, долго сохраняющие поляризацию без внешнего электрического поля. Например, пирозлектреты в нагретом состоянии помещают в электрическое поле и охлаждают.

Антисегнетоэлектрики имеют спонтанно поляризованные элементарные ячейки, направления спонтанной поляризации в которых попарно антипараллельны.

#### Конец факультативной вставки.

### Электрический ток.

#### Сила тока, плотность тока, плотность поверхностного тока.

$I \equiv \frac{dq}{dt}$  — сила тока — это заряд, протекающий в единицу времени через

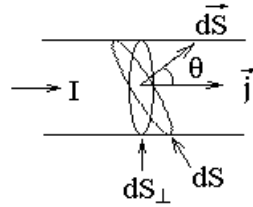
некоторую поверхность, например, через поперечное сечение проводника.

$j \equiv \frac{dI}{dS_{\perp}}$  — поверхностная плотность объемного тока — сила тока через

единичную площадку перпендикулярную току. Для краткости говорят плотность тока.

$i \equiv \frac{dI}{dl_{\perp}}$  — линейная плотность поверхностного тока — сила тока,

текущего по поверхности и протекающего через единичный отрезок перпендикулярный току. Для краткости говорят плотность поверхностного тока.



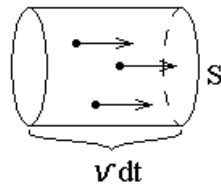
$$dI = j \cdot dS_{\perp} = j \cdot dS \cdot \cos(\theta) = (\vec{j}, d\vec{S}) \quad \Rightarrow$$

$dI = (\vec{j}, d\vec{S})$  — сила тока равна потоку плотности тока

$$dI = (\vec{j}, d\vec{S}) = j_n dS \quad \Rightarrow$$

$j_n = \frac{dI}{dS}$  — проекция плотности тока на нормаль к площадке.

Рассмотрим объем  $dV_0 = v dt \cdot S$ , где  $v$  — скорость движения зарядов.



$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{q \cdot dN}{dt} = \frac{q \cdot n \cdot dV_0}{dt}, \text{ здесь } n \text{ — концентрация зарядов, } q \text{ —}$$

величина каждого заряда.

$$I = \frac{q \cdot n \cdot dV_0}{dt} = \frac{qn \cdot v dt \cdot S}{dt} = nqvS \quad \Rightarrow \quad j = \frac{I}{S} = nqv \quad \Rightarrow$$

$$\vec{j} = nq \langle \vec{v} \rangle = \rho \langle \vec{v} \rangle,$$

где  $\vec{j}$  — плотность тока,  $n$  — концентрация зарядов,  $q$  — величина каждого заряда,  $\langle \vec{v} \rangle$  — средняя скорость зарядов,  $\rho$  — плотность зарядов.

### Уравнение непрерывности или уравнение неразрывности.

Это уравнение следует из закона сохранения заряда.

Рассмотрим силу тока, вытекающего через границу  $S$  объема  $V$ :

$$\frac{dQ_0}{dt} = I = \oint_S dI = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Здесь  $Q_0$  — заряд, который вытекает. Если рассматривать вместо него заряд, который остается в объеме, то производная от заряда по времени поменяет знак. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = 0 \quad \text{— уравнение непрерывности или уравнение}$$

неразрывности в интегральной форме. Здесь  $Q$  — заряд внутри замкнутой поверхности  $S$ , частная производная по времени подчеркивает неизменность пространственных координат при дифференцировании по времени.

Разделим это равенство на объем, ограниченный поверхностью  $S$  и устремим объем к нулю. Тогда получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad \text{— уравнение непрерывности или уравнение}$$

неразрывности в дифференциальной форме.

Для постоянных токов  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Предполагается, что постоянные токи

текли сколь угодно долго, тогда из  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$  следует, что плотность заряда,

изменяясь линейно во времени, достигает сколь угодно большой величины. Если не рассматривать бесконечные плотности заряда, то нужно считать, что

для постоянных токов  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Тогда из уравнения неразрывности для

постоянных токов получаем

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = 0.$$

Для постоянных токов в интегральной форме получаем  $\Phi_j = 0$  — поток плотности тока через замкнутую поверхность равен нулю. Сколько линий плотности тока втекает в объем, столько и вытекает. Поток плотности тока через любую поверхность — это сила тока через эту поверхность.

Линии плотности постоянных токов нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Линии плотности постоянных токов замкнуты.

Факультативная вставка.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{— уравнение неразрывности для газа, где } \rho \text{ —}$$

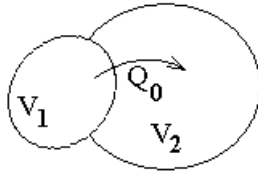
плотность газа.

Конец факультативной вставки.

Факультативная вставка.

Как было отмечено выше, если рассматривать вместо вытекающего из объема  $V_1$  заряд, который остается в объеме, то производная от заряда по времени поменяет знак. Этот результат связан с законом сохранения заряда. Обсудим эту связь подробнее.

Обозначим область, в которую вытекают заряды, как объем  $V_2$ .



За границы объема  $V_1 + V_2$  заряды не вытекают. Следовательно, по закону сохранения заряда в объеме  $V_1 + V_2$  заряд сохраняется.

Если  $Q_1$  и  $Q_2$  заряды в объемах 1 и 2, то закон сохранения заряда:

$$Q_1 + Q_2 = const \Rightarrow d(Q_1 + Q_2) = 0 \Rightarrow \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt},$$

где  $Q_0 = \Delta Q_2$  — заряд, который вытекает через границу  $S_1$  объема  $V_1$ .

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} = -\oint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) \Rightarrow$$

$$\frac{dQ_1}{dt} + \oint_{S_1} (\vec{j}, d\vec{S}) = 0$$

Теперь в этом выражении можно опустить индекс 1. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = 0 \quad \text{— уравнение непрерывности или уравнение}$$

неразрывности в интегральной форме. Здесь  $Q$  — заряд внутри замкнутой поверхности  $S$ .

Конец факультативной вставки.

### Закон Ома.

$I \sim U$  — закон Ома. Сила тока через поперечное сечение проводника пропорциональна напряжению, приложенному к его торцам.

$U = RI$  — определение сопротивления проводника  $R$ .

Закон Ома выполняется не всегда, например, не выполняется для полупроводникового диода.

Факультативная вставка.

Для диода в направлении отпириания диода с хорошей точностью выполняется следующая связь между током  $I$  и напряжением  $U$ :

$$I = I_0(T) \cdot \left( \exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right),$$

где  $T$  — абсолютная температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $e$  — модуль заряда электрона.

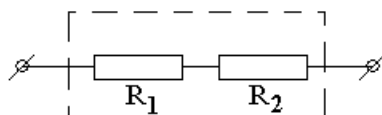
Интересно, что зависимость  $I_0(T)$  такова, что при постоянном токе через диод, и изменении температуры диода, напряжение на диоде приблизительно обратно пропорционально абсолютной температуре  $U \sim \frac{1}{T}$ . В результате

полупроводниковый диод можно использовать, как датчик изменения температуры.

Конец факультативной вставки.

### Последовательное и параллельное соединение проводников.

Рассмотрим черный ящик, в котором последовательно соединены два резистора с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ . Пусть мы не знаем, что внутри два резистора, и думаем, что резистор один. Измеряя напряжение и ток в схеме можно определить величину сопротивления этого резистора.



$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I \\ U = U_1 + U_2 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} = R_1 + R_2 \Rightarrow$$

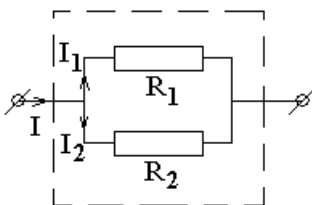
$$R = R_1 + R_2$$

Аналогично для большего числа последовательно соединенных резисторов:

$$R = \sum_i R_i \quad \text{— при последовательном соединении резисторов их}$$

сопротивления складываются.

Рассмотрим теперь черный ящик, в котором два резистора соединены параллельно:



$$\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Аналогично для большего числа параллельно соединенных резисторов:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \text{— при параллельном соединении резисторов их проводимости}$$

складываются.

Проводимость — величина обратная сопротивлению.

### Удельное сопротивление и удельная проводимость.

Рассмотрим длинный цилиндрический проводник, к торцам которого приложено электрическое напряжение. По проводнику течет ток.

Теперь соединим последовательно два таких проводника. Сопротивление удвоится, так как при последовательном соединении резисторов сопротивления складываются. Длина проводника тоже удвоится. Если последовательно соединить три проводника, то сопротивление и длина утроятся и так далее.

Следовательно, сопротивление цилиндра пропорционально его длине:

$$R \sim l.$$

Рассмотрим цилиндрический проводник с прямоугольным поперечным сечением. К торцам цилиндра приложим электрическое напряжение. По проводнику потечет ток.

Если мы соединим параллельно два таких проводника, то проводимость удвоится, так как при параллельном соединении резисторов проводимости складываются. При этом токи не будут перетекать из одного проводника в другой параллельный ему, так как оба проводника равноправны. Площадь поперечного сечения суммарного проводника тоже удвоится. Если параллельно соединить три проводника, то проводимость и площадь поперечного сечения утроятся и так далее.

Следовательно, проводимость цилиндра пропорциональна площади его поперечного сечения:

$$\frac{1}{R} \sim S \quad \Rightarrow \quad R \sim \frac{1}{S}.$$

$$\left. \begin{array}{l} R \sim l \\ R \sim \frac{1}{S} \end{array} \right\} \Rightarrow R \sim \frac{l}{S}.$$

Равенство  $R = \rho \frac{l}{S}$  является определением удельного сопротивления  $\rho$ .

Здесь  $R$  — сопротивление проводника,  $l$  — длина проводника,  $S$  — площадь поперечного сечения проводника.

Величина удельного сопротивления не зависит от размеров и формы проводника, а зависит только от его материала.

$\lambda \equiv \frac{1}{\rho}$  — определение удельной проводимости материала.

### **Закон Ома в дифференциальной форме.**

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \Rightarrow \quad U = RI = \rho \frac{l}{S} I \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l} \quad \Rightarrow \quad j = \lambda E$$

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$  — закон Ома в дифференциальной форме. Здесь  $\vec{j}$  — плотность тока,  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля,  $\lambda$  — удельная проводимость.

### **Сторонние силы.**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad \text{— уравнение неразрывности.}$$



$$\text{Для постоянных токов } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Phi_j = 0$  — поток плотности постоянных токов через любую замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно, линии постоянных токов замкнуты.

Рассмотрим интеграл  $\oint_l E_l dl$  вдоль замкнутой линии тока.

$$d\vec{l} \uparrow \uparrow \vec{j} = \lambda \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad (\vec{E}, d\vec{l}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_l E_l dl > 0$$

Это с одной стороны, а с другой стороны  $\oint_l E_l dl = 0$ , согласно теореме о

циркуляции электростатического поля  $\vec{E}$ . Казалось бы, для постоянных токов поле  $\vec{E}$  нельзя считать электростатическим. Однако  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  и это означает, что заряды не изменяются. При постоянных токах распределение зарядов неизменно. При неизменном распределении зарядов их поле — электростатическое поле.

Итак, мы получили противоречие  $\left\{ \begin{array}{l} \oint_l E_l dl > 0 \\ \oint_l E_l dl = 0 \end{array} \right.$ . Это противоречие

доказывает, что для существования постоянных токов необходимо наличие неэлектрических посторонних сил. Эти силы будем называть сторонними силами  $\vec{F}_{стор}$ .

$$\vec{E}_{стор} \equiv \frac{\vec{F}_{стор}}{q} \text{ определение напряженности сторонних сил.}$$

Электрические силы и сторонние силы должны одинаково вызывать движения зарядов — электрический ток. Тогда, обобщая закон Ома, получим:

$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_{стор})$  — обобщенный закон Ома или закон Ома с учетом сторонних сил в дифференциальной форме.