

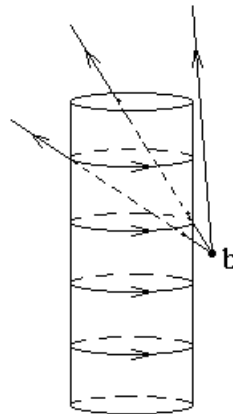
## Лекционные демонстрации, 12 минут.

### 2. Магнитное поле длинного намагниченного цилиндра в трех характерных точках (продолжение).

Рассмотрим магнитное поле в точке  $b$ . В этой точке токи, расположенные на ближней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вниз, а токи, расположенные на дальней поверхности цилиндра, создают магнитное поле направленное вверх.

Чтобы вычислить суммарное магнитное поле нужно найти разность телесных углов, под которыми видна ближняя к точке наблюдения поверхность с током и дальняя поверхность с током.

Разность телесных углов равна телесному углу, под которым из точки наблюдения поля видны два доньшка цилиндра. Чтобы убедиться в этом рассмотрим три разных луча, выходящих из точки  $b$ .



Рассмотрим малый телесный угол вокруг каждого из этих трех лучей.

Нижний луч протыкает боковую поверхность цилиндра дважды. Внутри соответствующего ему малого телесного угла окажется часть ближней поверхности с током и часть дальней поверхности с током. Эти две площадки с током дают равные по величине и противоположно направленные вклады в вертикальную составляющую магнитного поля в точке  $b$  в соответствии с формулой  $dB_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} i' d\Omega$ , где  $d\Omega$  — рассматриваемый малый телесный угол.

Верхний из трех лучей и малый телесный угол вокруг него не касаются поверхности цилиндра и не дают вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке  $b$ .

Средний из трех лучей входит в цилиндр через ближнюю часть боковой поверхности цилиндра, а выходит через верхнее доньшко. В малый телесный угол вокруг луча попадает только часть ближней токонесущей боковой поверхности цилиндра. Эта часть токонесущей поверхности дает не скомпенсированный вклад в вертикальную составляющую магнитного поля в точке наблюдения. Телесные углы именно вокруг таких лучей, которые входят в цилиндр через его боковую поверхность, а выходят через доньшко, дают

вклад в телесный угол  $\Omega$ , который определяет величину магнитного поля в точке  $b$ .

$$B_b = -\frac{\mu_0}{4\pi} M \Omega_b \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} M \cdot 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -\frac{2R^2}{l_0^2} \mu_0 M,$$

$$H_b = \frac{B_b}{\mu_0} \approx -\frac{2R^2}{l_0^2} M.$$

В системе СГС Гаусса  $H_b = B_b \approx -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} M.$

В точке  $c$  телесный угол, под которым видна поверхность с током — это половина  $2\pi$  полного телесного угла  $4\pi$  для нижнего полупространства минус телесный угол  $\frac{\pi R^2}{l_0^2}$ , под которым видно нижнее доньшко. Тогда

$$B_c = \frac{\mu_0}{4\pi} M \Omega_c \approx \frac{\mu_0}{4\pi} M \left( 2\pi - \frac{\pi R^2}{l_0^2} \right) = \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2} \right) \mu_0 M$$

$$H_c = \frac{B_c}{\mu_0} \approx \left( \frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2} \right) M.$$

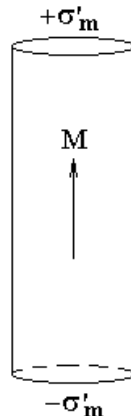
В системе СГС Гаусса  $B_c = H_c \approx \left( 2\pi - \frac{\pi R^2}{l_0^2} \right) M.$

### Решение 2.

В той же задаче можно найти магнитное поле магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

По аналогии с электрическими зарядами  $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ , напишем для магнитных зарядов

$M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m \Rightarrow \sigma'_m = M$  — поверхностная плотность связанных магнитных зарядов на торцах цилиндра.



Эти заряды создают напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ . Затем поле  $\vec{B}$  можно найти по формуле  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .

Точка  $a$  в центре цилиндра расположена далеко от торцов цилиндра. Тогда магнитный заряд на каждом торце можно считать точечным. Напряженности полей обоих зарядов в центре цилиндра направлены сверху вниз.

$$H_a = -2 \frac{q'_m}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2 M}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -\frac{2R^2}{l_0^2} M$$

$$B_a = \mu_0(H_a + M) = \left(1 - \frac{2R^2}{l_0^2}\right) \mu_0 M$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } H_a \approx -2 \frac{q'_m}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\sigma'_m \pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} M \quad \text{и} \quad B_a = H_a + 4\pi M \approx M \left(4\pi - 2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2}\right).$$

Цилиндр узкий, точка  $b$  близко расположена к точке  $a$ , поэтому напряженность магнитного поля в точке  $b$  почти такая же, как и в точке  $a$ :

$$H_b = -\frac{2R^2}{l_0^2} M, \quad B_b = \mu_0 H_b = -\frac{2R^2}{l_0^2} \mu_0 M.$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } B_b = H_b \approx -2 \frac{\pi R^2}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2} M.$$

Точка  $c$  расположена близко к торцу цилиндра, при этом торец выглядит бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда  $\sigma'_m$ .

Напряженность электрического поля бесконечной плоскости равна  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,

так как  $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . С учетом  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$  и  $\vec{H} = \frac{q_m}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$  получаем

$H_{2n} - H_{1n} = \sigma'_m$ , и напряженность магнитного поля бесконечной плоскости равна  $H = \frac{\sigma'_m}{2} = \frac{M}{2}$ . Заряд нижнего торца цилиндра можно считать точечным.

Тогда

$$H_c = \frac{\sigma'_m}{2} - \frac{q'_m}{4\pi} \cdot \frac{1}{l_0^2} = \frac{\sigma'_m}{2} - \frac{\pi R^2 \sigma'_m}{4\pi} \cdot \frac{1}{l_0^2} = \frac{M}{2} - \frac{\pi R^2 M}{4\pi} \cdot \frac{1}{l_0^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2}\right) M$$

$$B_c = \mu_0 H_c = \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2}{4l_0^2}\right) \mu_0 M$$

$$\text{В системе СГС Гаусса } B_c = H_c \approx 2\pi\sigma'_m - \frac{q'_m}{l_0^2} = 2\pi M - \frac{\pi R^2}{l_0^2} M.$$

Ответы совпадают с ответами первого решения.

**Четыре предварительных замечания к решению задач по теме  
магнитопровод.**

1-ое замечание.

Аналогично краевой задачи электростатики для уравнения  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

уравнение  $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$  имеет единственное решение в объеме, если на границах объема задано одно из граничных условий аналогичных условиям Дирихле или Неймана. В среде  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$  и  $\Delta\vec{A} = -\mu_0\mu\vec{j}$ .

В среде уравнение  $\Delta\vec{A} = -\mu_0\mu\vec{j}$  для векторного потенциала эквивалентно

паре дифференциальных уравнений  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$  для полей  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . При

условиях:  $\begin{cases} \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} \\ \vec{B} = \operatorname{rot}(\vec{A}) \\ \operatorname{div}(\vec{A}) = 0 \end{cases}$

На границе намагниченных сред система  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$  превращается в

граничные условия  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$ .

В результате, решение для магнитного поля можно придумывать. Для

придуманного решения нужно проверять условия  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$  на границе

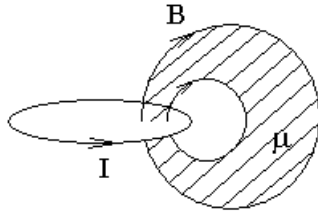
объема и на границах намагниченных сред внутри рассматриваемого объема, здесь  $i$  — плотность поверхностного тока проводимости.

Внутри рассматриваемого объема нужно проверять условия  $\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$ ,

где  $\vec{j}$  — плотность токов проводимости.

2-ое замечание.

Если в задаче без магнетиков любую трубку линий поля  $\vec{B}$  заполнить магнетиком, то напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  нигде не изменится.



Доказательство этого замечания.

Придумаем решение, в котором поле  $\vec{H}$  нигде не изменилось.

Проверим выполнение граничных условий  $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = i \end{cases}$  на границе

магнетика внутри рассматриваемого объема, то есть на границах трубки линий поля  $\vec{B}$ , заполненной магнетиком.

Граница магнетика выбрана вдоль линий поля  $\vec{B}$ , следовательно, нормальной составляющей поля  $\vec{B}$  на границе магнетика нет. Тогда условие  $B_{2n} - B_{1n} = 0$  выполнено на границе магнетика.

Условие  $H_{2\tau} - H_{1\tau} = i$  выполнено на границе магнетика, так как на этой границе нет токов проводимости  $i = 0$ , и у придуманного поля  $\vec{H}$  нет скачка на границе.

Уравнения  $\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \end{cases}$  будут выполнены в остальных точках внутри

объема, так как они были выполнены для поля  $\vec{H}$  в задаче без магнетиков.

3-е замечание.

Если сердечник в виде заполненной магнетиком трубки линий магнитного поля продеформировать, то поле  $\vec{H}$  внутри и снаружи сердечника будет различным, но поля внутри и снаружи останутся величинами одного порядка  $H_{\text{внутри}} \approx H_{\text{снаружи}}$ .

Интеграл  $\oint_l H_l dl = I$  по контуру вдоль оси сердечника и по контуру рядом

с сердечником имеет одно и то же значение, так как правая часть равенства в обоих случаях одна и та же. Если интеграл от поля  $\vec{H}$  внутри и снаружи сердечника одинаков, то и само поле  $\vec{H}$  не может сильно отличаться внутри и снаружи сердечника.

4-е замечание.

Если сердечник изготовлен из материала с высокой магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ , то линии магнитного поля  $\vec{B}$  не любят выходить из сердечника при его деформации, то есть повторяют форму сердечника.

Докажем это замечание.

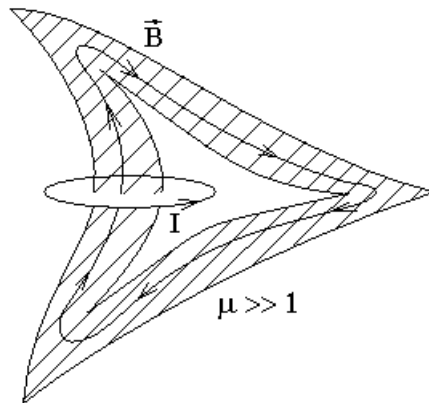
Согласно третьему замечанию  $H_{\text{внутри}} \approx H_{\text{снаружи}}$ .

$$\text{Но } \begin{cases} B_{\text{внутри}} = \mu_0 \mu H_{\text{внутри}} \\ B_{\text{снаружи}} = \mu_0 H_{\text{снаружи}} \end{cases} \text{ и } \mu \gg 1, \text{ тогда}$$

$$B_{\text{внутри}} = \mu_0 \mu H_{\text{внутри}} \approx \mu_0 \mu H_{\text{снаружи}} = \mu B_{\text{снаружи}} \gg B_{\text{снаружи}} \Rightarrow \\ B_{\text{внутри}} \gg B_{\text{снаружи}}.$$

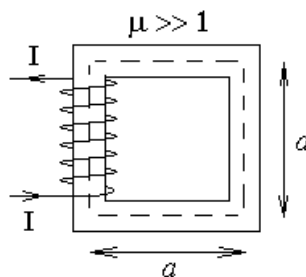
Плотность линий поля  $\vec{B}$  пропорциональна величине поля  $B$ , линии поля  $\vec{B}$  не рвутся. Тогда с учетом  $B_{\text{внутри}} \gg B_{\text{снаружи}}$  из сердечника  $\mu \gg 1$  может выходить лишь небольшая часть (порядка  $\frac{1}{\mu}$ ) линий поля  $\vec{B}$ .

Следовательно, линии поля  $\vec{B}$  повторяют форму замкнутого сердечника  $\mu \gg 1$ , и в этом смысле линии поля  $\vec{B}$  не любят выходить из сердечника при  $\mu \gg 1$ .



### Примеры решения задач с магнитопроводом.

#### 1. Магнитное поле в катушке с замкнутым сердечником при $\mu \gg 1$ .



Найдем магнитное поле  $\vec{B}$  в сердечнике.

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  вдоль оси сердечника:

$$\oint_l H_l dl = I, \text{ где } I \text{ — сумма токов, пронизывающих контур}$$

интегрирования — пунктирный контур.

Пусть  $N$  — число витков в обмотке катушки. Каждый виток пронизывает площадку, ограниченную пунктирным контуром. Следовательно,  $NI$  — сумма

токов проводимости, пронизывающих пунктирный контур интегрирования. Тогда

$$\oint_l H_l dl = NI, \quad (1)$$

где  $I$  — сила тока в обмотке катушки.

Линии магнитного поля  $\vec{B}$  не любят выходить из сердечника с высокой магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ , поэтому через любое сечение сердечника перпендикулярное его пунктирной оси проходит одинаковое число линий поля  $\vec{B}$ . Поток  $\Phi_B$  пропорциональный числу линий поля также одинаковый в любом сечении.

$\Phi_B = BS$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника перпендикулярного пунктирной линии. На протяжении почти всей длины сердечника площадь сечения  $S$  одинаковая, тогда и поле  $B$  во всех сечениях сердечника одинаковое. С учетом  $B = \mu_0 \mu H$  поле  $H$  тоже одинаково во всем сердечнике, и поле  $\vec{H}$  направлено вдоль оси сердечника. Следовательно,  $H_l = H$  и эту константу можно вынести за знак интеграла в формуле (1).

$$H \cdot \oint_l dl = NI, \text{ здесь } \oint_l dl = l \text{ — длина сердечника. Тогда}$$

$$Hl = NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{NI}{l}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu NI}{l}, \text{ где } \mu \gg 1 \text{ — магнитная проницаемость сердечника; } N \text{ —}$$

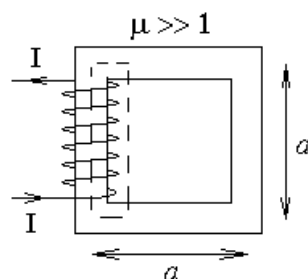
число витков в катушке, намотанной на сердечник;  $I$  — сила тока в катушке.

В системе СГС Гаусса для поля  $B$  нужно  $\mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c}$ , в результате  $B = \frac{4\pi}{c} \mu \frac{NI}{l}$ ,

для поля  $H$  нужно добавить множитель  $\frac{4\pi}{c}$ , в результате  $H = \frac{4\pi NI}{cl}$ .

#### Факультативная вставка.

Сравним приведенное выше правильное решение с ошибочным, представленным ниже.



Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  по новому пунктирному контуру. Казалось бы, магнитное поле в основном сосредоточено в сердечнике, поэтому вкладом в циркуляцию снаружи сердечника можно пренебречь. Тогда

$$\oint_l H_l dl = Ha = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{a}, \text{ что в четыре раза отличается от}$$

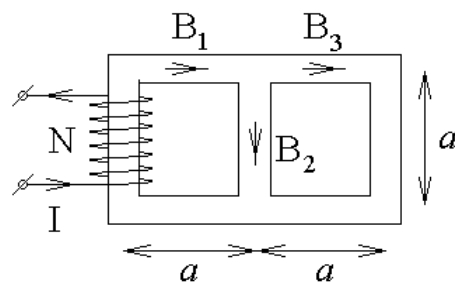
правильного решения  $H = \frac{NI}{l}$ .

Чтобы избежать ошибок в решении, нужно учитывать, что магнитное поле  $\vec{B}$  в сердечнике гораздо больше, чем рядом с сердечником, а напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  в сердечнике и рядом с ним имеет один порядок величин. По этой причине нельзя пренебречь вкладом в циркуляцию поля  $\vec{H}$  снаружи сердечника, и второе предложенное решение оказывается неверным.

Конец факультативной вставки.

## 2. Магнитное поле в сердечнике с ветвлением.

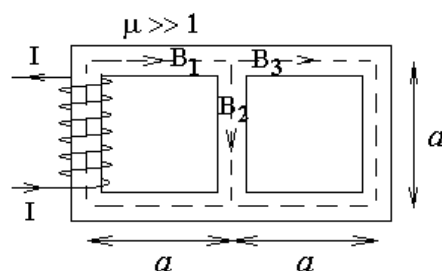
Рассмотрим ветвящийся сердечник. Пусть в задаче заданы геометрические размеры сердечника, его проницаемость  $\mu \gg 1$ , число витков катушки  $N$  и сила тока в катушке  $I$ .



Требуется найти магнитное поле в сердечнике.

При решении задачи составляются уравнения похожие на уравнения Кирхгофа. Узел — это место ветвления сердечника. Участок сердечника, как и участок электрической цепи — это отрезок от одного узла до соседнего узла. Есть уравнения для узлов, а именно, в узел втекает поток магнитного поля такой же, как вытекает; и для контуров — циркуляция напряженности магнитного поля по контуру равна сумме токов проводимости, пронизывающих контур.

Выберем положительное направление магнитного поля  $\vec{B}$  на каждом участке сердечника. Число линейно независимых уравнений для контуров совпадает с числом элементарных контуров, которые нельзя разделить на более мелкие по площади контуры.





Выберем в качестве контуров для составления уравнений два элементарных квадратных пунктирных контура. Выберем положительное направление обхода каждого контура, например по часовой стрелке.

Уравнения для контуров примут следующий вид:

$$\begin{cases} 3aH_1 + aH_2 = NI \\ 3aH_3 - aH_2 = 0 \end{cases} .$$

Для решения системы относительно неизвестных  $H_1, H_2, H_3$  не хватает третьего уравнения.

Добавим одно уравнение для узла.

Поток поля  $\vec{B}$ , втекающий в узел, равен потоку, вытекающему из угла. Тогда

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3,$$

где  $S_1, S_2, S_3$  — площади поперечного сечения сердечника на участках 1, 2, 3.

Рассмотрим задачу, в которой площади сечения одинаковые, тогда  $B_1 = B_2 + B_3$ .

$H_1 = H_2 + H_3$  — третье недостающее уравнение системы:

$$\begin{cases} 3aH_1 + aH_2 = NI \\ 3aH_3 - aH_2 = 0 \\ H_1 = H_2 + H_3 \end{cases} .$$

Три уравнения позволяют найти три неизвестные  $H_1, H_2, H_3$ .

Магнитное поле  $B_i = \mu_0 \mu H_i$  на каждом  $i$ -ом участке сердечника.

### Уравнения для магнитного поля в произвольном магнитопроводе ( $\mu \gg 1$ ) с ветвлением.

Уравнения для магнитного поля в магнитопроводе не просто похожи на уравнения Кирхгофа для электрических цепей, а полностью им эквивалентны с точностью до замены:

$$\begin{array}{lll} I & \Rightarrow & BS \\ \mathcal{E} & \Rightarrow & NI \\ R & \Rightarrow & \frac{l}{\mu_0 \mu S} . \end{array}$$

В системе СГС Гаусса:

$$\begin{array}{lll} I & \Rightarrow & BS \\ \mathcal{E} & \Rightarrow & \frac{4\pi}{c} NI \\ R & \Rightarrow & \frac{l}{\mu S} . \end{array}$$

Здесь в левом столбце:  $I$  — сила тока на участке электрической цепи,  $\mathcal{E}$  — электродвижущая сила на участке цепи,  $R$  — сопротивление участка цепи. В правом столбце:  $B$  — магнитное поле в сердечнике на участке магнитопровода,  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника,  $N$  — число витков катушки на

сердечнике;  $I$  — сила тока в катушке,  $l$  — длина участка сердечника,  $\mu$  — магнитная проницаемость сердечника.

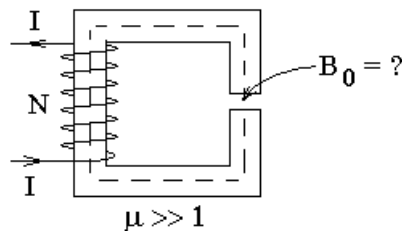
Так если сердечник не ветвится, то  $Nl = lH = l \frac{B}{\mu_0 \mu} = BS \cdot \frac{l}{\mu_0 \mu S} \Rightarrow$

Уравнение  $Nl = BS \cdot \frac{l}{\mu_0 \mu S}$  для магнитопровода, что после

соответствующих замен эквивалентно уравнению  $\mathcal{E} = IR$  для электрических цепей.

Следовательно, величина  $\frac{l}{\mu_0 \mu S}$  — сопротивление магнитопровода магнитному потоку. Тогда  $\mu_0 \mu$  — удельная проводимость магнитного потока.

### 3. Магнитное поле в зазоре сердечника ( $\mu \gg 1$ ).



Дано:  $N$  — число витков обмотки,  $I$  — сила тока в каждом витке,  $\mu \gg 1$  — магнитная проницаемость сердечника,  $l$  — длина сердечника,  $h$  — ширина зазора, где  $h \ll \sqrt{S}$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника, и тем более  $h \ll l$ .

Найти магнитное поле в зазоре  $B_0$ .

Решение.

Линии поля  $\vec{B}$  идут вдоль оси сердечника, вдоль пунктирной линии. Следовательно, линии поля  $\vec{B}$  в зазоре сердечника перпендикулярны краям зазора. На краю зазора  $B_{2n} - B_{1n} = 0$ , откуда следует, что магнитное поле  $B$  в сердечнике равно магнитному полю  $B_0$  в зазоре:

$$B = B_0.$$

Рассмотрим циркуляцию поля  $\vec{H}$  вдоль оси сердечника.

$$\oint_l H_l dl = NI \Rightarrow lH + hH_0 = NI, \text{ где } \begin{cases} H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \\ H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\frac{B}{\mu_0 \mu} l + \frac{B_0}{\mu_0} h = NI, \text{ и с учетом } B = B_0 \text{ получаем}$$

$$\frac{B_0}{\mu_0\mu}l + \frac{B_0}{\mu_0}h = NI \quad \text{умножим это равенство на } \mu_0\mu \text{ и получим}$$

$$B_0 = \mu_0\mu \frac{NI}{l + \mu h}, \text{ где } \mu \text{ — магнитная проницаемость сердечника; } N \text{ —}$$

число витков катушки, намотанной на сердечник;  $I$  — сила тока в катушке;  $l$  — длина сердечника;  $h$  — ширина зазора.

Пусть теперь зазор настолько мал, что  $\mu h \ll l$  несмотря на то, что  $\mu \gg 1$ .

$$\text{Тогда } B_0 \approx \mu_0\mu \frac{NI}{l} \sim \mu.$$

При условии  $\mu \gg 1$  — это способ получения сильного магнитного поля в небольшом объеме.

$$H_0 = \mu \frac{NI}{l + \mu h} \approx \mu \frac{NI}{l}.$$